# GIUSEPPE PEANO
# ED I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

Carlo Felice Manara
Professore Emerito
Università Statale di Milano

VOL. 17B N. 3
GIUGNO 1994

# GIUSEPPE PEANO
# ED I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

**Carlo Felice Manara, *Università Statale di Milano***

## LA SCIENZA GEOMETRICA NEL SECOLO XIV

1 - Per inquadrare il pensiero di Peano sulla Geometria è forse utile ricordare, almeno per sommi capi, l'evoluzione di questa scienza nello scorso secolo. Sarebbe troppo lungo esporre minutamente tutti gli episodi che hanno accompagnato lo sviluppo della scienza geometrica nel secolo XIX, ma non posso evitare di ricordare i momenti più importanti, perché mi pare di poter dire che l'evoluzione della Geometria ha avuto una influenza fondamentale ed addirittura determinante sullo sviluppo dell'intera Matematica.

In questo ordine di idee, vorrei ricordare la costruzione delle Geometrie non-euclidee, che ha cambiato radicalmente l'atteggiamento della scienza nei riguardi del significato degli enunciati della Geometria, ed ha aperto la strada alla moderna concezione di questa scienza: essa non è più oggi considerata come una scienza qualificata dai suoi oggetti, o dai contenuti delle sue proposizioni, ma è vista come una dottrina specificata sopratutto dalle sue procedure. Questa evoluzione ha condotto alla concezione di Geometria come sistema ipotetico-deduttivo, concezione che distacca la Geometria dalla sua immagine classica, che la voleva fondata sulla evidenza di una esperienza esterna, il cui significato ed il cui valore erano stati contestati da molte parti. E del resto la fallacia della concezione classica era stata messa in evidenza dal fallimento dei secolari e vani tentativi per dimostrare la celebre proposizione euclidea delle parallele.

Come è noto, l'opera geometrica fondamentale di Bernhard Riemann è strettamente collegata con il problema della Geometria non-euclidea; ma oggi ci rendiamo conto del fatto che quest'opera ha iniziato un movimento di revisione dei fondamenti stessi sui quali si basa la elaborazione teorica delle nostre esperienze spaziali.

2 - Ho parlato di Geometrie non-euclidee; ma va detto che la crisi determinata dalla invenzione di queste teorie è soltanto uno dei sintomi di una evoluzione profonda nella concezione della Geometria, evoluzione che ha le sue radici in epoche abbastanza lontane. A prova di queste affermazioni vorrei citare due episodi che ci sembrano importanti perché riguardano non soltanto la impostazione teorica della questione dei fondamenti, ma anche la didattica della Geometria. Il primo di tali episodi è costituito dalla pubblicazione del piccolo trattato intitolato "Elements de Géométrie" di Alexis-Claude Clairaut; il secondo è dato dal trattato di Adrien-Marie Legendre intitolato "Géométrie".

Mi pare interessante citare queste due opere, perché ritengo che esse indichino l'esistenza di un movimento intellettuale di analisi dei fondamenti della scienza geometrica, movimento che aveva i suoi riflessi perfino nella didattica di tale scienza.

È noto che la prima opera citata (quella di Clairaut) è stata scritta per insegnare la Geometria ad una signora. La cosa che ci pare più interessante consiste nel fatto che quest'opera è diretta ad una persona che non è più in età scolare, e quindi non ha più la disponibilità di memoria e l'atteggiamento passivo dei soggetti in età infantile o adolescenziale; quindi l'autore si sforza di motivare le nozioni che presenta, e di collegarle con l'esperienza concreta del soggetto. In questa piccola opera troviamo quindi anche un esempio di insegnamento per problemi; esempio ignorato da molti pedagogisti, pronti a sbandierare idee che essi presentano come nuove, e che poi si rivelano vecchie di secoli.

