« La scuola di Platone, e poi di Eudosso , dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella soluzione dei problemi geometrici. In questa "analisi" si comincia a supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema R che si sappia risolvere. La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurre via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel processo moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di soluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di " geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre a una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc. » (1)

(1) $A, B, C, \ldots, E, \ldots \in \Gamma$

(2) $(AB)C = A(BC) \;;\; AE = EA = A \;;\; AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

(3) $x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots u, v, w \ldots \in U.$

(4) $$x' = xA$$

(5) $$x = xE.$$

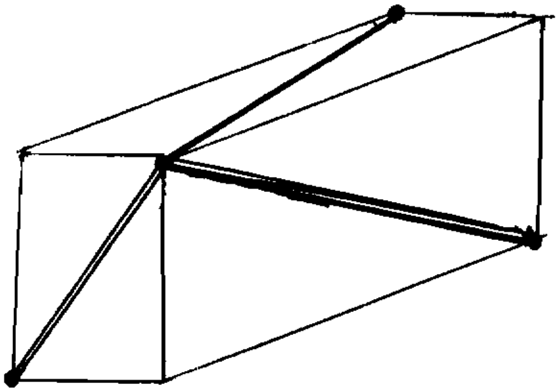
(6) $$(xA)B = x(AB).$$

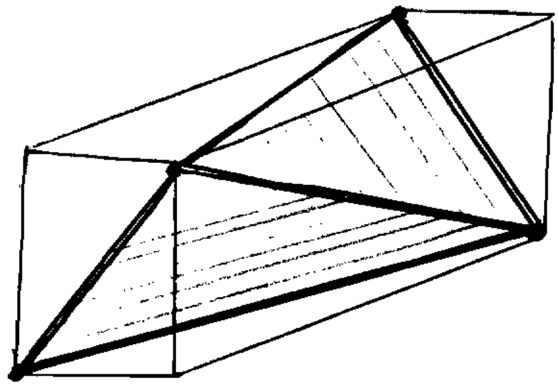
(7) $$x \equiv y \quad \longleftrightarrow \quad y = xA.$$

(8) $$x \equiv x \quad \longleftrightarrow \quad x = xE.$$

(9) $$x \equiv y \longleftrightarrow y \equiv x. \quad \longleftrightarrow \quad . \; y = xA \longleftrightarrow yA^{-1} = x$$

(10) $$x \equiv y \;\&\; y \equiv z \longrightarrow x \equiv z \quad \longleftrightarrow \quad y = xA \;\&\; z = y\,B \longrightarrow z = xAB.$$





(1) $A \equiv (u,v,w)$; $B \equiv (u,-v,-w)$; $C \equiv (-u,v,-w)$; $D \equiv (-u,-v,w)$.

Con queste scelte gli spigoli del tetraedro vengono ad avere avere le misure:

(2) $$AB^2 = CD^2 = 4(v^2+w^2) \quad ; \quad AC^2 = BD^2 = 4(u^2+w^2) \quad ;$$
$$AD^2 = BC^2 = 4(u^2+v^2)$$

(3) $$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad R = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad .$$

(4) $$P^2 = Q^2 = R^2 = I$$
$$P \cdot Q = Q \cdot P = R \quad ; \quad Q \cdot R = R \cdot Q = P \quad ; \quad R \cdot P = P \cdot R = Q.$$

(5) $P = (ab)(cd)$; $Q = (ac)(bd)$; $R = (ad)(bc)$.

(6) $$u = v = w = 1.$$

(7) $$T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(8) $$T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

(9) $$T^3 = I.$$

(10) $$T = (bcd).$$

(11) $$U = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(12) $$U^2 = I.$$

FORMULA DI ERONE E GENERALIZZAZIONI.

