



UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

25121 BRESCIA,

ITINERARIO DI AGGIORNAMENTO
PER GLI INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLA SCUOLA SECONDARIA

1. FINALITÀ, OGGETTO, METODOLOGIA DELL'ITINERARIO

L'itinerario di aggiornamento qui proposto è il risultato di una esperienza che si è svolta attraverso corsi residenziali tenuti presso il Centro di Cultura dell'Università Cattolica, al Passo della Mendola, negli anni 1982-83-84 ripetuti poi sotto forma di incontri periodici di aggiornamento, a Brescia nel 1983 e a Treviso nel 1984-85.

L'itinerario si è svolto secondo una formula di sintesi tra l'aggiornamento disciplinare teorico e l'analisi didattica dei contenuti teorici. Questa analisi didattica e metodologica ha portato i corsisti, attraverso lavori di gruppo, ad una produzione di significativo materiale didattico che è risultato ad un tempo frutto del corso e verifica della sua incidenza sul piano aggiornativo contenutistico e didattico. Per la realizzazione di questo progetto integrale di aggiornamento si sono messi a frutto i risultati di un precedente lavoro biennale di formazione di formatori realizzato nella Università Cattolica, da un centro interdisciplinare di aggiornamento degli insegnanti, cui afferisce anche il Seminario Didattico della Facoltà di Scienze.

L'itinerario si articola su tre temi, che vengono qui sotto elencati:

I - La matematizzazione del reale: grandezze, numeri, logica e probabilità

Contenuti:

- 1 - Grandezze: teoria generale, applicazioni alla geometria ed alla fisica elementare.
- 2 - Teoria degli insiemi numerici; loro estensioni ed applicazioni.
- 3 - Analisi del linguaggio comune e struttura del discorso formale; predicazione, quantificazione, problematica della deduzione.

- 4 - Problemi di decisione in condizioni di informazione in completa. Leggi fondamentali della probabilità. Analisi della informazione e sua elaborazione. Statistica.

II - La geometria; problemi logici e didattici

Con questo tema ci si propone di avviare alla valutazione del significato della geometria, considerata come un momento fondamentale della matematizzazione della realtà, di approfondire i problemi logici dei fondamenti di questa branca importantissima della matematica e di studiare la soluzione dei problemi didattici che si presentano quando si voglia dare all'insegnamento della geometria tutto il suo valore formativo.

Tale valore non può essere trascurato da un insegnamento che miri ad uno sviluppo equilibrato della personalità dei giovani con l'impiego della fantasia, con l'intuizione dei rapporti spaziali, ed insieme con lo stimolo alla invenzione creatrice e l'abitudine alla deduzione rigorosa.

Contenuti

- 1 - Geometria, mondo reale e problemi didattici.
- 2 - Geometria e logica.
- 3 - Geometria e strutture algebriche.
- 4 - Gli spazi geometrici ampliati e generalizzati.

III - Insiemi numerici, algebra elementare e sistemi formali. Problemi logici e didattici.

Il presente tema intende affrontare la gamma dei problemi che si incontrano nell'insegnamento dell'algebra nella scuola secondaria inferiore e superiore.

L'algebra costituisce la cerniera fondamentale della matematica moderna e la sua problematica si ricollega, da un lato agli argomenti elementari classici (numeri naturali, interi, razionali, reali e complessi) e dall'altro alle più recenti ed attuali applicazioni dello strumento matematico al pensiero scientifico e tecnico.

Contenuti

- 1 - Prospettiva storica dello sviluppo dell'algebra; il nascere e l'evolversi del pensiero algebrico dal concreto allo astratto, dai primordi all'epoca moderna.
- 2 - Insiemi numerici: l'ampliarsi del concetto di numero sotto la spinta e l'esigenza di problemi sempre nuovi.
- 3 - Le strutture algebriche: l'evoluzione della matematica da scienza di contenuti a scienza di strutture.
- 4 - Sistemi formali: matematica e logica; i concetti, la loro simbolizzazione, la deduzione. Il funzionamento del cervello.
- 5 - Problemi della didattica dell'algebra nelle varie età; l'algebra nelle scuole medie inferiori. I problemi del passaggio dalla scuola dell'obbligo alle scuole superiori.