Ma l'aspetto più interessante dell'opera di Clairaut sta nella opinione che egli esprime nella prefazione; opinione secondo la quale la esposizione classica della Geometria pecca di astrattezza, e non mette in evidenza l'aspetto pratico di questa scienza. La trattazione risente ovviamente di queste posizioni metodologiche iniziali, e quindi certe dimostrazioni fanno più appello all'immaginazione che alla logica, e non sempre con successo.

La seconda opera (quella di Legendre) è stata considerata in Francia come un classico della didattica della Matematica per vari decenni ed ha avuto moltissime edizioni; in essa si trova la nota definizione della retta tra due punti come "linea che ha la minima lunghezza" sulla quale ritorneremo. Inoltre, in alcune edizioni, vi si trovano due diversi tentativi di dimostrazione della proposizione euclidea delle parallele; ognuno di questi tentativi nasconde un postulato non espresso, oppure un paralogismo, dovuto forse ad una sbrigativa concezione dell'infinito ed ad una conseguente utilizzazione scorretta di questo concetto.

Per completare una visione, anche sommaria, dell'ambiente scientifico in cui maturò la ricerca di Peano sui fondamenti della Geometria, vorrei ricordare le memorie di Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz, il quale propose di impostare il problema dei fondamenti in modo del tutto diverso dalla tradizione secolare.

Manca qui lo spazio per presentare il pensiero di Helmholtz secondo i suoi meriti; mi limito quindi a ricordare ulteriormente che il fervore degli studi geometrici generò anche delle opere di sintesi e di analisi del metodo. Su quest'ultimo argomento ricordo il noto "Aperçu historique" di Michel Chasles; per quanto riguarda le opere di unificazione e di sintesi, mi limito a ricordare il "Programma di Erlangen" di Felix Klein.

Quest'ultima opera mi pare particolarmente notevole, perché per la prima volta nella Storia della scienza geometrica, introduceva in Geometria certi concetti di Algebra (nella fattispecie il concetto di gruppo) che dovevano manifestare in seguito una straordinaria potenza e fecondità, come è provato dalla struttura della moderna Matematica.

3 - I momenti di crisi della Geometria, a cui ho accennato, si accompagnano, nel secolo scorso, anche ad episodi interessanti riguardanti la problematica della rappresentazione degli enti geometrici e delle loro relazioni, e la costruzione di certi simbolismi che surrogassero le procedure deduttive della Geometria euclidea classica o le procedure algebriche della Geometria analitica tradizionale. Mi pare di poter dire che gli episodi più significativi di queste tendenze sono rappresentati dalla invenzione di certi simbolismi di rappresentazione degli enti della Geometria che avessero, per così dire, una portata ed una presa immediata sugli enti che si rappresentano.

Si potrebbe infatti osservare che i metodi classici della Geometria analitica, come viene ancora oggi insegnata nei corsi universitari e nelle scuole dell'ordine medio, richiedono l'introduzione di certi enti che costituiscono il sistema di riferimento; tali enti costituiscono il sistema di convenzioni usato per rappresentare gli enti della Geometria e le loro relazioni; convenzioni scelte in modo che per la risoluzione dei problemi si possano applicare i metodi noti dell'Algebra e dell'Analisi matematica.

La presenza di questi sistemi di riferimento può essere giudicata dunque assolutamente necessaria, addirittura perché si possa iniziare il procedimento di risoluzione dei problemi; tuttavia è facile osservare che molto spesso il riferimento ha ben poco a che vedere con i problemi considerati; infatti la scelta di un riferimento che renda facili e leggibili i calcoli e soprattutto i loro risultati rappresenta spesso un momento importantissimo e quasi decisivo per la soluzione di certi problemi.

Si potrebbe intravvedere il germe di questi movimenti intellettuali nelle idee di Joseph-Louis Lagrange, che, nei suoi lavori di Meccanica, diede cittadinanza a certe "coordinate" molto diverse dalle coordinate cartesiane classiche. Posizioni analoghe si incontrano in Karl Friedrich Gauss, il quale costruì dei sistemi di coordinate che sono pure degli ampliamenti dei sistemi classici.

