

Matematica e incertezza

di Carlo Felice Manara

Carlo Felice Manara,
Professore Emerito di Geometria,
Università degli Studi di Milano

Anche in situazioni di informazione iniziale insufficiente, è possibile ricorrere alla matematica per dedurre con rigore alcune conseguenze certe. È il caso della teoria delle probabilità, che nel Novecento ha visto affermarsi un nuovo approccio in grado di superare delle difficoltà logiche ed epistemologiche dell'impostazione classica. Sulla solida base del principio di coerenza, che dichiara l'impossibilità di render certo ciò che in partenza non lo è, vanificando radicalmente ogni pretesa di imbrigliare il caso

Si sente spesso parlare di "matematica dell'incerto"; l'espressione è entrata addirittura nelle bozze di programmi di matematica di uno dei numerosi progetti di riforma della nostra scuola.

A prima vista, i termini *matematica ed incertezza* non sembrano stare insieme molto bene. E ciò forse perché un'immagine diffusa della matematica presenta questa scienza come l'ambito ed il luogo della più grande certezza che sia ottenibile dall'uomo; pertanto l'accoppiamento tra matematica ed incertezza appare stridente e paradossale o addirittura assurdo ed impossibile. È quindi utile qualche riflessione, perché l'apparenza paradossale svanisca e si possa chiarire il significato e la portata dei termini.

Tuttavia si potrebbe osservare, in linea preliminare, che il termine *certezza* ha un significato prevalentemente psicologico e soggettivo, perché può essere assunto come indicativo di uno stato d'animo, che difficilmente può essere precisato oggettivamente in modo soddisfacente: ci può essere infatti il nevrotico che non è certo neppure dei risultati dei calcoli aritmetici più elementari o, al contrario, l'ottimista beota che è certo di cavarsela anche nel comportamento più insensato ed imprudente.

Informazione e incertezza

Per approfondire il discorso si potrebbe dire in primo luogo che la matematica non "fabbrica", per così dire, una certezza

oggettiva in ogni caso, ma che garantisce, quando può, il rigore dei ragionamenti e delle deduzioni e quindi la certezza che ne consegue.

Pertanto si può pensare che, in cerca di chiarimento su questi argomenti, sia preferibile un riferimento all'informazione che si possiede prima della deduzione, piuttosto che allo stato psicologico di certezza o di incertezza. Infatti la matematica ha dato una definizione rigorosa di un aspetto del concetto di *informazione*, e a questo si potrebbe far riferimento.

Ciò appare ragionevole quando si osservi che la certezza sulla soluzione di un problema matematico si consegue quando si posseggano dei dati che permettano una deduzione ineccepibile; cose analoghe si potrebbero dire delle leggi fisiche che consentano previsioni certe (in alcuni ambiti): si pensi per esempio alle leggi dell'astronomia classica, che permettono di prevedere con certezza l'istante di fenomeni celesti, come le eclissi; fenomeni che un tempo suscitavano lo spavento e la paura, anche proprio in forza di una certa loro imprevedibilità. Invece è noto che non possediamo ancora delle leggi dei fenomeni atmosferici che ispirino una certezza paragonabile a quella delle leggi dell'astronomia classica; di conseguenza tali fenomeni ispirano spesso incertezza nelle previsioni; analoghe considerazioni si potrebbero svolgere a proposito delle leggi dell'economia e di tante altre scienze. Come abbiamo già osservato, in questi casi

non si può pretendere che la matematica crei una certezza che di fatto è impedita dalla incompletezza dell'informazione; incompletezza che può riguardare tanto i dati quanto le leggi dei fenomeni considerati. Pertanto è lecito pensare che l'incertezza riguardante questi ed altri fenomeni sia soltanto l'effetto psicologico dell'informazione insufficiente; e per questa ragione pensiamo che sia preferibile parlare di "matematica in condizioni di informazione insufficiente o incompleta" piuttosto che di matematica dell'incerto.