2. ANALISI CULTURALE DEI CONTENUTI

Il lavoro qui presentato ha avuto come idea ispiratrice la concezione di un particolare aspetto della matematica: precisamente l'aspetto secondo il quale questa scienza si presenta come una specie di quadro ideale della conoscenza scientifica ed in particolare fornisce a questa conoscenza i mezzi linguistici per la rappresentazione degli oggetti di studio e per la deduzione.

Alla luce di questa visione, precisa anche se limitata e circoscritta ad alcuni aspetti, i problemi teorici e didattici della matematica hanno avuto una trattazione che è stata scandita da tre momenti:

i) anzitutto una presentazione di questo aspetto della matematica intesa come linguaggio della scienza e una analisi di come questo aspetto si applichi ai momenti più elementari della matematizzazione della realtà, fisica o sociale; ii) in secondo luogo l'analisi della geometria, nella sua visione classica elementare e nei suoi aspetti critici, vista come primo schema di matematizzazione della realtà fisica; iii) in terzo luogo la visione dell'algebra come dottrina che studia le proprietà formali (in certo senso 'grammaticali') del linguaggio matematico.

Il primo aspetto che è stato analizzato e studiato riguarda appunto la considerazione della matematica come linguaggio della conoscenza scientifica: infatti nel primo tema di questo itinerario di aggiornamento sono stati presi in considerazione i vari momenti in cui la scuola mette a contatto il giovane con il linguaggio matematico: anzitutto con l'insieme dei numeri naturali, intesi come il linguaggio per dominare gli insiemi finiti e le manipolazioni che noi eseguiamo su di essi; in secondo luogo con l'insieme dei numeri razionali, considerati come operatori sulle grandezze continue. Questo secondo momento è quindi collegato con una assiomatizzazione del concetto di grandezza continua, e con lo studio della operazione di misura, vista come uno dei punti quasi obbligati di passaggio per la rappresentazione delle grandezze stesse.

La considerazione della matematica come linguaggio della scienza è stata poi collegata in modo quasi naturale con le questioni di logica; è stata in particolare messa a confronto la deduzione eseguita con gli strumenti classici e quella ottenuta con gli strumenti formali della matematica. Pertanto il momento deduttivo - ineli-

minabile in ogni conoscenza scientifica - è stato analizzato nelle sue modalità, nel senso classico e nel moderno.

Infine la considerazione della logica, intesa come teoria della deduzione certa e rigorosa, ha portato in modo quasi naturale alla considerazione dei concetti fondamentali della teoria della informazione incompleta, cioè del calcolo delle probabilità, considerato come lo strumento che permette la utilizzazione ottimale della informazione, ai fini delle decisioni umane nel campo economico.

Nel secondo tema dell'itinerario il punto di partenza è stato fornito dalla geometria, considerata come l'insieme di conoscenze umane che - storicamente - ha avuto per primo l'assetto di una teoria rigorosa.

Pertanto il discorso è stato condotto in modo quasi naturale sulla assiomatizzazione, sul suo significato e sulle sue conseguenze. Come è noto, i contenuti geometrici si prestano in modo particolare alla esemplificazione della assiomatizzazione vista come il momento fondamentale della conoscenza scientifica e come un momento iniziale per la sistemazione di ogni teoria fisico-matematica della realtà. Il collegamento con gli argomenti trattati nel tema precedente è stato fornito in modo naturale dalla analisi del significato della geometria analitica e dei vari calcoli geometrici (quaternioni, calcolo baricentrico di Möbius, calcolo vettoriale, calcolo geometrico di Peano) che di volta in volta sono stati presentati come metodi di deduzione rigorosa e formale in un ambito in cui tradizionalmente, fino dalle epoche classiche, era sempre stata utilizzata la espressione verbale, con il linguaggio comune e la strumentazione della logica classica, nella deduzione.