Indicate con a, b, c le lunghezze dei lati, e posto:

$$2p = a + b + c \tag{1}$$

si ha la classica formula:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c). \tag{2}$$

Eseguendo i calcoli in altro modo si ha:

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4), \tag{3}$$

VOLUME DEL TETRAEDRO IN FUNZIONE DEGLI SPIGOLI

Indicati con A_i (i=1, 2, 3, 4) i vertici del tetraedro, e indicando con a_{ij} la lunghezza dello spigolo A_iA_j, cioè ponendo:

$$a_{ij} = A_iA_j, \tag{4}$$

e ponendo inoltre:

$$X_{ij,pq} = a_{ij}^2 \cdot a_{pq}^2 \cdot \{a_{ip}^2+a_{iq}^2+a_{jp}^2+a_{jq}^2 - a_{ij}^2 - a_{pq}^2\}, \tag{5}$$

$$Y_i = a_{jp}^2 \cdot a_{pq}^2 \cdot a_{qj}^2, \tag{6}$$

la formula di Eulero è:

$$114 \cdot V^2 = X_{12,34} + X_{13,24} + X_{14,23} - \{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4\}. \tag{7}$$

Con altre procedure, siano a, b, c tre vettori non complanari che danno gli spigoli di un tetraedro passanti per un medesimo vertice. Indichiamo con u, v, w rispettivamente gli altri tre spigoli del tetraedro, tra loro complanari; precisamente chiamiamo u lo spigolo sghembo con a, chiamiamo v lo spigolo sghembo con b e chiamiamo w lo spigolo sghembo con c.

Indicato con V il volume del tetraedro, si ha

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-w^2 & a^2+c^2-v^2 \\ a^2+b^2-w^2 & 2b^2 & b^2+c^2-u^2 \\ c^2+a^2-v^2 & c^2+b^2-u^2 & 2c^2 \end{vmatrix} . \tag{8}$$

NOTA. Il problema di determinare il volume del tetraedro quando siano date le lunghezze degli spigoli è stato trattato da Niccolò Tartaglia in "General trattato di numeri et misure". Vinegia 1560, Parte IV, p. 35.
e risolto da Eulero [Novi Commentari Acad. Petrop. , 4, 1752-53 (ed. 1758) p. 158-160].

Un caso particolare della formula (4) si ha per il tetraedro isoscele o (equifacciale). Infatti questo è determinato soltanto dalle tre lunghezze: a, b, c dei lati di una faccia, essendo questa uguale ad ogni altra.

In questo caso, posto:

$$Q^2 = (a^2+b^2-c^2)\cdot(b^2+c^2-a^2)\cdot(c^2+a^2-b^2) = \\ = a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2) - (a^6+b^6+c^6) - 2a^2b^2c^2, \tag{9}$$

si ha:

$$12^2V^2 = 2\cdot Q^2. \tag{10}$$

NOTA - Si osservi che l'espressione a secondo membro della (10) è certamente positiva: infatti ognuno dei fattori è positivo, in forza delle condizioni valide per i lati di un triangolo che sia faccia di un tetraedro isoscele.

SIMMETRIA. FUNZIONI SIMMETRICHE.

(1) $$x_1,\ x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n;$$

(2) $$a_o\cdot x^n + a_1\cdot x^{n-1} + a_2\cdot x^{n-2} +\ldots\ldots\ldots+ a_n = 0,$$

(3) $$1 \leq k \leq n$$

(4) $$(-1)^k\cdot a_k/a_o$$

(5) $$f = x + y + z.$$

$$F = f^3;$$

(6) $$F = x^3+y^3+z^3 + 3x^2(y+z) + 3y^2(z+x) + 3z^2(x+y) + 6xyz.$$

(7) $$x^3 + px + q = 0,$$

(8) $$\begin{aligned} &a + b + c = 0 \\ &ab + bc + ca = p \\ &abc = -q \end{aligned} \quad .$$

(9) $$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0;$$

(10) $$(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha^3 -1 = 0,$$

(11) $$\alpha = \tfrac{1}{2}(i\cdot 3^{1/2} -1),$$

$$i^2 + 1 = 0 ;$$

(12) $$\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(-i\cdot 3^{1/2}-1),$$

(13) $$\alpha^3 = 1 .$$

$$
\begin{aligned}
&a + b + c = 0 \\
(14) \qquad &a + \alpha b + \alpha^2 c = P \\
&a + \alpha^2 b + \alpha c = Q.
\end{aligned}
$$

