

CARLO FELICE MANARA - GABRIELE LUCCHINI

**Momenti del
PENSIERO MATEMATICO**

*Lecture su aspetti e problemi
delle scienze matematiche*



MURSIA



PREFAZIONE

Si incontrano abbastanza frequentemente persone, anche colte ed intelligenti, che professano una decisa avversione per la matematica e che ostentano la loro ignoranza di questa scienza. Tale atteggiamento suscita spesso, in coloro che si dedicano alla matematica, il desiderio di farne comprendere lo spirito, e questo obiettivo si presenta talora come più importante di quello di insegnare risultati specifici o teorie, in forma sistematica oppure episodica.

Le strade che si possono seguire sono, ovviamente, numerose e spesso non facili da percorrere, anche per le conoscenze tecniche normalmente richieste dai discorsi sulla matematica; un modo di avanzare su alcune di queste strade ci è parso quello di presentare diversi momenti dello sviluppo della matematica attraverso scritti di matematici e di pensatori interessati a questa scienza.

Vogliamo subito precisare che non ci siamo proposti né di dare una risposta alla domanda « Che cosa è la matematica? »¹ né di fornire una esposizione sistematica dei pareri che sulla matematica hanno avuto

¹ A questo proposito vogliamo ricordare che soltanto in una visione abbastanza limitata delle cose e con una certa ignoranza della evoluzione critica della scienza, anche la più recente, ci si può illudere di rispondere in modo esauriente a domande di questo tipo sulle scienze, senza guardarle dal di dentro con la necessaria strumentazione logica e tecnica. Al riguardo si può ripetere ciò che ha scritto B. Finzi nella prefazione al suo trattato di *Meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1957, ristampa della seconda edizione, pag. 2):

« Si potrebbero elencare alcune decine di definizioni, tutte press'a poco dello stesso tipo, ché, fino a pochi anni or sono, la maggior parte dei trattati di meccanica incominciava così: "La meccanica razionale è..."; ma è saggia norma diffidare delle definizioni che si trovano in testa ai libri. I trattati più moderni non danno quasi mai una definizione; sembrano dire al lettore: "Vuoi sapere che cosa è la meccanica? leggimi tutto e lo saprai!". Si tratta di una definizione concreta, ma molto particolare e... autoritaria ».

i filosofi nel corso della storia del pensiero umano;² piú semplicemente ci siano proposti di far vedere come il matematico lavora o guarda alla propria opera, nella convinzione che questo possa contribuire anche a far comprendere meglio gli argomenti di matematica che la scuola propone.

Infatti nella introduzione scolastica tradizionale della matematica si ha una mancanza quasi assoluta della dimensione storica di questa scienza. Al massimo si hanno nei libri scolastici delle brevi note a piè di pagina che danno qualche notizia sui vari matematici e sull'epoca nella quale hanno vissuto.

Ma non vi è, in generale, una presentazione che miri a dare le motivazioni della ricerca matematica, della invenzione dei simboli, della logica interna e della sintassi che li governano, o l'inquadramento dei problemi che i matematici hanno risolto e delle teorie che hanno costruito, da un punto di vista che integri queste cose nel momento storico nel quale esse avvennero. Si potrebbe dire che lo studente il quale esce dalle nostre scuole ha della matematica una visione che appartiene in certo modo al mondo extratemporale delle idee, e ne trae l'immagine di una scienza che è costituita da problemi avulsi dalla realtà culturale dell'epoca in cui furono risolti, che non hanno motivazioni all'infuori di quella della mentalità dei matematici (mentalità abbastanza distorta, nel giudizio dell'uomo comune) e sono risolti con formule che appaiono spesso scarsamente giustificate.

Forse proprio da queste circostanze nasce quella avversione di cui si è detto, e che potrebbe, almeno in parte, essere superata cercando di cogliere, per così dire, la nascita del problema matematico e di comprendere quanta passione, quanta fantasia, quanta intuizione, quante doti che confinano con le doti dell'artista sono utilizzate quando si giunge alla scoperta matematica. Occorre cioè distinguere tra la ricerca del matematico e la sistemazione teorica che viene presentata nei trattati in una forma, per così dire, cristallizzata: gli assiomi sono enunciati prima dei teoremi, le deduzioni sono impeccabili e così via; invece la scoperta segue delle vie del tutto diverse e conduce ad avventure intellettuali che sono spesso affascinanti, come abbiamo cercato di mostrare in questo volume.

