

# Insegnare, dare senso, capire.

## Qualche riflessione di un'insegnante qualsiasi

### La matematica e il suo insegnamento. Gli strumenti e le nuove tecnologie

Maria Cantoni  
Nucleo Ricerca Didattica  
Università Cattolica - Brescia

#### 1. Premessa

L'ampio dibattito in corso sulla matematica nella "nuova scuola" e sulle nuove tecnologie come strumenti di supporto alla sua didattica, sembra portare nella direzione di affrontare il problema di **dare senso** ad una disciplina troppo spesso lasciata al rango di addestramento di tecniche operative e proprio questo interseca positivamente i due problemi su cui si ragiona.

Le molteplici sfumature di significato nel parlare comune di quel "senso", ci invitano a lasciarne la comprensione implicita nelle esperienze di cui parleremo.

Riteniamo invece scontato che i nuovi mezzi di comunicazione ed elaborazione siano strumenti che influiscono in modo ampio sui processi di strutturazione della conoscenza e in generale sulla produzione di strategie risolutive dei problemi. In tutti i periodi storici gli strumenti sono stati anche mezzi di conoscenza. Oggi in particolare essi portano una sollecitazione diretta allo sviluppo mentale, una grande variabilità di informazione, spesso con un eccesso non controllabile, e realizzano la realtà virtuale<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> come già abbiamo detto altrove [8] l'aggettivo "virtuale" ha oggi un'ampia accezione. Vogliamo qui intenderlo come l'attributo di una realtà costruita da noi stessi per mezzo di un software, recepitibile visivamente e manipolabile solo mediante il programma.

Come semplice insegnante desideriamo intervenire in tale dibattito con alcune riflessioni conseguenza di un lavoro che ha sempre posto in primo piano le problematiche oggi messe in evidenza, anche per quanto riguarda la continuità nei vari ordini di scuole. La presa di coscienza di come una mente adulta possa osservare ed agire a seconda del cammino culturale che è stata in grado di compiere, ci induce infatti a vedere le cose già nell'età evolutiva di base, quindi in tutto il percorso scolastico [3].

Vogliamo portarci molto indietro nel tempo per mettere in evidenza ciò che crediamo importante in una prassi didattica: evolvere quotidianamente in linea coi tempi e nel confronto di culture, di esperienze, di risultati:

- All'inizio degli anni ottanta, accanto all'uso delle calcolatrici tascabili, facevano capolino i primi laboratori informatici.
- Già alla fine degli anni settanta entravano nei nuovi "programmi" della Scuola Media argomenti come "le trasformazioni geometriche" e "probabilità e statistica".

I due importanti momenti di cambiamento sopra ricordati sono stati da noi ritenuti stimoli adatti ad accentuare e a migliorare percorsi didattici di "costruzione del sapere", inseriti nel contesto più ampio della conoscenza [1] (come strumento essenziale dell'uomo) e del suo significato. A questo proposito vogliamo fare riferimento anche al pensiero di Freudenthal [2], attualissimo, nonostante gli anni trascorsi dalla sua morte. Egli ha posto il problema della conoscenza come fatto coinvolgente l'individuo in prima persona, come suo libero rapporto con la realtà e la verità, come suo inevitabile rapporto, inizialmente in qualità di discente, con una guida capace di farlo reinventare.

## 2. Il laboratorio informatico come cambiamento.

La novità di sfruttare nella prassi didattica un laboratorio informatico era determinata dall'uso privilegiato di uno strumento di non immediato utilizzo. Il rapporto con la macchina andava costruito totalmente ed emerse immediatamente il valore formativo di "far lavorare intelligentemente" qualcosa di flessibile al nostro volere, ma anche molto strutturato e codificato. Per prima cosa dovevamo non solo saper fare, ma anche saper insegnare a fare. Una "macchina" era, è in grado di lavorare convenientemente sfruttando algoritmi o procedure diversi da quelli comunemente usati senza tale supporto [5]. Non è pratica comune della scuola evidenziare agli studenti che, da quando l'uomo utilizza strumenti per libera scelta, egli trae suggerimento dagli strumenti stessi a scegliere strategie di azione più o meno convenienti, a capire di avere più di un percorso risolutivo e che l'essere conveniente non è un assoluto. Tale flessibilità mentale è tanto più opportuna nell'attuale mondo del lavoro.

Si poneva poi più fortemente il problema di scegliere se e quando introdurre lo strumento e sempre come libera e ragionevole scelta. A noi infatti non pareva, e soprattutto non pare oggi, che ci si possa porre la domanda se sia dannoso o necessario usare le tecnologie avanzate come strumenti di didattica. Il problema rimane a monte e consiste nel senso che gli studenti con i loro insegnanti danno a quello che in generale costruiscono dal momento in cui cominciano il lavoro insieme [14]. Quale scuola e perché, è sempre il riferimento ineliminabile ed è qualcosa da chiedersi anche individualmente.

