

FRANCESCO SPERANZA (\*)

**Riflessioni sui criteri per valutare le trattazioni  
di una teoria matematica (\*\*)**

Alla memoria di ANTONIO MAMBRIANI

**1 - Opportunità di una riflessione**

Intorno al 1970 Antonio Mambriani mi espresse (con discrezione, com'era sua abitudine) una sensazione di «divergenza» rispetto ai più giovani colleghi, sul modo di impostare i corsi di matematica. Noi giovani d'allora, di regola, avevamo studiato e cominciato a insegnare secondo un certo stile; avevamo poi incontrato la «rivoluzione bourbakista», e, quasi tutti, avevamo modificato in questo senso il nostro insegnamento. Dopo vent'anni, i giovani d'allora possono rivendicare una situazione di vantaggio sui giovani d'oggi: l'esperienza più vasta dà loro la possibilità d'un raffronto meditato.

Il «nuovo stile» tende a presentare gli argomenti a partire da pochi concetti generali, e quindi a far discendere molte parti della Matematica da un nucleo centrale. Desidero qui proporre alcune riflessioni su questo tipo di presentazione.

Lakatos [14]<sub>3</sub> ha analizzato «tre grandi tradizioni» riguardanti la valutazione delle teorie scientifiche: lo *scetticismo* (non è possibile dare criteri, anzi tutte le teorie sono egualmente valide); il *demarcazionismo* (si stabiliscono criteri per

---

(\*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, via D'Azeglio 85 A, I-43100, Parma.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività finanziate dal MURST (progetti 40% e 60%) e dal CNR (Com. Naz. Sc. Matematiche).

giudicare se una teoria è migliore d'un'altra); l'*elitismo* (il giudizio è riservato a un'élite di specialisti). Sostituiamo «trattazione» a «teoria», e ci troviamo nell'ambito del nostro problema.

Credo che si debba senz'altro superare lo scetticismo. L'*elitismo* sembra una posizione assai diffusa, e abbastanza rassicurante: ma quale sarà l'élite incaricata di dare i giudizi? Il modo di comporre i raggruppamenti disciplinari e le commissioni di concorso sono una risposta (implicita) per la valutazione delle teorie; per le trattazioni si potrebbe pensare che l'élite possa essere più vasta (comprendendo anche gli specialisti di discipline che utilizzano la trattazione?). Nel seguito cercherò di indicare alcune vie per arrivare a criteri di valutazione, che permettano a un profano competente (*an educated layman*) di dare un suo giudizio.

L'insegnamento della matematica a partire dagli anni sessanta si è modellato sull'impostazione prevalente nella matematica stessa nella seconda metà del secolo: questa può sembrare un'applicazione banale del principio secondo il quale ricerca e didattica nell'Università debbono essere collegate. Altro principio che oggi sembra ovvio è che la scienza di oggi sia superiore a quella del passato (c'è chi teorizza su una selezione naturale delle teorie scientifiche). Non è sempre stato così, anche in epoche «rivoluzionarie»: Copernico si richiamava ad Aristarco; Newton, uno dei fondatori dell'analisi, la usava nei suoi calcoli ma scriveva i *Principia* in stile euclideo. Curiosamente, per quanto concerne l'arte, il «sentire comune» in altre epoche ha invece ritenuto superiore l'arte contemporanea (tant'è che si sono abbattuti venerandi monumenti per ricostruirli nello «stile del tempo»); mentre ora viene sentita come superiore buona parte dell'arte del passato. L'applicazione congiunta dei due principi tende a promuovere trattazioni che potremmo dire «sincroniche», che riproducono lo stato attuale della disciplina, indipendentemente dal suo sviluppo.