Su questa strada, abbozzeremo alcuni momenti della storia della matematica ed alcuni aspetti della psicologia del matematico, ad epi-

² Si può dire che in ogni filosofo si trova una «teoria» o una interpretazione della matematica, forse per i suoi caratteri di certezza e di astrazione dagli oggetti del mondo fisico e della vita reale. A questo proposito vorremmo segnalare quanto F. Enriques ha scritto nei §§ 33-34 de *Le matematiche nella storia e nella cultura* (Bologna, Zanichelli, 1938, e, in ristampa anastatica, 1971) riportati in Appendice a questa prefazione.

sodi, senza la pretesa di una esauriente documentazione storica e di una analisi che scenda nel profondo della psiche; ci limiteremo a presentare alcuni matematici che scrivono di se stessi, della propria scienza e dei problemi che essi ritengono vivi alla propria epoca. Il lettore noterà che qualche osservazione è stata ripetuta in paragrafi diversi: questo ci è parso opportuno soprattutto per coloro che preferiranno una lettura episodica.

Le difficoltà che si incontrano nella realizzazione di un'opera come questa sono evidenti: è difficile presentare la matematica senza usare i suoi simboli, che sono i suoi strumenti tipici, i quali sono artificiali e possono apparire astrusi alla maggior parte dei lettori non tecnici; per quella sorta di avversione di cui abbiamo già detto, si rischierebbe così di provocare una immediata antipatia per ciò che si presenta; d'altra parte il rimanere nella esposizione puramente verbale o letteraria rischia di decurtare in modo radicale ciò che si vorrebbe presentare.

Nonostante il fatto che queste difficoltà rendano particolarmente arduo il nostro compito, abbiamo voluto scegliere i passi da presentare in modo che per intenderne il contenuto non sia necessaria una cultura matematica superiore a quella data nelle scuole secondarie. Ovviamente questa scelta ha portato a dover tralasciare di menzionare opere ed Autori importanti nello sviluppo della matematica, e l'esclusione non ha quindi alcun significato di giudizio di merito.

Vogliamo anche osservare che questo criterio di scelta ha portato a non poter seguire appieno la evoluzione del linguaggio matematico e degli strumenti con cui il matematico lavora. Riteniamo tuttavia che, anche con queste limitazioni, affiori il travaglio della ricerca, quale appare negli scritti dei matematici.

D'altra parte l'eliminazione degli strumenti tecnici ha portato anche alla assenza di tutte le dispute pseudofilosofiche sull'infinitamente piccolo e sulle origini del calcolo infinitesimale, dispute che appassiano forse ancora oggi qualcuno, ma che non hanno più importanza nella elaborazione dei concetti matematici quale è stata ottenuta dalla critica anche recente.

Saremo lieti se la nostra raccolta contribuirà a convincere i giovani del fatto che la matematica è una scienza viva e che questo suo aspetto è ben diverso da quello che si coglie nei trattati e, purtroppo, nella pratica dell'insegnamento delle nostre scuole. Ma va anche ricordato che senza la conoscenza almeno superficiale della matematica non si può intendere il suo sviluppo storico e non si può quindi apprezzare quel lato umano della ricerca matematica che abbiamo cercato di presentare qui. Pertanto questa nostra fatica vorrebbe anche stimolare alla meditazione ed allo studio assiduo.

Vorremmo inoltre sostenere la importanza del ruolo culturale della matematica; non accettiamo infatti che questa scienza sia confinata nel ghetto delle materie prettamente strumentali, assegnandole il livello di una tecnica (forse anche molto raffinata) che non si può non insegnare perché è molto importante per le applicazioni, ma che non ha nulla da dire sulla formazione dell'uomo. Siamo invece convinti che la matematica abbia un suo posto insostituibile in questa formazione, perché educa alla analisi critica dei concetti, alla astrazione, alla deduzione rigorosa ed anche alla umiltà intellettuale. A nostro parere soltanto una mentalità abbastanza sprovvista potrebbe portare ad insistere sul vieto tema delle « due culture »: ma perché la unificazione delle culture possa essere realizzata effettivamente occorre che la matematica sia insegnata mettendone in evidenza i suoi aspetti umani; e quindi anche presentando gli uomini che di questa scienza si sono occupati durante i secoli e che hanno contribuito a costruirla.