Non intendiamo proseguire qui una discussione che può essere giustamente giudicata come oziosa e superflua. Osserviamo invece che, anche in situazioni casistiche (cioè di informazione insufficiente), è possibile utilizzare lo strumento matematico, per dedurre con rigore le sole conseguenze certe che si possono trarre dalle scarse informazioni di partenza. Questo atteggiamento ha condotto ad impostare il problema matematico di definire il concetto di probabilità e di costruire una teoria matematica (il calcolo delle probabilità, appunto) che permettesse di dominare ciò che comunemente si suol chiamare il caso o la sorte.

Abitualmente si fa risalire la prima fondazione del calcolo delle probabilità al secolo XVII, con riferimento all'opera di due grandi matematici francesi del secolo XVII: Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). Andrebbero tuttavia ricordati

gli importanti ed originali contributi dell'olandese Christiaan Huygens (1629-1695).

Noi ed il "caso"

Non intendiamo prendere qui posizione sulla discussione, che ha radici lontanissime, che riguarda il caso; riguarda cioè avvenimenti che non possiamo prevedere con i nostri strumenti intellettuali e razionali. Si potrebbe infatti dire che da quando l'uomo ha cercato di conoscere le cose che gli interessavano o lo toccavano da vicino, si è trovato di fronte all'imprevisto, all'oscurità intellettuale.

Spesso ha personalizzato nella fortuna o in esseri potentissimi, che agiscono per motivi a noi ignoti, l'ignoranza delle ragioni degli avvenimenti e l'impossibilità di dominarli pienamente.

Già nella Bibbia [Ps. XXI, 19 & Mth. XXVII, 35] si trova l'accento alla distribuzione per sorteggio, nel versetto citato dall'Evangelista "Super vestem meam miserunt sortem". Negli autori latini poi è frequentissimo il richiamo a quello che noi chiamiamo il gioco d'azzardo. E ricordiamo Dante e il suo celebre *incipit* del canto VI del Purgatorio: "Quando si parte il gioco della zara...".

Si potrebbe dire che il gioco d'azzardo, la scommessa, è un'attività tipicamente umana, con la quale l'uomo intende guadagnare senza prestare servizi o scambiare dei beni, ma soltanto rischiando certi beni posseduti (generalmente delle somme di denaro) secondo determinate regole, e mettendo in essere certe manipolazioni di sistemi materiali il cui comportamento non è completamente dominato da noi.

Conveniamo di chiamare, secondo l'abitudine diffusa, "evento aleatorio" un evento sul quale non possediamo informazioni sufficienti, bastanti per fondare una certezza; esempi tipici di eventi aleatori sono i risultati di manipolazioni su certi sistemi materiali più frequentemente considerati. Queste manipolazioni, ed altre poche analoghe che si possono inventare sono, per esempio, il lancio di una o più monete o di dadi, l'estrazione da urne di palline (ovviamente indistinguibili al tatto), l'estrazione di carte da gioco da mazzi accuratamente mescolati e pochi altri

esperimenti. Queste manipolazioni su sistemi materiali servono spesso anche a schematizzare situazioni teoriche e fondano ed ispirano certe modellizzazioni le quali, a loro volta, hanno costituito lo sfondo su cui è stata costruita la cosiddetta teoria frequentista del concetto di probabilità.