Lo sviluppo può essere inteso in due sensi, storico ed epistemologico. Si pensi alla geometria, iniziata nelle civiltà pre-elleniche in uno stadio pratico e sperimentale; poi scienza deduttiva (ma ancora legata alla realtà concreta) presso i Greci, e sviluppatasi poi, attraverso una lunga fase critica, in scienza formale. Considerazioni in parte analoghe possiamo fare, per esempio, per la logica (dai primi passi in quanto «arte del pensare», alla logica formale aristotelica e stoica, alla logica medioevale, alla logica matematica), e per la fisica (dalla innovazione galileiana alla grande sintesi newtoniana, alla relatività e alla fisica quantistica). Possiamo parlare di «superprogrammi di ricerca», il cui sviluppo ha avuto conseguenze fondamentali sul modo di pensare, non soltanto in ambito scientifico. Si pensi per esempio alla distinzione fra coerenza logica e applicabilità fisica

di una teoria, cui siamo stati portati dall'accettazione della geometria non euclidea.

Altri programmi, a volte nell'ambito stesso di quelli citati, sono stati sviluppati con fini più precisi (anche se a volte non li hanno raggiunti), di solito in vista di una semplificazione della conoscenza, d'una riduzione a pochi principi base. Citiamo il filone meccanicista: per esempio, la riduzione delle «qualità secondarie» alle «qualità primarie» (intuita da Democrito, e ripresa da Galileo, da Descartes, ..., ma che ha trovato anche recentemente dei critici, per esempio Whitehead [23]); l'idea di ridurre la fisica alla meccanica; o quella ancor più ambiziosa di ridurre la biologia alla fisica (che si può ricollegare al prevalere degli orientamenti deterministici e causalistici su quelli finalistici).

In ambito matematico, citiamo il programma logicista di Frege e Russell, tendente alla riduzione della matematica alla logica, mentre quest'ultima dovrebbe essere fondata su assiomi evidenti. Tale progetto si può ritenere l'ultimo tentativo di ritornare all'ideale aristotelico di scienza: ma ha dovuto da un lato ammettere assiomi tutt'altro che evidenti, e dall'altro non è arrivato a comprendere la geometria (il quarto volume dei *Principia Mathematica* non è stato scritto).

Citiamo ancora la lettura bourbakista della matematica in termini di strutture; e, a sua volta, l'interpretazione di relazioni, operazioni, strutture in termini insiemistici (prodotti cartesiani, insieme delle parti, eccetera).

Citiamo ancora l'interpretazione della geometria attraverso l'algebra lineare, attraverso gli spazi vettoriali; e ancora l'interpretazione della probabilità nell'ambito della misura.

Come si vede, questi programmi si propongono (e a volte realizzano) la riduzione di una disciplina  $T$  a un'altra  $R$ : i concetti di  $T$  sono concetti di  $R$ , e, in quanto sistema formale,  $T$  non ha suoi propri termini primitivi; e fra i suoi assiomi figurano quelli di  $R$ .

## 2 - Il problema della trattatistica

La discussione che seguirà riguarderà i tipi di trattazione che hanno preso le mosse da programmi riduzionisti, e la loro influenza sull'insegnamento. Non intendo mettere in discussione l'opportunità di studiare la possibilità di mettere in atto una riduzione, anche se va rammentato che Popper [15]<sub>2</sub> mette in guardia contro gli eccessivi entusiasmi riduzionisti. Egli parla di scienze sperimentali, ma le sue considerazioni si applicano, a parer mio, anche alla matematica: una riduzione può apparire conveniente perché sembra far sparire alcuni problemi; bisogna stare attenti che la riduzione non sia solamente un espediente linguistico,

e che non porti ad un impoverimento di fatto della teoria ridotta, e quindi in definitiva della conoscenza.