A questo fine abbiamo cercato di mettere in evidenza gli aspetti più interessanti della personalità degli Autori di cui ci siamo occupati, quali appaiono dai loro scritti, trascurando spesso di insistere su quei minuti particolari della loro biografia che non ci sono apparsi altrettanto interessanti per il nostro scopo.³

Vorremmo dire qualche parola sulla traduzione dei brani di Autori che hanno scritto in una lingua diversa dall'italiano e sulla trascrizione delle forme linguistiche.

Per quanto riguarda le traduzioni fatte da noi (che sono quelle per le quali non ci sono indicazioni), abbiamo preferito tradurre abbastanza liberamente: pensiamo infatti che già la materia presentata sia di una certa difficoltà, e che questa sarebbe stata accresciuta se avessimo seguito pedissequamente il periodare degli Autori.

Il risultato sarebbe stato probabilmente quello di respingere il lettore non soltanto per il contenuto ma anche per la forma; e noi vogliamo invece che il lettore sia attirato, dalla conoscenza dei testi che presentiamo, ad accostarsi ai classici della scienza.

Inoltre pensiamo che l'impresa di rendere il sapore ed il colore della prosa di certi Autori (si pensi per esempio a B. Pascal, che è un classico della propria lingua) sia già difficile per i letterati di professione: noi che tali non siamo chiediamo venia degli eventuali errori fatti cercando di superare difficoltà estranee alle nostre abituali competenze.

Per quanto riguarda i passi scritti in italiano non moderno, abbiamo adottato dei criteri diversi di volta in volta, trasponendo le parole di

³ Le indicazioni per reperire le notizie biografiche sugli Autori sono riportate nell'indice dei nomi e non nel testo.

qualche Autore nella forma della lingua attuale e lasciando altri passi nella loro forma originale, quando abbiamo creduto che questa rendesse meglio il carattere dell'Autore, il che ha una certa importanza nel nostro discorso.



Non vogliamo chiudere questa prefazione senza avere almeno accennato alle possibilità di completamento e di approfondimento dei temi proposti, ovviamente nell'ordine di idee che abbiamo cercato di precisare. Poiché questo ordine di idee porta, ovviamente, a prescindere dai singoli filoni della matematica contemporanea, che richiederebbero indicazioni di opere specialistiche di non agevole lettura e da vagliare accuratamente caso per caso, riteniamo che due siano gli aspetti da segnalare: le opere dei grandi matematici e i trattati più diffusi di storia della matematica.

Per quanto riguarda le opere dei grandi matematici, è chiaro che i brani riportati in questo libro sono una piccola parte delle letture accessibili anche a chi non si è dedicato a studi specifici di matematica: d'altra parte pensiamo di aver fatto una scelta in un qualche modo stimolante nei confronti degli Autori ai quali abbiamo attinto e quindi, sia pure indirettamente, anche degli altri matematici che non abbiamo ricordato con brani dei loro lavori; per tutti rimandiamo alle edizioni ufficiali delle loro opere.

Per quanto riguarda i trattati di storia della matematica ci limitiamo a segnalarne alcuni, variamente significativi, che almeno in parte possono essere utilizzati anche come fonti bibliografiche.

- G. J. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889.
 E. T. BELL, *Men of Mathematics*, New York, Simon & Schuster Inc., 1931; ed. it.: *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1950.
 E. BORTOLOTTI, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*, Bologna, Zanichelli, 1928.
 C. BOSSUT, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, Paris, 1802; ed. it.: *Saggio sulla storia generale della Matematica*, Milano, Nobile e Tosi-Giegler, 1802.
 N. BOURBAKI, *Elements d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960; ed. it.: *Elementi di storia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1963.
 —, *idem, deuxième édition revue, corrigée, augmentée*, idem, 1969.
 C. B. BOYER, *History of Analytic Geometry*, New York, Yeshiva University, 1956.
 H. F. BOYER, *A History of Mathematics*, New York, Wiley, 1968.