Laplace e l'impostazione frequentistica

Ricordiamo qui la più classica elaborazione teorica del concetto di probabilità, fondata sulle manipolazioni e sulle schematizzazioni di cui abbiamo detto; tale elaborazione ha dato origine a quella che si suol chiamare teoria oggettiva del concetto di probabilità, ed è dovuta al celebre matematico e fisico francese Laplace (Pierre-Simon marquis de Laplace, 1749-1827); essa è stata da lui presentata in un'opera classica dal titolo *Essai philosophique sur les probabilités*, apparsa nel 1819. Ivi si incontra la nota frase che viene ancora oggi ripetuta e giudicata da molti come definizione rigorosa del concetto di probabilità di un evento aleatorio: secondo questa frase la probabilità di un tale evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento stesso ed il numero di quelli possibili; ma nell'impostare questa definizione il matematico francese avverte esplicitamente che tutti i casi possibili debbono essere "ugualmente possibili". È facile osservare che tale clausola è essenziale per la validità e la coerenza logica del discorso e gli esempi critici in contrario lo provano; classico è l'esempio seguente: si immagina il lancio di una moneta di forma regolare; si prenda nota della faccia che essa mostra cadendo sul pavimento e si consideri come evento aleatorio il fatto che compaia una delle due facce (testa o croce, secondo le espressioni classiche); in questo caso non si incontrano gravi difficoltà ad ammettere che i due casi possibili sono "ugualmente possibili". Ma complichiamo di pochissimo le operazioni e immaginiamo il lancio contemporaneo di due monete uguali: qui una considerazione superficiale potrebbe portare a concludere che i casi sono tre: due teste, due croci, una testa ed una croce. Ma una facile analisi ulteriore accerta che i casi considerati non sono tutti ugualmente possibili secondo la definizione corrente, e

precisamente che il terzo caso ha una possibilità doppia rispetto agli altri due. Pare chiaro che la verifica del sussistere della condizione fondamentale di uguale possibilità non è rigorosamente precisabile in generale; ciò costituisce una delle difficoltà epistemologiche che si incontrano quando si voglia applicare la teoria alla realtà della scienza o della tecnica.

Rimandiamo al seguito ulteriori discussioni problemi di principio e ricordiamo che, sempre nell'impostazione che stiamo presentando, si dimostrano due fondamentali teoremi, che vengono richiamati con le espressioni classiche: "Teorema delle probabilità totali" e "Teorema delle probabilità composte"; essi sono i punti di partenza per molte delle applicazioni della teoria.

La legge dei grandi numeri e "la rovina del giocatore"

Abbiamo già accennato ai problemi pratici che si aggregano attorno al calcolo delle probabilità: problemi che, in sostanza, nascono dall'utopistico desiderio di raggiungere la certezza in situazioni in cui è chiaramente impossibile; oppure, molto più ragionevolmente, dal desiderio di progettare un comportamento che realizzi il massimo di razionalità in condizioni di informazioni insufficienti; tali cioè da impedire la certezza. In una situazione cosiffatta appare quindi naturale che si sia cercato di schematizzare certe situazioni astratte, che potessero servire da riferimento per le applicazioni pratiche al calcolo. Una delle situazioni più classiche, e in certo modo più semplici e quindi più frequentemente utilizzate è quella escogitata e teorizzata da Jacob Bernoulli (1654-1705): situazione che viene talvolta richiamata con l'espressione "schema delle prove ripetute" anche "schema di Bernoulli". In forma sommaria si potrebbe descrivere questo schema teorico dicendo che si immagina di ripetere molte volte un esperimento, o la manipolazione di un sistema materiale, che può portare all'avverarsi di un determinato evento aleatorio, in modo tale che la probabilità di tale evento non vari da prova a prova.

Si pensi, per esempio al lancio ripetuto di una moneta; oppure ad una serie di estrazioni di gettoni o palline di un'urna, contenente numerose palline di due colori diversi in proporzione nota, rimettendo nell'urna, dopo ogni estrazione, la pallina estratta.

Ovviamente si immagina di poter ripetere indefinitamente, a volontà, un numero qualunque N di volte, l'esperimento o la manipolazione, e di poter osservare ed annotare il numero n di volte in cui l'evento aleatorio si è verificato; e quindi si immagina di poter calcolare il rapporto $f = n/N$, tra il numero dei successi ed il numero di esperimenti eseguiti; tale rapporto viene spesso chiamato "frequenza empirica" dei successi.