Si potrebbe anche guardare alla costruzione dei vari sistemi di calcolo, come il calcolo vettoriale o il calcolo tensoriale, come allo sbocco quasi naturale di questi movimenti geometrici.

Si spiega così, almeno in parte, la nascita di vari sistemi di notazione geometrica nel secolo XIX; ci limiteremo qui a ricordare sommariamente quelli che ci sembrano i più importanti, per ambientare il pensiero di Peano e la soluzione che egli diede dei problemi esistenti in questo campo.

A questo proposito vorrei ricordare anzitutto l'opera di Hermann Grassmann, intitolata "Ausdehnungslehre", alla quale Peano fa esplicitamente riferimento nel suo "Calcolo geometrico". Manca qui lo spazio per una analisi soddisfacente del pensiero dell'originalissimo matematico tedesco; mi limito a ricordare che egli tentò di risolvere il problema di rappresentare gli enti della Matematica con simboli originali, ed inventò per conto suo una tecnica di prodotto alterno per risolvere i sistemi di equazioni che egli scriveva in forma del tutto originale.

Come ho detto, si ritrova traccia del pensiero di Grassmann nel "Calcolo geometrico" di Peano, con le convenzioni di notazione e con la costruzione di quelli che egli chiama "prodotto progressivo" e "prodotto regressivo", che sono gli strumenti algoritmici di cui si serve per risolvere i problemi di Geometria elementare.

Ma non è soltanto nell'opera di Grassmann che si possono trovare i germi del pensiero di Peano a proposito della Geometria; infatti un altro autore al quale si possono far risalire i germi del pensiero geometrico peaniano è Moritz Pasch. Si potrebbe dire che Peano abbia tratto da Pasch l'idea di costruire la Geometria per così dire "dal piccolo", cioè abbandonando l'idea delle figure infinite in partenza (retta, piano ecc.), per adottare invece l'idea della costruzione delle figure lineari.

4 - Queste correnti di pensiero matematico spiegano, almeno in parte, l'impostazione che Peano ha dato dei fondamenti della Geometria. Prima di dedicarmi all'analisi dell'opera peaniana, vorrei ricordare di passaggio l'influenza che essa ebbe sugli allievi e sulla trattatistica didattica dei decenni successivi a quelli in cui egli si occupò di questi problemi.

A proposito di queste questioni vorrei richiamare l'opera di Mario Pieri, che sviluppò le idee del maestro, con le memorie dedicate alla costruzione dei fondamenti della Geometria; l'influenza di Peano su questi lavori appare evidente dall'impiego del simbolismo logico che Peano stava creando; simbolismo la cui utilità era contestata in certi ambienti matematici italiani e stranieri suoi contemporanei. Credo che basti ricordare, a questo proposito, la polemica di Peano con Vito Volterra, polemica che vide tra i partigiani di Volterra diversi matematici dell'epoca; ed i giudizi di Henri Poincaré sui lavori di logica simbolica, ed in particolare su certe idee di Cesare Burali-Forti.

L'influenza del pensiero di Peano su Burali Forti appare chiara nei libri di Geometria metrico-proiettiva, che egli scrisse all'inizio del secolo; uno dei trattati è dedicato agli allievi della R. Accademia Militare di Torino, e costituisce uno sviluppo delle idee, dei metodi e delle notazioni che Peano aveva introdotto nel suo "Calcolo geometrico".

In particolare l'influenza del pensiero di Peano su Burali-Forti appare ancora più chiara nella definizione di vettore e di lunghezza di un segmento, che si incontra per esempio nella "Logica matematica".

Va detto tuttavia che il sistema di notazioni geometriche ispirato alle idee di Peano non ebbe la fortuna che invece arrise alle notazioni di logica, forse anche per merito di Bertrand Russell. Oltre alle opere di Burali Forti di cui abbiamo detto, per quanto si può ricordare, esso fu utilizzato da Ugo Cassina in una memoria, nella quale egli sviluppava i calcoli relativi ai problemi di Meccanica e di Geometria che avevano dato origine alla polemica di Peano con Volterra sulla soluzione del problema del moto dei poli.