- J. BOYER, *Histoire des mathématiques*, Paris, G. Carré & C. Naud, 1900.
- C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides - Ein historischer Versuch*, Leipzig, 1870.
- M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, 1880-1908.
- E. CARRUCCIO, *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, Gheroni, 1958.
- E. CASARI, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1964.
- F. CASORI, *A History of Mathematical Notations*, 2 voll., La Salle (Illinois), The Open Court Publishing Company, 1828-1829.
- U. CASSINA, *Dalla geometria egiziana alla matematica moderna*, Roma, Cremonese, 1961.
- G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.
- E. COLERUS, ed. it.: *Piccola storia della matematica*, Torino, Einaudi, 1941 e Verona, Mondadori, 1960.
- J. L. COOLIDGE, *A History of Geometrical Methods*, New York, Oxford University Press, 1940.
- P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra - Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita*, Parma, Reale tipografia parmense, 1797-99.
- F. ENRIQUES, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938.
- F. ENRIQUES e G. DE SANTILLANA, *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni*, Bologna, Zanichelli, 1937.
- H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, New York, Rinehart, 1958 e 1969.
- A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1969.
- G. FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis zum 13. Jahrhundert*, Erlangen, 1869.
- L. GEYMONAT, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Levrotto e Bella, 1947.
- —, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Milano, Garzanti, 1972.
- J. GOW, *A Short History of Greek Mathematics*, New York, Hafner, 1923.
- S. GUENTHER, *Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1908-1911.
- T. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1921.
- A. HOOPER, *Makers of Mathematics*, New York, Random House, 1948.
- A. G. KAESTNER, *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung*

- der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Göttingen, 1796-1800.
- F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, 1926-27.
- M. KLINE, *Mathematics in Western Culture*, London, Allen & Unwin, 1954.
- , *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
- F. LE LIONNAIS, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Blanchard, 1962.
- G. LIBRI, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, Paris, Renouard, 1838-41.
- G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed., Milano, Hoepli, 1914.
- , *Storia delle Matematiche*, 3 voll., Torino, 1929-1933.
- , *Guida allo studio della storia delle matematiche*, II edizione rivista e aumentata, Milano, 1946.
- M. M. MARIE, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, 12 voll., Paris, Gauthier-Villars, 1883-1888.
- L. MATTHIENSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig, Teubner, 1878.
- A. G. MILLER, *Historical Introduction to Mathematical Literature*, New York, McMillan, 1916.
- J. F. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours, etc.*, Paris, Agasse, 1789-1802.
- O. NEUGEBAUER, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin, 1934.
- , *The Exact Sciences in Antiquity*, II ed., Providence (Rhode Island), Brown University Press, 1934.
- J. R. NEWMAN, *The World of Mathematics*, 4 voll., London, Allen & Unwin, 1960.
- O. ORE, *Number Theory and Its History*, New York, McGraw Hill, 1948.
- G. SARTON, *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge (Massachusetts), 1936.
- D. E. SMITH, *History of Mathematics*, 2 voll., Boston, Ginn, 1923.
- D. J. STRUIK, *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University, 1969.
- P. TANNERY, *La géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Paris, 1887.
- I. TODHUNTER, *History of the Mathematical Theory of Probability*, New York, Chelsea Publishing Company, 1865.
- J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, III ed., Berlin e Leipzig, 1930-1933.

Prefazione

- H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum um Mittelalter*,
Copenaghen, 1896 (traduzione tedesca dell'edizione danese del 1893).
— —, *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, Leip-
zig, Teubner, 1903.

APPENDICE ALLA PREFAZIONE

Che cosa sono le matematiche¹

di Federigo Enriques

SIGNIFICATO DEGLI ENTI MATEMATICI

La matematica pone al filosofo il problema di chiarire il significato dei suoi enti. [...] Platone scorgeva in questi gli oggetti di una realtà intelligibile. Invece gli stessi enti, astratti e separati dal mondo delle sensazioni, appaiono ad Aristotele come irreali. Di qui la controversia tra realisti e nominalisti, che doveva riaccendersi e prolungarsi nel medioevo. La difficoltà del problema sta in ciò: che fantasmi privi di corpo sembrano dominare le cose che in qualche modo ne dipendono: se pure non hanno esistenza concreta, si ritrovano come immanenti negli oggetti e nelle leggi della fisica. Una serie di minerali cristallizzati nella forma cubica pone allo spirito dell'osservatore « il cubo » come qualcosa di dato: un modello che se pure sia foggato dallo spirito stesso per un lavoro inconscio d'astrazione e d'idealizzazione, appare in qualche modo immanente nelle cose osservate.

« La filosofia — dice GALILEO [*Opere*, VI, 232] — è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola... ».