Nel terzo tema si è dedicata l'attenzione all'algebra, intesa come studio delle proprietà formali del linguaggio matematico. E' stata premessa una rassegna storica delle varie convenzioni adottate nei secoli per la rappresentazione del numero; in correlazione con questa analisi diacronica della evoluzione della rappresentazione, è stata fatta anche una rassegna delle procedure che conducono ai vari ampliamenti degli insiemi numerici. Infine si presenta il problema delle strutture algebriche più generali e i problemi della logica matematica. In questo caso la logica è stata considerata non solo come strumento deduttivo, ma nei suoi collegamenti con l'algebra, come una specie di sviluppo naturale della problematica dei lin

guaggi formalizzati. Alla luce di questa impostazione è stato messo in evidenza il fatto che l'ampliamento dei mezzi espressivi e il potenziamento dei mezzi deduttivi è stato scandito dal progressivo ampliamento dell'universo dominato dalla matematica.

3. STRATEGIE DIDATTICHE SOTTESE

La visione unitaria e coerente della problematica teorica qui trattata, va di pari passo con la trattazione dei problemi didattici della matematica nei vari ordini della scuola secondaria.

E' chiaro che la problematica dell'insegnamento di questa materia nella scuola media inferiore può essere anche abbastanza diversa da quella dell'insegnamento nelle scuole dell'ordine secondario superiore; tuttavia il taglio in certo modo unitario e coerente che è stato dato alle analisi teoriche, ha permesso anche una strutturazione unitaria - nei limiti del possibile - dei problemi didattici.

Senza entrare in eccessivi particolari, diremo qui che la visione della matematica come linguaggio ha alcune conseguenze sul piano didattico che si esplicitano tanto sulla presentazione generale della materia che sulla tecnica didattica particolare.

Anzitutto appare chiaro che il considerare la matematica come linguaggio porta come conseguenza, sul piano didattico, che l'insegnamento di questa materia è strettamente collegato con i contenuti che il discente ha quotidianamente sotto gli occhi, con la realtà che egli sperimenta e che manipola, con le decisioni che egli prende. Invero come una lingua ha senso in quanto è un insieme di simboli di contenuti concettuali diversi da se stessa, la matematica in questa luce viene a prendere motivazione e senso dai contenuti dei quali essa parla.

Appare ragionevole pensare che certe strutture logiche fondamentali siano già possedute dai discenti e che di conseguenza l'opera dell'insegnante debba mirare a rendere espliciti e coscienti i procedimenti logici naturali, sottoponendoli a critica e simbolizzandoli con strumenti che ammettano delle regole sintattiche precise.

In secondo luogo può apparire pure chiaro che l'insegnamento della matematica dovrebbe seguire, con le debite precauzioni e distinzioni, il procedimento di ap-

prendimento di una lingua, cioè non dovrebbe essere fatto con la presentazione di regole astratte imposte dal docente prima dei contenuti, senza stretto collegamento con essi, ma dovrebbe invece nascere in modo quasi spontaneo dall'arricchimento dell'universo di contenuti che debbono essere rappresentati ed espressi.

Inoltre le strutture formali dei linguaggi che vengono di volta in volta costruiti sono - per così dire - suggerite dalle strutture delle realtà che ne costituiscono il substrato. Così per esempio, la teoria dei razionali viene impostata presentando il numero razionale come un operatore sulle classi di grandezze continue; in tal modo le proprietà formali dei razionali sono suggerite dalla esigenza di riprodurre le corrispondenti proprietà formali delle operazioni sulle grandezze. Tali operazioni, a loro volta, sono accettate come dei dati dalla manipolazione quotidiana degli enti della vita comune, con riserva di assiomatizzare in modo rigoroso la teoria delle grandezze quando i discenti abbiano acquisito la maturità sufficiente per apprezzare l'analisi critica dei concetti e appropriarsene vitalmente, in modo tale che l'analisi stessa diventi un patrimonio intellettuale posseduto e dominato.