Gli strumenti adatti alla didattica inoltre si pongono contestualizzati in un lavoro culturale. Non riteniamo possibile usarli per catturare attenzione. Le suggestioni informatiche a cui i giovani sono ormai abituati, sono di tipo molto diverso e non confrontabili con le nostre.

Se introduciamo strumenti o abbandoniamo gli antichi è per avvalorarci di nuove potenzialità. Solo un giudizio di opportunità può motivare la nostra scelta sapendo che l'attualità dell'oggi sarà inevita-

bilmente passato per il domani. Il passato potrà avere ancora molti suggerimenti da fornirci proprio nel mostrarci, nella contingenza e relatività delle scelte, la possibilità dell'ottimizzazione del rapporto tra strumenti e comportamenti razionali. Ricordiamo per esempio che anche le tecniche delle operazioni aritmetiche sono state spesso presentate solo come amorfi strumenti. Le macchine calcolatrici accettano semplicemente i calcoli, indifferenti al problema concreto che vi soggiace. E' chiaro che possiamo usarle pedestremente, senza capacità critica, anche in modo scorretto, ma non possiamo imputare alla macchina le nostre lacune. L'eseguire "materialmente" una delle quattro operazioni senza averne compreso il significato, ci pare invece sempre molto pericoloso. Quelle tecniche da un certo punto in poi vanno ad insinuarsi, per comodità e ragionevolezza, in ambienti concettuali diversi gli uni dagli altri e possono portare molta confusione al significato stesso di operazione e quasi giustificare tale confusione. L'automazione di certe procedure, indipendentemente da come è fatta, diviene efficace solo se e quando avremo raggiunto il senso delle cose. In tal caso permette di economizzare il lavoro ed evidenziare i nuovi nodi concettuali.

## 3. Parliamo di didattica. Un esempio con la geometria.

Nei tempi ricordati sopra, pensiamo che i "nuovi contenuti" abbiano facilitato i percorsi didattici già intrapresi. Hanno permesso infatti di privilegiare il rapporto con la realtà sia come tentativo di descriverla, di comunicarla e di conoscerla che di manipolarla e contemporaneamente di evidenziare il proprio vissuto con un forte richiamo all'ambiente come luogo di vita quotidiana. La conseguente sistemazione teorica, ai livelli consentiti dal contesto scolastico, permetteva di organizzare e sistemare le idee in una struttura condivisibile a cui attingere nei momenti operativi (come del resto dovrebbe essere sempre).

Se ci limitiamo alla geometria, il discorso si poteva e si può precisare in una proposta didattica nella scuola dell'obbligo o nel biennio delle superiori che le si avvicini nel tentativo di razionalizzare il rapporto con la realtà per conoscerla e gestirla.

Dall'osservazione della realtà, all'astrazione di un'immagine, al disegno, il passaggio alla geometria pone diversi livelli di cambiamento concettuale. E ancora alcuni pensieri di Freudenthal ci pare esprimano perfettamente il lavoro di crescita mentale possibile con l'attività didattica. Nel lavoro citato precedentemente egli scrive:

*"Quegli strumenti concettuali e algoritmici che ad un determinato livello sono utilizzati in pratica, diventano oggetto di riflessione metodica ad un livello superiore che risulta metateorico rispetto al precedente. Nella matematica si ha un continuo lavoro di organizzazione e riorganizzazione ed ogni forma di organizzazione può diventare oggetto di studio e da esaminare come tale".*

Freudenthal evidenzia inoltre una distinzione tra matematizzazione orizzontale e verticale.

*"La matematizzazione orizzontale conduce dal mondo della vita a quello dei simboli. Nel mondo della vita uno vive, agisce; nel mondo dei simboli, questi vengono inventati, modificati e manipolati in modo (prima) meccanico e (poi) comprendendoli e riflettendo su di essi: questa è la matematizzazione verticale. Il mondo della vita è ciò di cui abbiamo esperienza nella realtà, come è il mondo dei simboli nei riguardi della sua astrazione. Certamente le frontiere tra questi due mondi non sono tracciate in modo netto e le parole possono ampliarsi e restringersi, anche l'una a spese dell'altra. Una determinata cosa può appartenere di volta in volta al mondo della vita ed a quello dei simboli".*

Proprio in tale ordine di idee abbiamo sfruttato le "trasformazioni" per mettere in evidenza uno spontaneo atteggiamento mentale di organizzazione del pensiero, quindi per dare senso. Ci è parso importante, in un primo momento, porre l'accento sulle classi di equivalenza. All'interno di ogni classe proprio il concetto di equivalenza garantisce l'indifferenza della scelta dei singoli oggetti relativamente ad alcune caratteristiche e permette per esempio l'utilizzo di un elemento della classe piuttosto che un altro facilitando ed economizzando il lavoro. Ma gli elementi della classe si possono trasformare gli uni negli altri con una legge ben determinata. La conoscenza della legge consente quindi di raggiungere quel preciso elemento che sia necessario possedere. L'informazione generale che riceviamo dalla classe è determinata dagli invarianti. La trasformazione precedente non altera infatti le caratteristiche sostanziali degli "oggetti" presi in considerazione, caratteristiche che avevano permesso la costruzione della classe, rendendo riconoscibile ogni elemento della stessa.