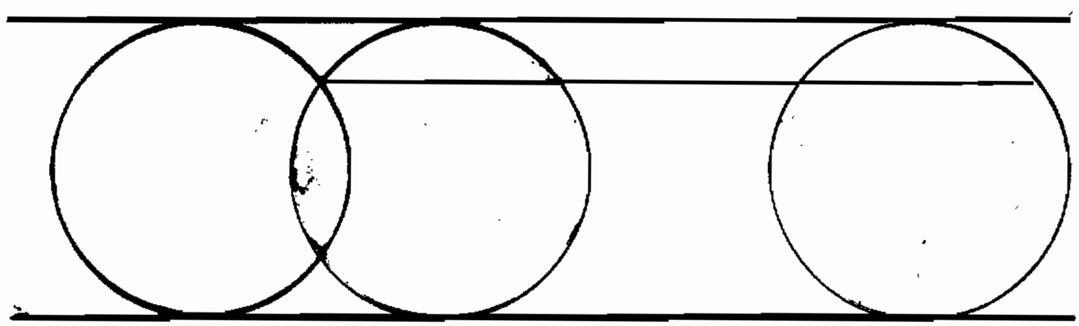
$$
\begin{aligned}
&a = (P+Q)/3 \\
(15) \qquad &b = (\alpha^2 \cdot P + \alpha \cdot Q)/3 \\
&c = (\alpha \cdot P + \alpha^2 \cdot Q)/3.
\end{aligned}
$$

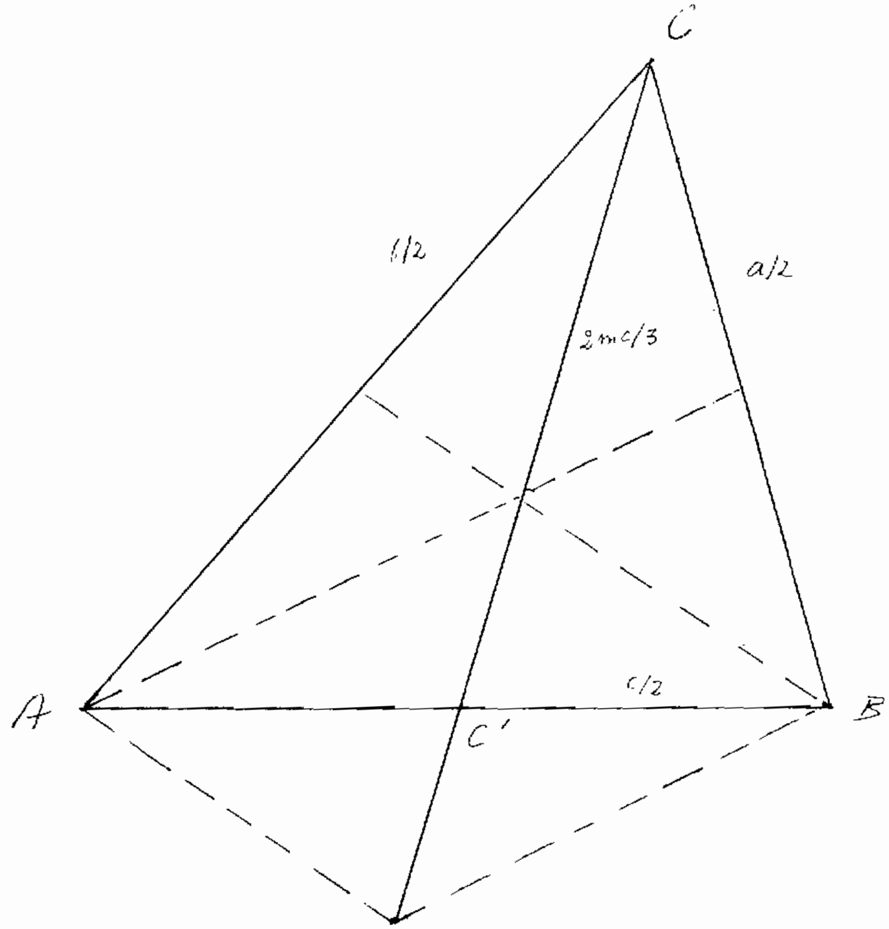
I) Lo scambio di a con b porta P in αQ e Q in $\alpha^2 P$;
II) Lo scambio di a con c porta P in $\alpha^2 Q$ e Q in αP.