5 - Vorrei dedicare la seconda parte di questo intervento all'analisi dell'assiomatica geometrica di Peano. Ma non intendo chiudere questa prima parte senza ricordare la celebre memoria, comparsa nei Mathematische Annalen del 1892 col titolo "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane"; è superfluo ricordare qui il rumore suscitato da questa memoria nell'ambiente scientifico del tempo, e mi limiterò a dire che ancora oggi, nella letteratura matematica, vengono chiamate "curve di Peano" quelle che posseggono quella proprietà, al tempo giudicata inquietante, di non avere tangente in nessun punto, e di avere quella che oggi si chiama "dimensione frattale" diversa da 1, anzi uguale a 2.

Il minimo che si possa dire di questo celebre risultato è che esso costrinse i matematici a precisare con opportune ipotesi il significato e la portata degli strumenti teorici che essi adottano per rappresentare certi enti le cui proprietà erano considerate come "evidenti" nelle epoche precedenti.

Nel capitolo V del "Formulario mathematico" Peano presenta questa sua creazione con il linguaggio "Interlingua" di cui era inventore: noi traduciamo qui le sue frasi in italiano, perché l'Interlingua, come altre sue idee, non ha avuto fortuna. Scrive dunque Peano a questo proposito:

"Esistono dei complessi di ordine n, cioè dei punti dello spazio ad n dimensioni, che sono funzioni continue di una variabile reale, oppure del tempo, in modo tale che la traiettoria del punto mobile riempie l'intero spazio. Cioè esiste una linea continua che passa per ogni punto del piano, ed esiste una linea che passa per ogni punto dello spazio ecc. Questo risultato ha qualche interesse nello studio dei principi della Geometria: infatti non esiste alcun carattere specifico che distingua la linea dalla superficie."

Si potrebbe dire che incominciava da questa memoria di Peano la discussione critica sul concetto di dimensione, discussione dalla quale sono nate tante ricerche di topologia, come anche le moderne invenzioni degli oggetti frattali.

Ad un livello più modesto, è stato osservato che le funzioni con le quali Peano rappresenta le coordinate del punto che percorre la curva passando per tutti i punti di un quadrato forniscono un esempio elementare e comodo di funzioni continue senza derivata per alcun valore della variabile indipendente.

## L'ASSIOMATICA GEOMETRICA DI GIUSEPPE PEANO

1 - Abbiamo già accennato al "Calcolo geometrico", e non ci dilunghiamo su questo tema, che è tanto interessante da giustificare la esistenza, in questo nostro Convegno, di una relazione appositamente dedicata ad esso.

Vorrei limitarmi ad osservare qui che in questo libro (di mole relativamente piccola, ma denso di idee) mi pare di poter vedere il germe di vari problemi dei quali Peano si occupò nel seguito e quasi sino alla fine della sua vita.

Tra questi problemi vorrei ricordare anzitutto quello, di cui ho detto, della creazione di un sistema di simboli atti a rappresentare in modo, per così dire, "diretto ed immediato", gli enti della Geometria e le loro relazioni; ed un secondo, ovviamente collegato col primo, di creare una sintassi di questi simboli, un'Algebra della logica, sulla scorta dei lavori di George Boole, in modo tale che la risoluzione dei problemi geometrici prendesse gli stessi caratteri di quella dei problemi algebrici: cioè si riducesse alla applicazione rigorosa delle regole di sintassi dei simboli scelti.

È noto che l'interesse di Peano per la Geometria non si limitò alla costruzione del calcolo geometrico. Vorrei soffermarmi qui ad analizzare gli atteggiamenti e le idee su cui Peano costruì la sua assiomatizzazione della Geometria e dei suoi fondamenti; idee che sono coerenti con tutta la sua concezione della Matematica e con il suo modo di vedere non soltanto questa scienza, ma tutto l'atteggiamento scientifico, quando voglia essere rigoroso.