Alcuni di questi programmi sono sorti contestualmente (o quasi) a un trattato: per il programma logicista, [10] e [17]; per quello strutturalista, [5]; per il caso geometria-algebra, [18] e [3]. A questo punto, entrano in gioco diversi fattori, dei quali noi matematici (o scienziati) non siamo spesso ben consci. Intanto, c'è uno stile dell'esposizione orale e un altro per l'esposizione scritta: di solito è ben diverso quel che il prof. X dice a lezione da quello che scrive in un libro (anche se questo è indirizzato agli studenti). Chi scrive, inoltre, ha presente, forse solo a livello implicito, una rete di conoscenze di base, che il lettore novellino non ritrova nel libro. X è di solito una persona autorevole, il suo testo (non le sue lezioni!) viene preso a modello da altri; le modifiche tendono al più a migliorare il rigore, anche a costo di notevoli complicazioni. Una nuova generazione di libri diventa la base per un nuovo modo di insegnare.

Steiner ha rilevato due tradizioni nelle trattazioni matematiche di tipo unificante [20]. Una, risalente a Euclide, e ripresa recentemente da Bourbaki, basata sul metodo deduttivo; l'altra, di tipo euristico-genetico, impostata principalmente sulla «logica della ricerca» delle proprietà, piuttosto che sulla loro giustificazione. In questo filone Steiner cita de la Ramée, Descartes, Arnauld, Clairaut (la contrapposizione fra «sintesi» e «analisi» risale all'epoca ellenistica; all'inizio dell'età moderna l'*ars analytica* fu intesa come metodo per la scoperta delle proprietà). Non v'è dubbio che oggi nella trattatistica prevale il filone deduttivo: anzi, mi sembra che si possa fare una differenza fra lo stile di Euclide e quello di Bourbaki: quest'ultimo contiene paragrafi storici (anche se spesso gli storici li hanno ritenuti un po' tendenziosi), e riferimenti alla matematica quale si pensa possa essere conosciuta dal lettore; Euclide si presenta in modo ancor più auto-sufficiente (avesse introdotto delle note storiche, quanto sarebbero più ricche le nostre conoscenze sulla matematica precedente!). A mio avviso, fra questi due diversi stili è quello «euclideo» che oggi prevale.

L'impostazione sintetico-deduttiva porta con sé la tendenza a presentare il materiale in modo più organizzato, più unitario, addirittura a far risalire teorie diverse a una sorgente unica. In essa è forte la tentazione a ridurre una disciplina a un'altra considerata più basilare.

### 3 - Alcune caratteristiche delle trattazioni riduzioniste

Le trattazioni riduzioniste si appellano spesso a una loro maggiore «economicità». In [7] si trova questa nota: «I professori d'educazione fisica non esitano, e

quando si tratta ad esempio del nuoto, è lo stile moderno, il "crawl" che essi insegnano, perché più efficace degli stili antichi». Questa affermazione ne riecheggia una che Proclo fece 1500 anni fa, a proposito di trattati: «Un tale trattato dovrebbe essere libero da qualunque cosa superflua...; bisogna fare scelte coerenti e che conducano al fine che ci si è proposto, in modo da essere della massima utilità per la conoscenza; ... deve tendere alla comprensione dei teoremi in forma generale...» ([16], citato in [20]).

Il criterio base sarebbe dunque l'efficienza nel dare all'allievo la massima quantità di nozioni. Ancora una volta bisogna distinguere tra criteri d'economicità cui si può ispirare un testo, e l'uso che ne viene fatto nell'insegnamento (che rischia di enfatizzare quegli aspetti a danno di altri). Steiner dice che i testi del filone euclideo-bourbakista «sono stati spesso letti come se... contenessero la conoscenza come tale... Teorie e concetti non venivano sviluppati in un contesto dinamico con significati mutevoli e crescenti, ma piuttosto paracadutati dall'alto».