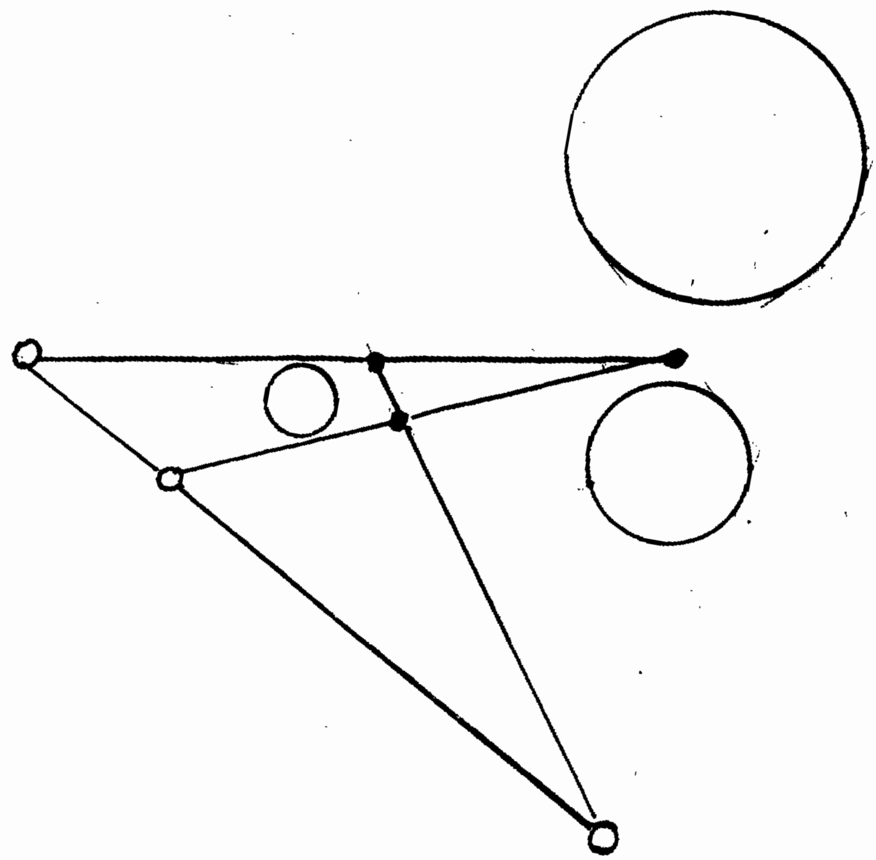
$$
\begin{aligned}
(16) \qquad &U = P^3 + Q^3 \\
&V = (U \cdot V)^3.
\end{aligned}
$$

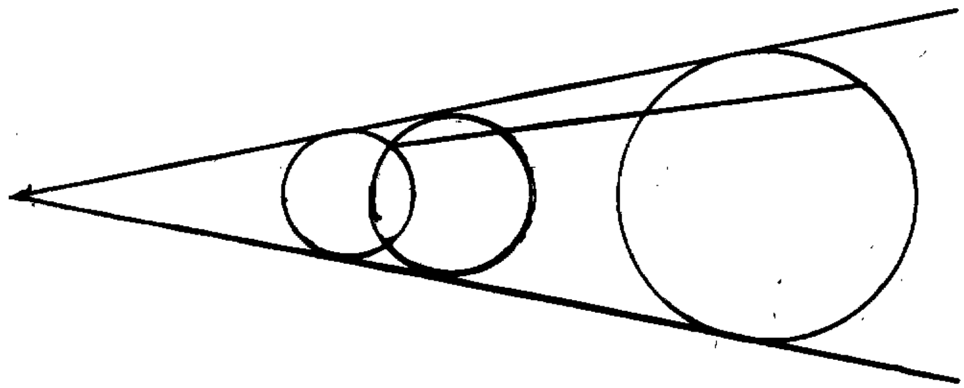
$$(17) \qquad U =-27q \quad ; \quad V = -27p^3.$$