Può essere facile in tale ambito ridurre il problema all'esercizio di costruire graficamente alcuni "oggetti" ed i loro "trasformati" con gli strumenti della geometria euclidea. Qui invece abbiamo inteso **dare senso** prendendo per esempio coscienza delle azioni concrete che operiamo nel cambiare posizione ad un oggetto che "consideriamo rigido". Analogamente possiamo analizzare la deformazione che subisce nella sua ombra ecc, nell'ipotesi di dominare gli atti compiuti sia per prevederne i risultati senza compierli, sia per poter ripetere o far ripetere le trasformazioni stesse.

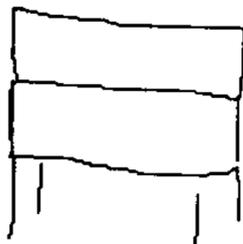
Il formalismo, ai diversi stadi, può poi giungere nel momento in cui si è in grado di apprezzare e dominare una massa di risultati per leggerli e sfruttarli ad un livello superiore. Solo allora l'astrazione diviene cosciente di se stessa e permette un vero ampliamento concettuale.

Gli allievi sono in grado di riflettere sui "percorsi" che si costruiscono insieme con una capacità logica e critica a volte stupefacente di cui vogliamo dare qualche esempio riportando alcune sintesi

scritte da ragazzi di 12 anni.

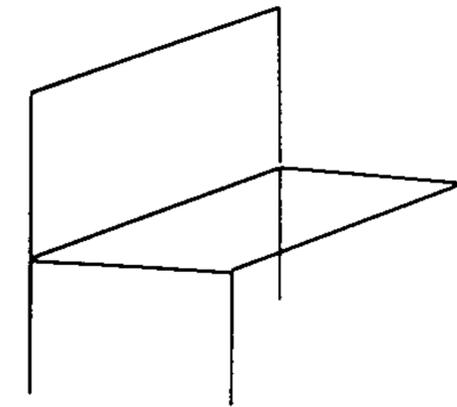
*"Noi ragazzi percepiamo ogni giorno migliaia di informazioni, un sovraccarico pesantissimo che per la maggior parte viene scaricato dal cervello. Eppure diviene per noi difficile fare una cosa semplicissima come spiegare per telefono ad un amico un disegno in modo che egli possa riprodurlo. Abbiamo fatto un gioco per verificare le nostre previsioni. Abbiamo preso un disegno che conteneva una panchina, una casa, un albero, dei fiori. Ci siamo subito accorti che se per riprodurre intendevamo una fotocopia, non sarebbe stato possibile far fare il lavoro. Avremmo però potuto dare "un'idea", avremmo cioè potuto comunicare degli "invarianti" (del suo contenuto) rispetto al disegno originale, cioè quegli elementi che facevano riconoscere per esempio di che cosa si trattava. Anche accontentandoci di questo ciò che era stato simulato alla lavagna non ci aveva per niente accontentato. Soprattutto la panchina, disegnata da una compagna, quella panchina, assolutamente non andava bene! Ma anche tutto il disegno era fatto proprio male!*

*La panchina era stata fatta così*



*Perché la panchina aveva suscitato maggiori rifiuti che il resto? Ne è stata disegnata un'altra che è accettata dalla classe .."ecco così è come l'occhio la vede, altrimenti non è possibile, sono forme geometriche"*

*Trattiamo le forme "geometriche" in modo diverso? Ma che cosa sono le forme geometriche? La geometria che cosa fa? Perché?*



*Andrea dice che (la panchina) è formata da due rettangoli, Michele da due parallelogrammi. Allora ci siamo chiesti perché due persone abbiano detto cose così diverse davanti allo stesso disegno: forse perché Andrea si era ricordato delle panchine che si vedono nei parchi e pensando alla panchina aveva fatto un collegamento mentale, mentre Michele si riferiva a quello che vedeva nel disegno? Andrea commenta poi così il discorso: le cose sono più difficile da dirsi che a farsi.... Il nostro cervello fa collegamenti in continuazione senza che noi ce ne possiamo rendere conto. Penso che il nostro cervello proceda in questo modo: gli occhi vedono qualcosa di non identificato, ma somigliante ad un certo ricordo immagazzinato nella memoria. Ecco, così che, a tempo di record, si fanno delle supposizioni azzeccate o meno. Poi si può anche prevedere la trasformazione prima di vederne l'oggetto, perché nel nostro cervello si forma una specie di legge di trasformazione dovuta solamente alla esperienza di altre trasformazioni effettuate".*