Una prima dimensione di cui sono carenti queste presentazioni (non quella di Bourbaki, tuttavia, almeno fino a un certo punto) è quella storica. Anche se la storia della scienza presenta a volte dei giri che possono sembrare inutili ai fini del «progresso», essa ha molto da insegnarci. Anzi, a volte si è contrapposta la storia politica alla storia della scienza perché la prima è soprattutto storia dei vincitori, e non è detto che questi avessero sempre ragione, mentre la storia della scienza è leale, in essa "vince il migliore". Tuttavia la storia stessa ha dimostrato che a volte i vincitori avevano avuto torto, anche in ambito scientifico, per esempio quando hanno "represso" la logica formale nel costruire la matematica dell'età moderna, e gli ultimi 150 anni ce l'hanno fatto toccar con mano. Dunque, non sarebbe male se pure la storia della scienza fosse un po' anche "storia dei vinti".

Inoltre, il classico accostamento «filogenesi-ontogenesi» ha pur sempre un certo valore anche in campo formativo: la via individuale alla conoscenza è raramente molto diversa da quella seguita dall'umanità. Un campo disciplinare non può dunque essere pienamente compreso se lo si conosce solamente al massimo livello di formalizzazione possibile: le sue varie articolazioni (come campo di osservazioni, come scienza empirica, come organizzazione globale ancora perfettibile, come scienza formale liberata da riferimenti concreti ma aperta a più interpretazioni) costituiscono un tutto organico; il livello più alto non annulla i precedenti (chi studierebbe la geometria elementare direttamente nel linguaggio formalizzato di Tarski [21]?),

anzi la conoscenza dei livelli precedenti serve a comprendere quelli successivi, e a un utilizzatore può far comodo questo o quel livello.

Una presentazione riduzionista può ridurre l'interesse per gli aspetti critici di una disciplina. Di solito essa presenta quello che, più in generale, si può considerare *un* modello della teoria  $T$  (per esempio, nel caso geometria-algebra, gli spazi lineari su  $\mathbf{R}$ ): si perde così la possibilità di distinguere fra «sintassi» e «semantica» di  $T$ . Anche l'analisi metateorica di  $T$ , cioè il suo studio in quanto sistema formale, viene ostacolata: la disciplina riducente si presenta come un dato di fatto, e semmai l'analisi metateorica si potrebbe fare di questa.

Abituarsi a vedere la disciplina da un solo punto di vista potrebbe influire negativamente sul suo sviluppo, per esempio quando potrebbe essere opportuno un cambiamento di paradigmi. Nelle scienze sperimentali, questi cambiamenti (le rivoluzioni scientifiche) possono essere imposti dai «dati di fatto», dall'esperienza; la matematica, che si può sviluppare in modo autosufficiente, può rischiare maggiormente di «ingessarsi».

#### 4 - Qualche considerazione sulla storia e sull'epistemologia della matematica

Le considerazioni precedenti mettono in luce l'importanza della storia e dell'epistemologia della matematica, e di una approfondita riflessione sul loro ruolo. Abbiamo bisogno di una storia che sia soprattutto storia delle idee (dando ovviamente importanza allo studio dei documenti). Abbiamo bisogno di un'analisi filosofica che ci permetta di chiarire meglio i problemi della matematica e della scienza.

Per esempio, una concezione popperiana molto «influyente» è quella dei «tre mondi»: il primo è quello della realtà fisica, il secondo quello della coscienza e degli stati d'animo, il terzo quello delle teorie: a differenza del mondo delle idee platonico, questo è costruito da noi: però si rende indipendente da noi, ha una sua oggettività [15]<sub>1</sub>. La concezione standard distingue nettamente fra secondo e terzo mondo: una teoria abita nel terzo mondo, la sua comprensione nel secondo [14]<sub>3</sub>. Questa concezione corrisponde abbastanza bene all'impostazione efficientistica che abbiamo discusso nel paragrafo precedente (cercare di «dare» agli allievi il maggior numero possibile di oggetti del terzo mondo).