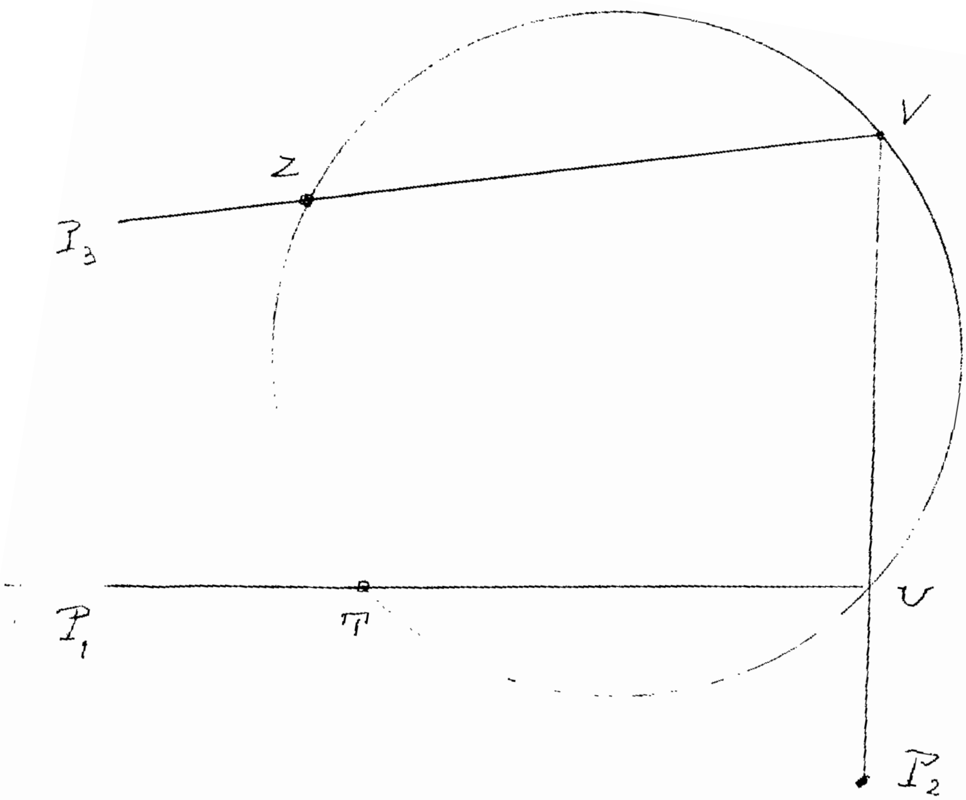
$$(18) \qquad z^2 + 27\, q\, z - 27\, p^3 = 0;$$




C
b/2
a/2
2mc/3
c/2
A
B
C'







Z
V
P_3
P_1
T
U
P_2

(1) $y = x^2$; $x = t$, $y = t^2$;

(2) $mx + y + q = 0$

(3) $t^2 + mt + q = 0$

(4) $t_1+t_2 = -m$; $t_1 \cdot t_2 = q$.

(5) $P = (a,b)$;

(6) $t_1 \cdot t_2 - a(t_1+t_2) + b = 0$.

(7) $t = z_1/z_0$;

(8) $z = [z_1, z_0]$;

(9) $z' = z \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ -b & -a \end{vmatrix}$.

(10) $P_i=(a_i,b_i)$; $M_i = \begin{vmatrix} a_i & 1 \\ -b_i & -a_i \end{vmatrix}$, $i = 1, 2, 3$.

(11) $M = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$

(12) $X^2 + Y^2 = 1$.

(13) $X^2 - (1-Y)(1+Y) = 0$

(14) $x= X/(1+Y)$; $Y = (1-Y)/(1+Y)$

(15) $X = 2x/(1+y)$; $Y = (1-y)/(1+y)$.