Dopo la conclusione del lavoro Ornella scrive così:

*"L'uomo per disegnare trasforma le forme mettendole per esempio in prospettiva, cioè non come in realtà sono, ma come l'occhio le vede, per dare l'illusione della profondità. Esso ha bisogno di questa tecnica perché per comunicare deve dare all'altro l'impressione di trovarsi nella situazione. Gli invarianti sono gli elementi di un*

*disegno o di una esposizione che comunque vengano raccontati, rimangono sempre presenti; insomma gli elementi caratteristici del disegno. Per far disegnare all'altro la forma della prospettiva, però, bisogna dare loro un nome, in modo che la persona sappia esattamente cosa disegnare: perciò parliamo di geometria, perché questo non è altro che l'insieme dei nomi, delle forme, delle regole per svilupparlo o calcolarne le misure".*

#### 4. Il disegno e gli strumenti per disegnare.

In tale ambito occuparsi dello strumento "per disegnare" diviene importante perché da questo disegnare deriva una parte fondamentale della concettualizzazione, a vari livelli, che può essere raggiunta. Gli strumenti classici riga e compasso sono (erano?) il supporto alla mano dell'uomo per operare con una certa accuratezza grafica e, come oggetti concreti, implicano la funzione per la quale sono stati progettati, benché sia individuale la capacità di sfruttare la loro potenzialità.

Ci hanno accompagnato ad elaborare una quantità incredibile di disegni, ma gli studenti non sempre li hanno usati divenendo consci che con essi stavano elaborando certe relazioni. Strumenti diversi evidenziano o possono evidenziare modi diversi di procedere, ma **dare senso** è implicito al fine e non al mezzo e Rugiada, in seconda media, si esprime così:

*"...rifacendomi anche ai disegni precedentemente eseguiti noto che nella traslazione non ci sono punti che non si muovono. Nella rotazione c'è il centro, ma quando vi punto il compasso la punta dello strumento ruota su se stessa. Devo considerare quindi il centro come punto fermo o che ruota su se stesso? La risposta che ho trovato è che quello che dico un punto e che rappresento in un certo modo, non è concreto, ma corrisponde ad una mia idea che esce dalle "regole" e dalle "costrizioni" fisiche del reale e dai comportamenti che*

*assumerebbe se fosse la punta del compasso o la parte della lancetta che la dirige. Quindi nella rotazione c'è il punto O, il centro che resta fermo"*

L'evoluzione degli strumenti legati alle nuove tecnologie è stata velocissima e quasi quotidiano è divenuto il cambiamento che abbiamo posto in atto per il loro utilizzo. Accanto alla riga e al compasso ci siamo trovati al usare "programmi informatici". Essi ci hanno portato ad analizzare le modalità con cui l'informazione ci raggiunge, gli stimoli che essa produce, le risposte che induce, le attività o le passività che fa nascere, gli interessi che crea, il coinvolgimento individuale che stabilisce.

Con particolare interesse da molti anni ormai sfruttiamo CabriGéométre. Riteniamo lo strumento informatico di altra natura rispetto a riga e compasso anche perché dietro a CABRI c'è una mente che ha definito il programma sulla base di determinate finalità didattiche. Esse sono state poste per favorire una certa concettualizzazione pur lasciando all'utente una quasi totale libertà di azione. Nel disegno che produce, Cabri mira ad esaltare le relazioni tra un oggetto geometrico e le sue possibili rappresentazioni [7], [15].

Il rapporto "dinamico" col disegno prodotto che CABRI esalta, ripropone fortemente i due complessi momenti di un percorso di didattica della geometria:

- il rapporto appunto della situazione o della concettualizzazione col suo modello grafico
- la geometria delle trasformazioni

CABRI permette variabilità praticamente "infinita" di rappresentazione. Forse porta la mente ad essere meglio accompagnata nel suo dinamismo ed anche ad essere rassicurata. La mente trae normalmente suggerimenti da immagini che spesso necessitano di trasformazioni per divenire sempre più idonee ad esprimere relazioni tra i dati di un contesto. Nello stesso tempo ha però difficoltà a gestire

una grande variabilità di immagini vivendole in una contemporaneità. Lo strumento fornisce la possibilità di rendere invece presente ed attuale in modo **virtuale** [8] il complesso delle rappresentazioni che man mano si realizzano. Tali rappresentazioni, nella loro sequenza, possono generare la soluzione rimandando alla dimostrazione. Ecco allora che l'analisi e la sintesi che si vengono ad operare per giungere a tale soluzione, sono coerenti al suggerimento e determinate da esso. Può essere allora molto importante analizzare se e come tale suggerimento migliori la capacità di individuare relazioni e produrre immagini mentali.