Con riferimento ad esperimenti di questo tipo si accetta che si avveri nella realtà ciò che viene espresso dalla proposizione seguente, che chiameremo "Legge empirica dei grandi numeri": eseguendo un grande numero di esperimenti o di manipolazioni, nelle condizioni dello schema di Bernoulli, quasi sempre la frequenza empirica dei successi è molto vicina alla probabilità teorica, calcolata a priori in base all'enunciato di Laplace. Così, per esempio, lanciando molte volte una moneta di forma regolare, quasi sempre circa la metà di lanci dà luogo all'evento "testa".

Prima di analizzare il significato epistemologico di questa proposizione, ricordiamo che essa viene spesso richiamata con espressioni diverse da quella usata qui: è stata chiamata per esempio "Legge del caso" o anche "Postulato empirico del caso", con un'espressione che può essere giudicata contraddittoria da chi osservi che l'aggettivo empirico mal si accorda con il sostantivo postulato, almeno secondo l'impiego abituale che di questo termine si fa in matematica.

Indipendentemente dal nome che si intenda dare a questa proposizione, si osserva subito che essa contiene delle espressioni che appaiono a prima vista molto chiare, ma che non resisterebbero alla analisi approfondita, alla quale la matematica recente ci ha abituati. Si tratta anzitutto dell'espressione "grandi numeri", la quale non ha cittadinanza in matematica, che non conosce numeri "grandi" o "piccoli"; e poi le espressioni "quasi sempre" e "molto vicina"

cadono pure sotto una critica analoga. Tuttavia espressioni cosiffatte hanno un'indubbia presa sulla psicologia dell'ascoltatore o del lettore: ciò significa, a nostro parere, che esse non possono dirsi totalmente prive di significato, ma che questo deve essere precisato caso per caso, in relazione ai singoli problemi considerati; e che le deduzioni ottenute debbono essere attentamente valutate in relazione alla realtà che si osserva o agli esperimenti che si conducono. Per fare un esempio banale, appare chiaro che un miliardo può essere considerato un numero "grande" se si vuole esprimere il numero degli abitanti di una regione o di una città; ma appare molto piccolo se si intende rappresentare il numero di molecole di acqua contenute in una normale bottiglia da tavola. Analoghe osservazioni e analoghi esempi si possono addurre a proposito delle altre espressioni che abbiamo citato poco sopra. Comunque sia, occorre sempre tener presente che, nella impostazione che stiamo presentando, le deduzioni che si ottengono non hanno valore in relazione ad un singolo evento aleatorio, ma sempre soltanto rispetto ad una folla di eventi.

A proposito della legge empirica dei grandi numeri ricordiamo che Jakob Bernoulli ha dimostrato un celebre teorema, il quale afferma che, al crescere del numero N delle osservazioni, tende ad 1 la probabilità che la frequenza empirica tenda al valore teorico della probabilità, calcolato a priori, prima di ogni esperimento.

Il significato di questo teorema è stato spesso frainteso: infatti esso è stato interpretato come se fosse una dimostrazione della legge empirica dei grandi numeri. E ciò ha prodotto spesso dei risultati poco gradevoli e ha dato occasione anche a mistificazioni ed inganni. Uno dei casi più comuni di equivoci che si verificano a seguito delle confusioni riguardanti il teorema di Bernoulli e la legge dei grandi numeri è costituito dalle note "cacce ai numeri ritardati" del gioco del Lotto; oppure dai cosiddetti "metodi" per sbancare la roulette, pubblicizzati da pretesi conoscitori del caso: esistono addirittura delle pubblicazioni specializzate nel segnalare i numeri in ritardo delle estrazioni.

La situazione tipica di questo genere potrebbe essere descritta con l'esempio seguente.

Supponiamo che, giocando a testa e croce, una moneta abbia dato per 99 lanci successivi il risultato di "testa": si tratta di un caso rarissimo, ma non impossibile; inoltre i calcoli relativi allo schema delle prove ripetute permettono di determinare la probabilità di un simile evento, secondo lo schema e la mentalità laplaciana. Pertanto nella opinione comune è spontaneo il comportamento che induce a scommettere sull'uscita di "croce" al lancio successivo: infatti, se a quel lancio si mostrasse ancora "testa", si realizzerebbe una successione di cento "teste" successive; evento a cui i calcoli assegnano la probabilità $1/1024$.