Ebbene, mi sembra che una distinzione troppo netta fra una teoria e la sua comprensione sia pericolosa. Essa potrebbe essere suggerita dall'abitudine ad attribuire a entità ideali alcune caratteristiche che siamo adusi ad attribuire al mondo materiale: per esempio, un «principio di conservazione», o qualcuna delle «venerabili proprietà della materia», il cui carattere metafisico fu messo in luce

da Enriques [8]<sub>1</sub>, da Whitehead [23] e da Burt [6]. Una interrelazione fra secondo e terzo mondo andrebbe meditata; già Brouwer rivendicava una maggiore «umanità» della conoscenza matematica.

Si tenga presente, del resto, che alcune importanti teorie sono sorte allo scopo di chiarire problemi di comprensione e di osservazione (si pensi alla logica e alla teoria della relatività).

## 5 - Il caso geometria-algebra

La storia della geometria è stata più lunga di quella d'ogni altra disciplina, ed è stata quanto mai significativa (anche, oserei dire, per indicare quali potrebbero essere gli sviluppi di scienze di tipo fisico: anch'essa è nata con scopi ben concreti, con riferimento alla realtà fisica). La sua linea di sviluppo storica corrisponde abbastanza bene al susseguirsi degli stadi piagetiani dello sviluppo cognitivo, anzi gli sviluppi recenti si possono far corrispondere a quella che alcuni chiamano «stadio post-formale». In ogni ordine scolastico l'insegnamento della matematica deve tener conto dello stadio raggiungibile dagli allievi, e anche di quello effettivamente raggiunto. Nelle scuole superiori la geometria è già presentabile (dopo che ci si è accertati dell'esistenza dei prerequisiti necessari) con un approccio formale. All'Università è possibile andare oltre, ma anche qui bisogna tener conto di quello che possono avere fatto precedentemente gli allievi: e, in fatto di geometria, sembra che in questi ultimi tempi la situazione lasci spesso molto a desiderare.

A parer mio, un approccio riduzionista può creare delle difficoltà più nella geometria che in altri settori della matematica. Consideriamo per esempio l'impostazione logicista all'aritmetica, che considera i numeri come insiemi. Essa corrisponde a uno degli approcci al concetto di numero naturale, quello cardinale: quindi ha un chiaro fondamento psicologico. La trattazione classica (alla Weierstrass) dell'analisi matematica si può considerare una riduzione dell'analisi all'aritmetica: essa dunque rinvia i concetti dell'analisi a concetti indubbiamente più semplici. La riduzione della geometria all'algebra lineare, invece, richiede fin dal principio una consistente quantità di concetti algebrici, impliciti nell'idea di spazio vettoriale: praticamente, l'essenziale dell'algebra astratta. Anzi, fra gli approcci più naturali a molti concetti dell'algebra astratta vi sono proprio quelli offerti dalla geometria (questo è particolarmente vero per gli spazi vettoriali).

L'assiomatica della geometria che si viene così ad adottare [7] non è affatto semplice. Per costruire razionalmente la geometria euclidea, un'assiomatica co-

me quella di Hilbert non è neppur essa semplice: però ha il vantaggio di potersi innestare su quella di Euclide, e si può così inquadrare anche storicamente; si può organizzare in modo che siano utilizzati concetti importanti quali quelli di relazione d'ordine e d'equivalenza, e di gruppo (realizzando così un'economia di pensiero); si può organizzare per gruppi d'assiomi, in modo da ottenere diversi tipi di geometria (anche in connessione con la classificazione grupale di Klein).

Questo si può in parte fare anche con l'approccio algebrico: ma la geometria affine piana non desarguesiana non è ottenibile, perché il teorema di Desargues non è dimostrabile mediante gli assiomi dell'incidenza, del parallelismo e dell'ordine ([12], § 23).