Infine un'osservazione che riteniamo molto problematica. L'uomo crea con gli strumenti automatici **la realtà virtuale** che ha capacità di suggestione di tipo diverso dalla realtà concreta. Ha un modo di prodursi e un variare che segue regole precise, ma spesso arbitrarie, alle quali soggiace sia la convenzione che la logica. Anche il disegno, supporto dell'immaginazione nelle concettualizzazioni, viene prodotto in modo virtuale. Come tale viene modificato e reso flessibile al contesto a cui fa riferimento e diviene un "oggetto" sostanzialmente dinamico. Non possiamo fare a meno di domandarci cosa sarebbe stata la geometria se il supporto grafico avesse sempre avuto tali caratteristiche. Ci si trova forse in condizioni analoghe se si confronta il messaggio che si riceve da un film rispetto ad un'istantanea: moltissime sarebbero le cose da evidenziare. Tra tutte ci ha colpito la capacità dell'istantanea di cogliere "l'aspetto fuggente".

Qui il discorso potrebbe veramente dilatarsi, ma certamente possiamo dire che **la costruzione mentale di un complesso di conoscenze**, sia per la loro sistemazione in funzione di un'utilità che di un'abitudine mentale "intelligente", comporta allora nuove attenzioni e nuove verifiche.

Con Cabri2 è possibile "virtualmente" realizzare un modello concreto di trasformazione. Agire con il mouse a produrre sul monitor una nuova realtà di "oggetti virtuali" e trasformarli con un'azione sia pure virtuale di movimento, ci pare si ponga in parallelo con l'azione concreta di manipolare oggetti nella realtà, ma su di un piano di-

verso. Ci pare che si insinui tra l'azione concreta, il disegno e l'immagine mentale una nuova visione di ciò che sta avvenendo. Senza la dovuta attenzione tutto ciò potrebbe forse rafforzare il livello della manipolazione concreta piuttosto che l'accompagnamento all'astrazione. Nello stesso tempo pensiamo che proprio la nuova sollecitazione che riceviamo, se resa esplicita, possa evidenziare molto bene i percorsi logici necessari per comprendere a quale diverso livello intellettuale ci si ponga con la geometria delle trasformazioni.

## 5. Di fronte ad un problema.

Per dare maggior risalto alle nostre riflessioni, facciamo appello ad un problema di CabriFlatlandia [9], un'offerta della "rete" di comunicazioni. La scelta non è casuale. L'aggiornamento di un insegnante, anche come sollecitazione all'approfondimento culturale e metodologico, può oggi passare attraverso lo scambio variegato che internet può consentire. E' possibile, infatti, in tempo reale, socializzare problematiche, esperienze, confronti. Partecipare ad un vasto mondo di interessi comuni potrebbe cambiare il rapporto dell'insegnante con la sua professione.

Al di là di essere un'offerta per gli studenti per valutare la capacità di misurarsi con un problema, vorremmo vederla qui come proposta per gli insegnanti per essere usata come:

- problem solving
- possibile proposta didattica non ricercata ad hoc e a diversi livelli concettuali
- confronto con risultati di studenti di cui non si conosce l'itinerario culturale, ma che mettono in atto esempi di strategie da cui trarre suggerimenti o critiche ecc.

Ci pare inoltre molto positivo il fatto che gli autori, rivolgendosi ad una platea necessariamente variegata, nel proporre i problemi e nel discutere alcune soluzioni, diano costantemente consigli e facciano commenti in modo che si sfrutti la matematica come occasione di razionalità. La semplice osservazione, la manipolazione concreta, il caso particolare non possono cioè sostituire la dimostrazione, la matematica induce un comportamento di razionalità da cui non si dovrebbe prescindere.

Andiamo allora a rivedere dal nostro punto di vista la soluzione di un problema che ci pare ricco di suggestioni e sufficientemente elementare per essere affrontato velocemente nella sua essenzialità. Facciamo ovviamente uso di Cabri come strumento di disegno.

### Problema Dicembre 1997

Dato un angolo  $XVY$  e un segmento di lunghezza  $r$ :

- a) costruire la circonferenza con raggio  $r$  tangente ai lati dell'angolo. Si indichi con  $O$  il suo centro e con  $A$  e  $B$  i punti di tangenza. Si giustifichi il procedimento seguito;
- b) detto  $T$  un punto sull'arco  $AB$  dalla stessa parte di  $V$ , condurre la retta tangente alla circonferenza in  $T$  che incontra i lati dell'angolo in  $R$  e  $S$ ; se l'angolo  $XVY$  ha un'ampiezza di  $60^\circ$  calcolare, in funzione di  $r$ , il perimetro del triangolo  $RVS$  e studiare il comportamento del perimetro al variare di  $T$  su  $AB$ .