L'equivoco comune conduce a scommettere forti somme su "croce", col pretesto che tale uscita realizzerebbe un evento molto raro. Ma queste argomentazioni non tengono conto del fatto che la serie di 99 "teste" non è più oggetto di scommessa, ma soltanto di cronaca, proprio perché è già avvenuta. Ciò che è oggetto di scommessa, o di contratto aleatorio, è soltanto l'esito del prossimo lancio, la cui probabilità è valutata, come sempre, $1/2$. La situazione viene spesso descritta in modo sintetico dicendo che la moneta non ha né memoria né coscienza...

Tutti sappiamo che argomentazioni come queste non convincono il giocatore incallito. Questi viene convinto meno ancora dal teorema che taluni richiamano come "teorema della rovina del giocatore": esso dimostra che la probabilità per un giocatore di resistere ad una "serie nera", cioè ad una successione di colpi avversi, dipende dal patrimonio del giocatore stesso; infatti la posta del gioco va pagata ovviamente prima che si verifichi l'evento aleatorio del gioco: ed il giocatore che ha asciugato le proprie tasche non può più tentare la sorte, cosa che invece potrebbe fare un giocatore più ricco di lui, che avesse incontrato una analoga "serie nera".

Ma Bernoulli non ha dimostrato la legge empirica: ha dimostrato soltanto che tende ad 1 la probabilità che essa sia rispettata. Sarebbe infatti ben poco verosimile che la matematica, con soli ragionamenti, potesse determinare il comportamento della realtà materiale. Tuttavia il teorema di Bernoulli

permette una enunciazione, per così dire, attenuata della legge dei grandi numeri: basterebbe infatti enunciare che: "Al tendere all'infinito del numero delle prove, quasi sempre si avvera un evento la cui probabilità valutata a priori è molto vicina ad 1".

L'impostazione soggettiva

Abbiamo ripetutamente messo in evidenza il fatto che il calcolo delle probabilità, nella sua impostazione classica, che potremmo chiamare laplaciana, non dice nulla per quanto riguarda il fenomeno singolo e governa soltanto le folle di fenomeni analoghi, attraverso la legge empirica dei grandi numeri.

Abbiamo anche avvertito che il legame tra la probabilità, intesa come concetto astratto, e la realtà fenomenica è dato esclusivamente dalla legge empirica: ed abbiamo rilevato quanto l'enunciato di tale legge si distingua dal paradigma classico della legge matematica dei fenomeni fisici. Ma l'impostazione laplaciana appare abbastanza debole dal punto di vista logico, in particolare per la difficoltà di dare dei criteri generali ed astratti per la verifica delle condizioni essenziali, qualificanti la pretesa definizione oggettiva del concetto di probabilità di un evento aleatorio.

In vista di queste difficoltà logiche ed epistemologiche, Bruno De Finetti (1906-1985) e Leonard J. Savage (1917-1971) hanno elaborato una teoria della probabilità che viene abitualmente richiamata con la qualifica di "teoria soggettiva", distinguendola così da quella classica della quale abbiamo richiamato il nome abituale di "teoria oggettiva".

Secondo questa impostazione, non si dovrebbe parlare di probabilità come di una proprietà oggettiva del singolo evento aleatorio; ma piuttosto di un giudizio che un determinato soggetto esprime nei riguardi dell'evento stesso, in dipendenza delle informazioni che egli possiede al riguardo e in relazione a un determinato contratto economico; questo viene chiamato aleatorio perché le sue clausole contemplano che il suo esito dipenda dal verificarsi o meno di un dato evento aleatorio. Il giudizio quindi può essere diverso da soggetto a soggetto ed anche

un singolo soggetto può cambiarlo, se cambiano le informazioni che egli possiede. Il giudizio di probabilità viene precisato con un numero, in generale minore di 1 e comunque, al limite, non superiore ad 1, il quale esprime il rapporto tra l'entità della somma di denaro che il soggetto accetta di rischiare (pagandola immediatamente) e quella che incasserà se si verifica l'evento aleatorio oggetto del contratto.