In conclusione si è scelta una strada didattica che cerca di evitare il più possibile quel distacco tra il simbolo ed il simbolizzato che rappresenta uno dei pericoli della scuola a tutti i livelli.

In questo ordine di idee sono state analizzate criticamente le tendenze didattiche le quali mirano ad introdurre, anche a livello elementare, dei formalismi logici per i quali molto probabilmente i preadolescenti non sono ancora maturi. Il che non impedisce che si debba cercare la educazione al rigore deduttivo, anche se questo è ottenuto con i mezzi classici della logica che utilizza il linguaggio comune.

E' ragionevole pensare che una strategia didattica di questo tipo possa essere suggerita anche da una attenta meditazione dello sviluppo storico della scienza, ed in particolare della matematica. Pare infatti abbastanza comune il fatto che i concetti generalissimi, unificanti, che danno la visione profonda dei fatti e delle teorie, si presentano di solito come gli esiti finali di lunghi processi evolutivi, durante i quali il progresso della conoscenza scientifica e della sistemazione teori-

ca presenta dei tentennamenti, dei pentimenti e forse anche degli errori; è forse una legge comune della evoluzione mentale del singolo e della umanità, quella secondo la quale una realtà, percepita in modo globale ed unitario e quindi - quasi necessariamente - indistinto e confuso, viene analizzata e poi dominata con lungo lavoro di approfondimento. Ovviamente non si pretende che anche l'insegnamento segua lo stesso cammino, ma - ripetiamo - la strategia didattica può lasciarsi ammaestrare da questa evoluzione storica, per cercare le vie di minore resistenza, che conducano alla analisi precisa e rigorosa e poi al dominio di un certo universo concettuale. Se questo è vero, ne consegue che la presentazione dei concetti più generali e profondi, la pretesa di insegnare le strutture più generali ed astratte quando il discente non ne vede appieno la necessità, in relazione al ristretto orizzonte che egli può dominare, ingenera spesso un senso di disinteresse che può giungere fino al fastidio ed alla noia.

Ciò avviene spesso, per fare un esempio di livello universitario, nelle scuole di ingegneria, quando lo studente del triennio di applicazione si trova imbarazzato nella applicazione pratica degli strumenti, potentissimi e rigorosi, che gli sono stati dati nel primo biennio; ciò si può verificare anche negli altri livelli di scuola, quando il discente è posto di fronte a dei concetti che sono per lui troppo astratti, in relazione al livello di maturità mentale e di conoscenze che egli possiede nel momento in cui le strutture astratte gli vengono insegnate. Di conseguenza l'apprendimento - quando avviene - rimane al livello puramente mnemonico e non diventa una crescita culturale del soggetto.

Per fare infine un altro esempio, appare chiaro che la geometria euclidea classica costituisce un edificio che appare dall'esterno complicato e composito, perchè cerca di portare a livello cosciente e rigoroso (e quindi scientifico) un insieme di esperienze sul mondo esterno che non si presentano come unitarie, perchè traggono la loro origine da sensazioni molto diverse, afferenti a vari sensi ed a diversissimi processi psicologici. Tuttavia appare anche vero che questa esperienza, varia e composita, ha portato soltanto in epoche recenti ad analisi critiche che ne hanno enucleato gli elementi costitutivi. E forse sarebbe saggio lasciarsi ammaestrare da questa lezione della storia dello sviluppo del pensiero scientifico, per studiare le strategie didattiche più opportune, che partano da una esperienza composita per giungere alla analisi concettuale rigorosa.