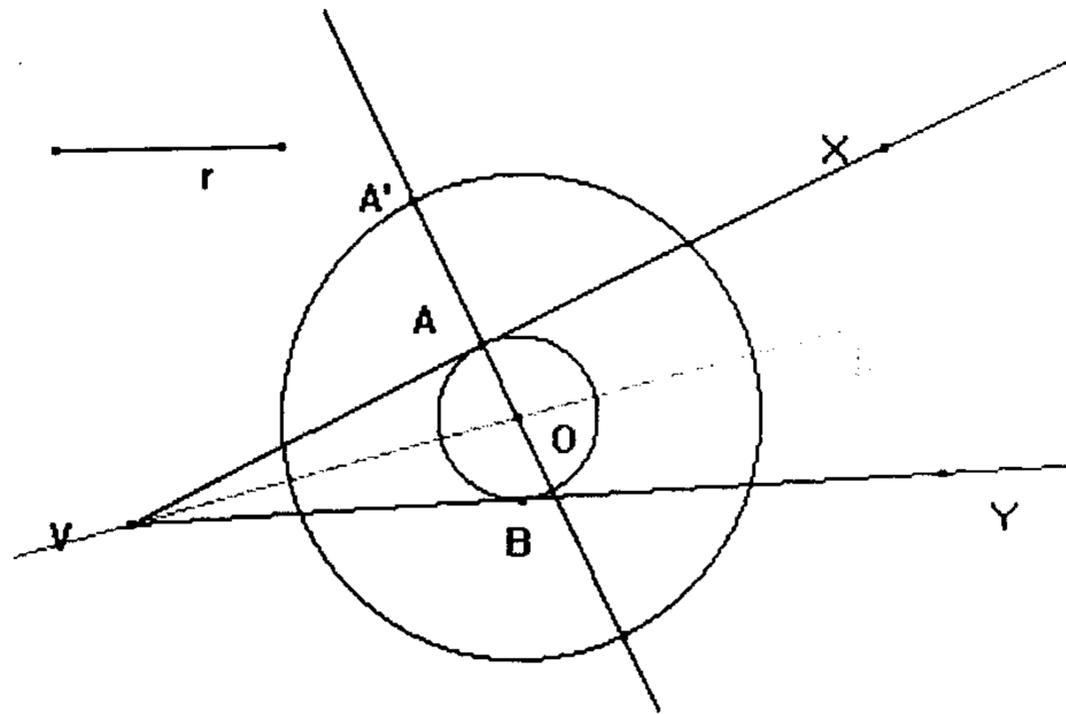
Non evidenziamo le conoscenze necessarie per affrontare le problematiche che il testo propone. Il lavoro particolare non sarebbe pensabile prima di un'attuale terza media, mentre crediamo di operare con una metodologia di lavoro valida a tutti i livelli.

- a) Ritorniamo a ciò che abbiamo evidenziato al paragrafo 3. relativamente alla geometria delle trasformazioni. Il problema è implicitamente risolto nel testo stesso perché, considerata una circonferenza qualsiasi tangente alle rette dell'angolo, con un'omotetia di centro  $V$  siamo in grado di trasformare la circonferenza tracciata in quella voluta.

Supponiamo invece di voler "costruire" il percorso logico che porterà al precedente atteggiamento mentale e a costruire effettivamente la circonferenza voluta:

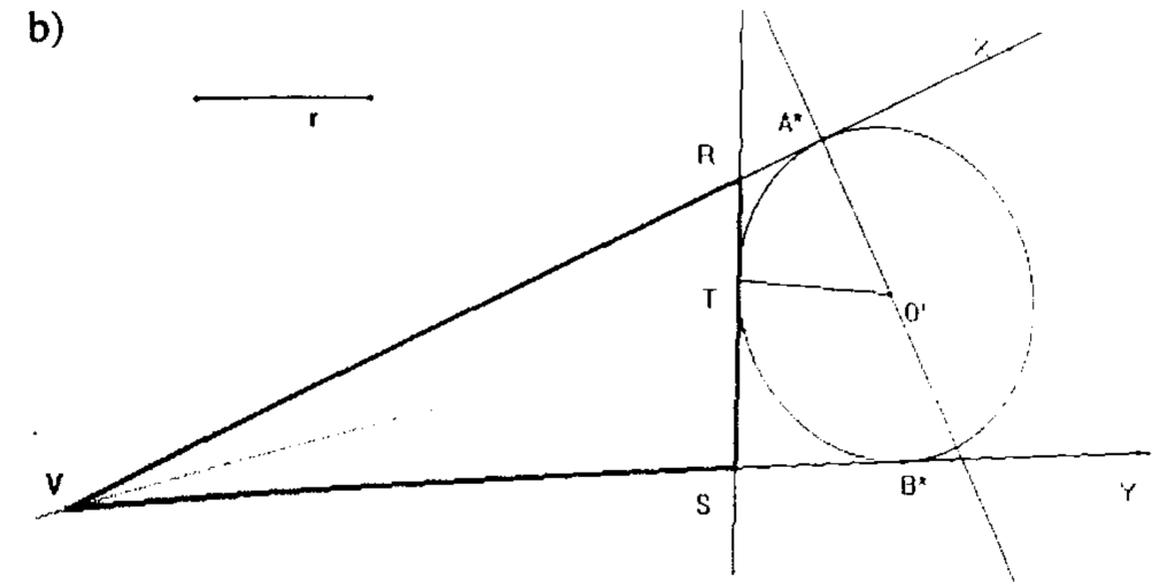
- E' certamente possibile interrogarsi inizialmente su che cosa sia facile fare, e questo con un richiamo immediato alle conoscenze relative ai cerchi e alle sue tangenti: per esempio disegnare una circonferenza qualsiasi tangente alle semirette date. Il richiamo alle conoscenze per la costruzione da effettuare, come sempre, rafforza le conoscenze stesse, ma Cabri permette un'attività ad un livello inferiore. E' sempre possibile che per alcuni studenti ci siano molti dubbi e incertezze. E' qui che Cabri consente, con la "ricostruzione passo a passo" un modo diverso di lavorare. Per tutti coloro che hanno difficoltà a coordinare la sequenza di "operazioni" da compiere per tracciare la circonferenza, l'insegnante può presentare la costruzione già eseguita, ma "consegnandola" allo studente graficamente in evoluzione. Quest'ultimo può intervenire a "giustificare" la sequenza che vede compiere e ad esplicitarne "passo a passo" i passaggi, soffermandosi poi su quelli che gli fossero oscuri o che puntualizzano le sue lacune.
- Cabri permette poi di "dilatare" la circonferenza disegnata muovendo virtualmente il punto  $O$  lungo la bisettrice  $b$  dell'angolo.

- Disegnando anche una circonferenza di raggio  $r$ ,  $OA'$ , con centro in  $O$  si saprebbe esattamente dove "fermarsi".
- Contemporaneamente si "vedrebbe" che il segmento  $OA'$  trasla parallelamente a se stesso fino a che  $A'$  finisce su  $VX$ .



La trasformazione geometrica non coincide con il movimento virtuale che compio sul monitor, ma da questi movimenti concreti e virtuali, posso "astrarre" la "trasformazione geometrica" generatrice di una classe di oggetti equivalenti. Proprio perché Cabri potrebbe indurre la coincidenza, diviene facile discuterne la differenza. Il lavoro potrebbe, almeno intuitivamente, evidenziare un uso obiettivo delle trasformazioni che non è poi molto lontano da tanti comportamenti quotidiani in situazioni spontanee.

Da questo punto in poi le strategie risolutive potrebbero essere molte. Anche continuando la strada intrapresa per esempio, poiché la circonferenza è determinata dal suo raggio, potremmo compiere un lavoro di traslazione di quest'ultimo.



Per quanto riguarda la seconda domanda, Cabri, proprio per la variabilità che produce ci "accompagna a vedere" (facilmente dimostrabile) che i triangoli  $TRA^*$  e  $TSB^*$  sono necessariamente isosceli, cosa che risolve il secondo punto del problema, almeno per quanto riguarda la costanza del perimetro al variare di  $T$ .

Ci pare che Cabri stimoli quei percorsi alternativi a quelli che avrebbero suggerito gli strumenti convenzionali (stimoli comunque di analogo interesse didattico, che sarebbe interessante valutare e confrontare). La possibilità di esplorazione, se attentamente usata, induce l'esplicitazione delle informazioni. Ogni informazione esplicita contiene dentro di sé informazioni implicite di cui generalmente abbiamo bisogno nel senso che sono la soluzione del problema. Raggiungere una soluzione, progettare, sono capacità che si possono acquisire, sono la capacità di saper evidenziare relazioni tra dati certi o probabili che tutti possono conoscere, relazioni che ci portano a nuovi dati. Con Cabri è possibile mettere in evidenza la variabilità della forma, quindi molti dati, non eseguendo tanti "disegni singoli", ma mutando il "singolo oggetto" che costruiamo. Esso può ritornare su se stesso a "richiamare" le immagini già espresse e poi superate, collocare casi particolari accanto ai generali, richiedere in

ogni momento i perché delle uguaglianze e delle differenze.