L'approccio algebrico trova la sua origine nella geometria analitica, che è un metodo per risolvere problemi geometrici. Orbene, non tutti i problemi si risolvono più facilmente per via analitica: a volte, può essere utile un uso bilanciato di metodi diversi. Puntare tutto su un metodo tende a far ignorare certi problemi, a enfatizzare il ruolo di alcuni (spesso questioni algebriche volte ad imparare il metodo, non a risolvere problemi di geometria) a scapito di altri. A volte capita che a un problema di geometria siano imposte delle restrizioni poco naturali (per esempio, che si considerino solo trasformazioni che lasciano fissa l'origine), per non appesantire i calcoli. D'altra parte, uno dei più eminenti obiettivi formativi dell'insegnamento della geometria era (e sarebbe tuttora) imparare a scegliere il metodo più adatto, ed eventualmente a usare assieme metodi diversi.

Si confronti ancora il caso della geometria con quello della fisica. Gli indirizzi di ricerca dei fisici italiani sono senza dubbio avanzati; tuttavia nell'Università la fisica viene insegnata per gradi, cominciando da quella sperimentale, per arrivare gradualmente alle teorie più avanzate; e non mi risulta che sia stato proposto di abbandonare all'inizio il metodo sperimentale. Si può infine osservare che in Italia l'insegnamento della geometria, da quando nell'Università si è in larga misura orientato verso l'approccio riduzionista, nelle scuole superiori ha avuto una crisi, anzi, a parte un po' di geometria analitica, è quasi sparito. Per i neo-insegnanti, lo iato fra l'insegnamento ricevuto e quello che debbono impartire è troppo vasto. Anche quando l'impostazione generale è analoga, occorrono strumenti per la traduzione in termini didattici della teoria appresa all'Università; ma va osservato che, nel nostro caso, l'algebrizzazione della geometria delle scuole secondarie ha avuto esito negativo in Francia.

Quale potrebbe essere, allora, una proposta alternativa? Ogni settore della matematica è un sistema complesso: e questo principio è particolarmente valido



per la geometria. A una trattazione rigorosamente unitaria è dunque preferibile, a parer mio, una che tenga conto delle varie esigenze: fra queste c'è indubbiamente quella di *far comprendere gli aspetti fondamentali di una trattazione rigorosa*; anzi, poiché questa si può realizzare in più modi, è consigliabile *mettere a confronto diversi tipi di tali trattazioni*. In questo modo si viene anche incontro all'esigenza di una impostazione critica (il che può significare *critica entro una trattazione*, quando per esempio si analizza la portata dei vari assiomi; o anche *critica dall'esterno*, quando si confrontano fra loro trattazioni diverse). Non va poi trascurata l'opportunità di collegare la teoria alle possibili applicazioni: molto spesso sono queste che hanno motivato sviluppi teorici, e recenti correnti epistemologiche tendono a metterne in rilievo il ruolo [13].

Infine, la ricchezza della storia della geometria consiglia di tener conto almeno dei suoi sviluppi più importanti, anche per comprendere meglio il valore delle trattazioni attuali.

#### 6 - A proposito di alcune riduzioni ormai accettate

A volte un'analisi libera da condizionamenti ci permette di rilevare che alcune presentazioni ormai classiche, addirittura considerate «naturali», sono in effetti riduzioni di una teoria  $T$  a un'altra, e che forse si sarebbe potuta seguire, per la costruzione di  $T$ , un'altra strada (ovviamente, in questi casi è essenziale il contributo della storia della disciplina  $T$ ). Ciò non significa che si debba cambiare la presentazione di  $T$ : la riflessione su una strada alternativa è comunque utile per apprezzare meglio quella consueta, e nel frattempo si potrebbe studiare la percorribilità d'un'altra.

Abbiamo già osservato che la trattazione ormai classica dell'analisi si può considerare una sua riduzione all'aritmetica dei numeri reali, che a sua volta si riconduce a quella dei numeri naturali. I fondatori dell'analisi nel Seicento avevano atteggiamenti fra loro diversi, e spesso lontani dalla sistemazione alla Weierstrass: Leibniz da matematico operava con gli infinitesimi e da filosofo con le monadi; Newton era contrario alla riduzione del continuo a «giustapposizione di parti». L'analisi non standard di Robinson si può considerare una rivalutazione del sistema leibniziano [14]<sub>2</sub>; Weyl ha cercato di riprendere in un contesto moderno l'idea di non ridurre il continuo [22].