Mi soffermerò in particolare su due lavori: uno è "I principi di Geometria logicamente esposti" [Torino, 1891], il secondo è "Sui fondamenti della Geometria" [Rivista di Matematica Vol. IV, 1894].

Non presenterò i singoli assiomi enunciati da Peano, e non analizzerò minutamente la costruzione teorica da lui messa in piedi; questi assiomi saranno oggetto di un'altra relazione di questo Convegno. Io vorrei limitarmi a cercare di intravvedere i caratteri del pensiero di Peano, caratteri che egli dimostrò in tutto il suo lavoro scientifico.

2 - Volendo cercare di caratterizzare, anche in modo sommario e superficiale, le linee fondamentali del lavoro scientifico di Peano si potrebbe dire che la sua fu una ricerca costante della semplicità, della concretezza ed ovviamente del rigore.

Per quanto riguarda il rigore, si potrebbe dire che esso fu l'oggetto della sua opera fin dal suo affacciarsi alla scena della scienza internazionale. E questa sua ricerca del rigore diede luogo ai noti episodi riguardanti i rapporti con il suo maestro Angelo Genocchi, e sui quali non ritornerò. Ma interessante, per dipingere il carattere di Peano, è la sua definizione di rigore: esso consiste nel dire soltanto delle cose vere.

Ritengo di dover sottolineare quell'avverbio "soltanto", che si ricollega da una parte all'altro carattere del suo pensiero, e cioè alla ricerca della semplicità e da un'altra parte si ricollega anche alla sua opera didattica, che mira a presentare i concetti matematici secondo la linea più diretta e più semplice.

Questa osservazione dovrebbe forse essere tenuta presente da coloro che scrivono oggi libri di testo e stendono i programmi di insegnamento. Ma non intendo iniziare qui un discorso che mi condurrebbe, temo, molto lontano e con scarsi risultati. La costante ricerca della concretezza da parte di Peano mi pare testimoniata anche dai numerosi lavori, suoi e di allievi, relativi al calcolo numerico. Mi sembra infatti che ciò denoti una preoccupazione costante di mettere in luce il significato concreto di ciò che si dice; ricerca che conduce ai numeri come agli strumenti di applicazione dei risultati della elaborazione teorica, alla realtà concreta, che si tocca, si osserva e si misura. Forse questo carattere della personalità di Peano e della sua opera ha fondato la posizione da lui presa nei riguardi dell'opera di Giuseppe Veronese. Questa posizione condusse Peano a pronunciare una condanna definitiva, pesante e senza appello (ed espressa con parole abbastanza dure) nei riguardi dell'opera di Veronese. A questo proposito si potrebbe osservare che l'opera di questo matematico è scritta in uno stile astratto e difficile, e coinvolge tutta una quantità di enti e di nozioni che hanno poco a che vedere con argomenti matematici.

È noto che la polemica tra Peano e Veronese ebbe per oggetto la costruzione del concetto di iperspazio e soprattutto la costruzione di una retta non-archimedea; è pure noto che la costruzione che Veronese fa di grandezze non-archimedee è stata giustificata da Tullio Levi Civita, con la costruzione di un sistema di concetti e di simboli (che egli chiamò "numeri monosemi"). Forse la disputa tra i due è nata da una certa concezione del continuo geometrico; ritornerò nel seguito su questi argomenti; qui ritorniamo all'analisi degli atteggiamenti di Peano nei riguardi della Geometria.

3 - Ho detto che non esporrò l'assiomatica di Peano, ma che cercherò, come sono capace, di cercare i fondamenti di essa nelle qualità della mentalità peaniana.

Una prima osservazione che si potrebbe fare riguarda le notazioni inventate da Peano; ho già parlato ripetutamente della importanza che attribuisco alla simbolizzazione dei concetti matematici; per questo ritengo che il sistema di notazioni che Peano ha inventato per la Geometria sia pure una manifestazione della sua mentalità: infatti nelle due opere che ho citato egli mira, come al solito, alla massima semplicità ed alla essenzialità. Infatti, una volta che siano note le poche notazioni di logica che egli adotta, il resto viene presentato con formule prive di parentesi.