Il comportamento dei soggetti che emettono i giudizi di probabilità è retto da un *principio di coerenza*. Si potrebbe esporre, in modo sommario e rudimentale, il significato di questo dicendo che esso impone che nessuna combinazione di contratti, relativi ad un medesimo evento aleatorio, può condurre a risultati economici sicuri. Partendo da questo principio si possono recuperare con rigore, anche in questa impostazione, i teoremi classici che abbiamo richiamato con le espressioni abituali di "teorema delle probabilità totali" e "delle probabilità composte". Si ottiene così di poter dimostrare ogni teorema valido nell'impostazione classica; inoltre viene resa metodica la procedura che conduce a migliorare il comportamento razionale di un soggetto, attraverso il ricupero e l'utilizzazione al meglio delle informazioni che esso può procurarsi. Procedura che anche l'impostazione classica conosceva, come conseguenza del cosiddetto "Teorema di Bayes" (Thomas Bayes, 1702-1761).

In questo ordine di idee il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ad un evento ed il numero dei casi possibili (che, come abbiamo visto, fonda la definizione classica di probabilità) risulta essere uno (ma non l'unico) dei modi possibili per fornire ad un soggetto una guida nel comportamento razionale, in presenza di scelte economiche fatte in condizioni di informazione insufficiente.

Imbrigliare il caso, la sorte o "la fortuna"?

È lecito pensare che l'impostazione soggettiva del calcolo delle probabilità sia più aderente alle esigenze della moderna critica dei fondamenti della matematica; esigenze

secondo le quali i punti di partenza di una teoria matematica sono metodicamente stabiliti non mediante definizioni formali che procedono *per genus et differentiam*, secondo la logica classica tradizionale, ma sono precisati con quelle definizioni che vengono chiamate "implicite" o anche "definizioni d'uso".

Inoltre il principio di coerenza, di cui si è detto, enuncia esplicitamente l'impossibilità di render certo ciò che in partenza non lo è; e quindi vanifica radicalmente ogni sogno di chi pretendesse di imbrigliare il caso, con ragionamenti o con trucchi, "sistemi" e "metodi" più o meno ingegnosi, ingenuamente creduti scoperte mirabolanti, o furbescamente spacciati per tali. E questo principio, si è pure detto, permette di dimostrare rigorosamente tutti i risultati della teoria classica frequentista.

Pertanto, ancora una volta, non si può pretendere che il puro calcolo, o in generale la matematica, renda certo ciò che in partenza non è tale.

Ma resta pur vero che, quali che siano le basi teoriche che si adottano, la matematica offre alla scienza della Natura e dell'uomo le impostazioni concettuali e gli strumenti simbolici e formali per chiarire concetti e strutture logiche e dedurre con rigore. E quindi anche gli strumenti per il comportamento che realizza la massima razionalità possibile. ●

Bibliografia

Cramèr H., 1956, *The Elements of Probability Theory*, Stockholm, Alm Quist & Wiksell.

Daboni L., 1970, *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, Torino, Utet.

De Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità*, Torino, Einaudi.

Kolmogorov A.N., 1956, *Foundations of the Theory of Probability*, New York, Chelsea Publishing Comp.

Laplace P.S., 1951, *Saggio filosofico sulle probabilità*, Bari, Laterza.

Landau G. e Marasini D., 1986, *Uno sguardo alle principali concezioni probabilistiche*, Milano, Giuffrè.

von Mises R., 1964, *The Mathematical Theory of Probability and Statistics*, New York, Academic Press.