Un caso poco noto ma significativo è offerto dall'uso della teoria degli insiemi nella matematica elementare, in particolare nella geometria. Noi siamo abituati a considerare le figure geometriche (come la maggior parte degli enti matematici) come insiemi (in questo caso, di punti): si potrebbe parlare di una riduzione

alla teoria degli insiemi. È evidente che le classiche trattazioni di geometria proiettiva non l'adottano, tant'è che distinguono fra *retta* (o *raggio*) e *punteggiata* (insieme dei punti appartenenti a una retta); e considerano l'appartenenza un termine primitivo. Occorre fare attenzione se occorrono assiomi che surrogano le ordinarie proprietà insiemistiche, come la transitività dell'inclusione e il principio di estensionalità (questo è validato dall'assioma dell'unicità della retta per due punti dati, e dal teorema secondo il quale una retta ha almeno tre punti).

La questione è assai antica: si ritiene che i pitagorici propendessero per la tesi che una linea fosse formata da un numero finito di punti, finché la «scoperta» che vi sono segmenti incommensurabili la fece cadere. Si pensa pure che alcuni dei paradossi di Zenone siano confutazioni di questa tesi, o più in generale della riduzione del continuo a un insieme di «indivisibili» (cioè di punti). Probabilmente sotto l'influsso di Zenone, Aristotele fece una scelta completamente opposta a quella dei pitagorici, dichiarando che «*non è possibile che qualcosa di continuo risulti composto di indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che una linea è un continuo e un punto è un indivisibile*» ([2], 231 a 24-25).

Negli *Elementi* Euclide non si pronuncia in proposito: ma traspare che egli evita accuratamente di violare la prescrizione aristotelica. Intanto è significativo che fra gli ὄροι: si affermi che «*gli estremi d'una linea sono punti*», senza parlare degli altri punti. Ma ancor più significativo è che egli evita sempre di parlare della totalità dei punti d'una linea; in particolare, non usa l'idea del «luogo dei punti tali che...»: non dà le proprietà caratteristiche dell'asse d'un segmento e della bisettrice d'un angolo; non enuncia l'inversa della III. 21 (questa dice che «in un cerchio angoli inscritti nel medesimo arco sono uguali»); alcune dimostrazioni (per esempio di III. 1, III. 25 e IV. 5) risulterebbero assai più semplici se si tenesse conto di quelle proprietà.

Per converso, quando Cavalieri parlò di «tutte le rette» (d'una figura piana) e di «tutte le (sezioni) piane» (d'un solido), vale a dire di decomporre una figura in «indivisibili», l'idea apparve rivoluzionaria e sospetta dal punto di vista del rigore.

Vi sono alcune teorie che non vanno contro la prescrizione aristotelica, e d'altra parte forniscono strumenti matematici interessanti: si tratta delle teorie degli insiemi senza elementi, o piuttosto senza appartenenza (relazione primitiva è l'inclusione), e analogamente le geometrie senza punti (termini primitivi sono «regione» e «inclusione»): si veda rispettivamente [23] e [11]. Se il sistema degli assiomi è abbastanza ricco, si può poi definire la nozione di punto. Queste im-

stazioni avrebbero il vantaggio di essere più vicine all'ambiente aristotelico-euclideo, e forse potrebbero avere una base per certi aspetti psicologicamente più adeguata a intuizioni di fondo (i punti sono figure geometriche particolarmente lontane dall'esperienza sensibile, ed è un po' una forzatura fondare la geometria sul concetto di punto).