A questo proposito vorrei ripetere le considerazioni già esposte in relazio-

**recepite tradizionalmente. Un altro esempio si può leggere a proposito del trattato di Legendre (di cui ho già detto); si trova nella Nota dal titolo "Sui fondamenti dell'analisi", pubblicata nel 1910 nel Bollettino della Mathesis.**

**"...laureati, e liberi di studiare ciò che si vuole, e dovendo insegnare agli altri, ci accorgiamo di avere sui fondamenti della matematica, idee confuse. Quindi si cercano con avidità i libri che trattano di questi soggetti. Ogni anno se ne pubblicano dei nuovi, che gettano nuova luce sulle questioni controverse, ma anche nuova oscurità in quelle ritenute chiarissime. Valga un esempio.**

Legendre introdusse quale definizione della retta, in sostituzione della euclidea, ritenuta poco chiara, la ben nota: "La retta è il più breve cammino tra due punti". Questa definizione appariva chiarissima ai tempi di Legendre, e parrà tale agli allievi che incominciano lo studio della Geometria. Invece è cosa nota a tutti che l'idea di "cammino", o "lunghezza" d'una linea, che compare nella definizione di retta, è molto più complicata dell'idea che si definisce; e i trattati di calcolo non sono ancora concordi nella definizione della lunghezza di linea e nella teoria relativa. Quindi la definizione di Legendre, che esprime un'idea semplice mediante una più complicata si deve rifiutare; e così è fatto nei moderni trattati".

5 - Per quanto riguarda gli elementi iniziali della trattazione geometrica, si potrebbe rilevare una certa differenza tra i "Principi" e i "Fondamenti". Infatti nei "Principi" si incontra come primo postulato l'affermazione: "La classe «punto» non è nulla", ovvero "esistono dei punti".

Si potrebbe qui osservare che, nel momento in cui si costruisce una definizione implicita di certi enti, potrebbe accadere, in linea di principio, che il sistema di assiomi che si enunciano sia incompatibile, e quindi che sia vuoto l'insieme degli enti che lo realizzano; in altre parole che non esista un modello del sistema. In queste condizioni pare chiaro che la pura e semplice affermazione che esistono gli enti di cui si parla appare quanto meno di scarso valore. Del resto si direbbe che lo stesso Peano si sia reso conto di questo neo nella sua trattazione, perché nei commenti che egli scrive ai suoi assiomi si legge:

"Di questo assioma non avremo mai occasione di fare uso, e si potrebbe sopprimere".

La posizione dell'autore è lievemente cambiata nei "Fondamenti"; ivi l'assioma di esistenza è ripetuta tale quale, ma il suo commento è cambiato; infatti ivi si legge:

"Si può segnare un punto".

Questo commento si collega con ciò che si può leggere nelle pagine precedenti:

"Un trattato di Geometria – scrive Peano – potrebbe cominciare con parole come le seguenti:

"Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una pallina o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno,... con un segno fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica che un punto c giace tra a e b, quando una persona, posta in a, vede che l'oggetto c copre b. Dai disegnatori, fabbri, per riconoscere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto "rigo"; alcuna volta si usa una corda ben tesa..."

In queste righe si può riconoscere l'inesorabile richiamo alla concretezza ed all'esperienza materiale che ispira tutta l'opera di Peano, e che gli detta il cammino da lui percorso per costruire razionalmente la Geometria. Il che del resto è confermato dalle parole che egli scrive nei "Fondamenti":

"E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche".

Vorremmo tuttavia osservare che forse nella frase "Si può segnare un punto" di Peano c'è una eco della parola con cui Euclide indica il punto; sappiamo che tale parola è "semeion", che in italiano potrebbe essere tradotto con "segno".