Poiché l'attività in classe mette in gioco l'insegnante con gli allievi, il **dare senso** alla conoscenza che a scuola può essere costruita, esalta l'individualità dell'insegnante e della classe in cui il lavoro si realizza.

Pensiamo inoltre che faccia nascere la necessità di valutare processi e competenze spesso non immediatamente collocabili tra quelli giudicabili come buoni o cattivi. L'insegnante non potrà forse in tali situazioni attingere a contenitori di unità didattiche per ripercorrere esperienze altrui, ma potrà usare ogni esperienza come suggerimento da rielaborare.

Soprattutto crediamo che, prima del lavoro con gli allievi, **l'insegnante debba sperimentare all'interno del suo ambito culturale per capire le dinamiche mentali che si mettono in atto.** Dovrà prepararsi sempre di più a saper distinguere, nel rapporto col mondo, ciò che è indotto dal contatto con le cose da ciò che verrà sempre più indotto dal mondo virtuale o comunque da una finzione non sempre riconoscibile immediatamente: una sfida affascinante.

Abbiamo spesso usato il condizionale perché, pur considerando importanti le esperienze compiute, riteniamo che il cammino verso la conoscenza delle reali dinamiche mentali che si mettono in atto nei nuovi contesti, sia ancora molto lungo, forse infinito. L'individualità delle risposte e la complessità anche psicologica delle relazioni mentali che si attuano, suggeriscono infatti di lavorare sempre con una grande attenzione a ciò che succede in ogni esperienza, pronti a discuterne la realizzazione e a meditarne le conseguenze. Come sempre un atto didattico diviene irripetibile e in evoluzione.

Possiamo concludere ancora con Freundenthal: *"Un buon insegnante che non segue ciecamente le tradizioni imposte dal proprio passato o da libri di testo prescritti e prescrittivi, agisce come un innovatore nel campo dell'educazione, anche se non ha coscienza del proprio ruolo. Il cambiamento accidentale può essere il germe*

*di una ricerca, così come una ricerca può condurre al cambiamento".*

### Bibliografia

Al di là di testi classici, sempre miniere di idee preziose, le autorevoli pubblicazioni di articoli o di volumi che riteniamo suggeritori e integratori dei discorsi fatti si stanno moltiplicando di giorno in giorno in modo quasi esponenziale. Di essi si ha facile traccia anche e soprattutto attraverso il Web. La comunicazione oggi ha caratteri nuovi. Abbiamo qui voluto dare allora solo qualche riferimento come esempio di suggestione presente e passata, oppure di condivisione, cosa che permette di ritenere i tempi maturi per una cultura del senso in matematica e per tutti.

1. "Processi di insegnamento/apprendimento centrati sull'uso di strumenti computazionali" M.A. Mariotti - Atti del Convegno Ted - Febbraio 2001
2. Hans Freundenthal "Ripensando l'educazione matematica" a cura di Carlo Felice Manara, Editrice La Scuola - Brescia 1994
3. [www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers98.html](http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers98.html)
4. Maria Molino Cantoni "Dominio del concetto e del linguaggio", Atti del XV Convegno nazionale dei Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica per la Scuola Media "Argomentare e dimostrare nella scuola media" - Salice Terme - Aprile 1996
5. Carlo Felice Manara, Maria Molino Cantoni "Osservazioni didattiche sulle procedure di dimostrazione e soluzione di problemi", L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 22A N. 1, pgg. 35, 48, Febbraio 1999

6. GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ, M.P.I. - U.M.I., Quaderno n. 35, Liceo Scientifico "Vallisneri" Lucca 2000
7. C. Laborde "Cabri-Géometre ou un nouveau rapport à la géométrie" Notiziario UMI Atti del convegno UMI-CIIM di Latina (1997).
8. Carlo Felice Manara, Maria Molino Cantoni "Logica e realtà virtuale in geometria", Nuova Secondaria, Editrice La scuola, Brescia, pgg 41, 47, Dicembre 1999.
9. [www.arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/](http://www.arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/)
10. CABRIRRSAE Bollettino degli utilizzatori di software matematici, I.R.R.S.A.E. Emilia - Romagna
11. Carlo Felice Manara, Mario Marchi "L'insegnamento della matematica", Editrice La Scuola, Brescia 1993
12. A. M. Mariotti "Costruzioni in geometria", L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19B, n. 3, 1988
13. [www-didactique.imag.fr/preuve](http://www-didactique.imag.fr/preuve)
14. Maria Molino Cantoni "Didattica e non solo - Alcune riflessioni" Didattica della matematica in antologia, Gruppo di ricerca CNR. Dipartimento di matematica, Politecnico di Torino, 1999
15. A. M. Mariotti "Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore", L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 21B, n.3, 1998

## INFORMAZIONI

La Presidenza