In molte trattazioni razionali, il fatto di non chiarire che una figura si considera un insieme di punti porta a fare delle confusioni su concetti topologici elementari, per esempio fra regioni chiuse, o addirittura tra una figura e il suo contorno [da quest'ultimo difetto non è esente neppure Euclide, in alcuni passi in cui confonde per esempio κύκλος e περιφέρεια (cerchio e circonferenza: cfr. per esemplō XI. 16)]. Sembra tuttavia che, almeno nei sistemi finora proposti, nelle geometrie senza punti non sia semplice arrivare a definire il contorno di una regione.

### Bibliografia

- [1] H. G. APOSTLE, *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, Univ. Chicago Press, Chicago 1952.
- [2] ARISTOTELE, *Physica*.
- [3] E. ARTIN, *Geometric Algebra*, Interscience Publ., New York 1957.
- [4] U. BARTOCCI, *Tendenze «monofisite» nei fondamenti della Matematica*, in «Incontri sulla Matematica», 3 (a cura di B. D'Amore), Armando, Roma 1976, 13-30.
- [5] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique; in particolare Théorie des Ensembles, Structures*, Hermann, Paris 1957.
- [6] E. A. BURTT, *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*, Routledge and Kegan, London 1924.
- [7] J. DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.
- [8] F. ENRIQUES: [•]<sub>1</sub> *La filosofia positiva e la classificazione delle scienze*, Scientia, 7 (1910), 369-385; [•]<sub>2</sub> *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, Stock e Zanichelli, Roma-Bologna, 1925-1935.
- [9] EUCLIDE, *Gli Elementi*.
- [10] G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, Pohle, Jena 1897-1902.
- [11] G. GERLA, *Pointless Geometries*, in «Handbook of Incidence Geometry» (Buckenhout and Kantor ed.) North Holland, Amsterdam (in corso di stampa).
- [12] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1899.

- [13] H. N. JAHNKE, *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem*, IDM Materialien und Studien 10, Bielefeld 1978.
- [14] I. LAKATOS: [ $\bullet$ ]<sub>1</sub> *A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics?*, in «Mathematics, science, epistemology», Cambridge Univ. Press, Cambridge 1978, 24-42; [ $\bullet$ ]<sub>2</sub> *Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and the philosophy of mathematics*, *ibid.*, 43-60; [ $\bullet$ ]<sub>3</sub> *The problem of appraising scientific theories: three approaches*, *ibid.*, 107-120.
- [15] K. POPPER: [ $\bullet$ ]<sub>1</sub> *Epistemology without a Knowing Subject*, in «Objective Knowledge», Clarendon Press, Oxford 1972, 106-152; [ $\bullet$ ]<sub>2</sub> *A Realist View of Logic, Physic and History*, *ibid.*, 285-318.
- [16] PROCLO, *Commentario al primo libro di Euclide*.
- [17] B. RUSSELL and A. N. WHITEHEAD, *Principia Mathematica*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1910-1913.
- [18] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, Zanichelli, Bologna 1948.
- [19] F. SPERANZA, *La riduzione di una disciplina a un'altra: una strategia generale?*, in «Proc. of Perugia Conf. on Found. of Math. and Phys.», Wesley, Blumberg 1990, 237-247.
- [20] H. G. STEINER, *Two Kinds of «Elements» and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics*, For the Learn. of Math., 8, 3, 7-15.
- [21] A. TARSKI, *What is Elementary Geometry?*, in «The Axiomatic Method, ...» (L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski ed.), North Holland, Amsterdam 1959, 16-29.
- [22] H. WEYL, *Das Kontinuum*, De Gruyter, Leipzig 1918.
- [23] A. N. WHITEHEAD, *Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge Univ. Press., Cambridge 1920.

### Summary

*What is the rationale of the reductionist treatments of mathematics? What is their influence over young mathematicians' training? Is there an alternative way? What is the underlying philosophy of mathematics? We try to give some answers to these questions.*

\*\*\*