Forse, se si facesse così, verrebbero evitate tutte le frasi che si possono leggere in certa trattatistica, nelle quali si invita il Lettore ad immaginare un corpicciolo piccolissimo, sempre più piccolo, per costruirsi l'immagine del punto; ma crediamo che il riferimento a corpi materiali (granellini di sabbia, piccole macchie d'inchiostro e simili) sia un poco fuorviante, perché il corpo materiale quasi spontaneamente è immaginato divisibile. Invece pare a noi che si possa dire che l'atto di identificare una posizione nei riguardi degli oggetti dell'ambiente conduca quasi spontaneamente a considerare e ad immaginare tale identificazione come indecomponibile ed irriducibile ad altri elementi. Non intendiamo proseguire in questa direzione, che tuttavia potrebbe anche condurre a certe posizioni di didattica, utili per semplificare certe esposizioni didattiche che sono forse troppo complicate, o poco rigorose, oppure addirittura hanno entrambe le qualità insieme.

Ma non intendiamo parlare ancora delle opere di didattica, opere che, come dice Peano ["Sui fondamenti dell'analisi"] "...ancora infestano le scuole"; infatti si può osservare che neppure lui ha avuto successo nel lavoro di disinfestazione, che noi lasciamo malinconicamente da parte qui.

6 - Non è possibile in questa sede rilevare tutta la originalità del lavoro di Peano a proposito della Geometria; dobbiamo quindi limitarci a ricordare qui un altro momento in cui la sua ricerca del rigore e della semplicità si manifesta in pieno. Intendiamo parlare delle proposizioni di Geometria elementare che richiedono l'enunciazione di postulati di esistenza. Nella trattatistica abituale, che voglia essere rigorosa, si suole enunciare un postulato di continuità con vari atteggiamenti; infatti i trattatisti scelgono l'enunciato di Wilhelm Richard Dedekind oppure quello di Georg Cantor a seconda dei gusti e delle premesse. Non sono a conoscenza di trattati di Geometria per le scuole medie che assumano l'atteggiamento adottato da David Hilbert nei suoi "Grundlagen der Geometrie".

La procedura seguita da Peano lo conduce anzitutto a definire il concetto di figura convessa ed a sviluppare le sue proprietà. Una volta in possesso di queste proposizioni, Peano enuncia il seguente Postulato [Principi - Assioma XVII]:

"Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente ad h, il secondo no, allora si può determinare un punto x, appartenente al segmento ab o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in h, e il segmento xb sia tutto fuori di h".

Ed a questo postulato aggiunge il commento:

"Questo assioma, che esprime la proprietà che suolsi chiamare la continuità della retta, è necessario in molte questioni".

Ed appoggiandosi su questo assioma egli dimostra le proprietà della relazione di parallelismo tra rette. Dove, si noti, la relazione di parallelismo è quella valida in "Pangeometria", come egli dice, cioè è stata definita senza far ricorso al postulato V di Euclide.

È appena necessario osservare che in questo modo Peano, come in altri moltissimi casi, segue la strada più semplice e sicura per giungere ai risultati che ha in mente.

7 - Vorrei chiudere queste brevi considerazioni ricordando l'assiomatica che Peano ha enunciato a proposito dei vettori. Egli si occupò di questa teoria nel lavoro intitolato "Analisi della teoria dei vettori" pubblicato negli "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino [Vol. XXXIII, 1897-97]. Da questo lavoro egli trasse un'altra impostazione della Geometria elementare, che

egli espose nella Nota intitolata "La Geometria basata sulle idee di punto e distanza" [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino - Vol. XXXVIII, 1902-03].

Questi lavori fanno parte di un insieme di teorie che Peano ha sviluppato non soltanto in relazione ai problemi dei fondamenti della Geometria, ma anche in relazione a Problemi di Meccanica razionale. Delle notazioni da lui create Peano si servì anche nella polemica che ebbe a proposito della questione del moto dei poli. Ma, ancora una volta, forse la scarsa fortuna delle sue notazioni in questo campo determinò anche la dimenticanza che colpì le sue idee e le sue argomentazioni.