¹ Da *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli, 1938 e, in ristampa anastatica, 1971, pagg. 139-142; le note originali sono state inserite nel testo entro parentesi quadre; i brevi tagli sono indicati con [...].

DEFINIZIONI DELLE MATEMATICHE

Per rispondere al problema sopra indicato, sembra naturale chiedersi in che maniera i pensatori piú cospicui abbiano definito le matematiche. Ma, come vedremo, queste definizioni non ci fanno penetrare meglio le difficoltà.

Per DESCARTES « toutes les sciences, qui ont pour but la recherche de l'ordre et de la mesure se rapportent aux mathématiques »² [*Règles pour la direction de l'esprit*, trad. fr., in « Oeuvres », X, 339]. LEIBNIZ dice: « Mathesis universalis est scientia de quantitate in universum, seu de ratione aestimandi... hinc fit ut mathesis universalis sit scientia de mensurae repetitione seu de numero »³ [*Math. Schriften*, ed. Gerhardt, III, 5].

Lo scopo di tali definizioni sembra essere soltanto di affermare l'unità del sapere matematico che, con la geometria analitica, viene a dipendere dal concetto del numero.

In modo simile, B. BOLZANO,⁴ preoccupandosi di una possibile estensione di questo sapere, di là dell'ordinaria aritmetica, nel campo dell'infinito (cui si riferiscono i suoi *Paradoxien des Unendlichen*,⁵ Lipsia, 1857), definisce le matematiche come « scienza delle grandezze », dando il nome di grandezze a una qualsiasi classe di enti per cui si abbiano i concetti di uguaglianza, disuguaglianza e somma, coi relativi postulati caratteristici.

Il senso di tali formule è esattamente quello che ha la definizione della geometria nel programma di Erlangen di F. KLEIN, dove la geometria viene riguardata come studio delle proprietà invarianti delle figure rispetto a un gruppo di trasformazioni: si tratta insomma di illuminare in un senso particolare i rapporti che intercedono fra certe teorie, ravvisando qualcosa di comune nel loro studio.

Ma le anzidette definizioni delle matematiche non riescono nemmeno a coprire tutto il campo della scienza; per esempio la geometria proiettiva e la topologia resterebbero fuori da quelle formule.

Un nuovo indirizzo nella ricerca di una definizione delle mate-

² « Tutte le scienze che hanno come scopo la ricerca dell'ordine e della misura si collegano alla matematica ».

³ « La matematica generale è la scienza delle quantità in generale, cioè del criterio per *stimare*... ne segue che la matematica in generale è la scienza della ripetizione della misura, ossia del numero ».

⁴ Bernard Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), austriaco, prete cattolico, portò diversi contributi agli studi matematici e logici.

⁵ *I paradossi dell'infinito* (edizione italiana, Milano, Feltrinelli, 1965).

matiche è segnato dai logici matematici, che, tralasciando la considerazione dell'oggetto, si attaccano soltanto alla forma logica che la scienza è capace di rivestire nelle trattazioni più compiute. E così riescono a definire le matematiche come studio dei sistemi *ipotetico-deduttivi* di proposizioni. Appunto a questo concetto si riferisce la definizione paradossale di BERTRAND RUSSELL:⁶ « Le matematiche sono quella scienza, in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero ». Con ciò si afferma che i concetti primitivi della scienza sono assunti senza definizione, enunciando e postulando solo i loro rapporti logici; ed anche che ogni indagine sulla verità o meno dei postulati trascende la conoscenza matematica, rispetto a cui i postulati stessi figurano come *ipotesi arbitrarie*, soggette soltanto alla condizione di non contraddirsi.

Ma che dire di una visione puramente formale, che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere?

Il *Corpus juris*, esposto in forma logica secondo l'ideale di Leibniz, diventerebbe senz'altro un ramo delle matematiche.

Non per nulla la tradizione della logica matematica si riattacca all'alchimia speculativa dell'*Ars magna*, costruita dal mistico catalano RAIMONDO LULLO.⁷ C'è anche nel pensiero di Leibniz e dei suoi continuatori l'idea di trarre dal nulla l'intero universo del sapere con la combinazione quasi meccanica di poche idee semplici. Qualcuno dei più recenti sognava di sviluppare sistematicamente tutte le identità algebriche secondo le regole fisse del calcolo, e non si rendeva conto delle migliaia e migliaia di operazioni inutili che occorrerebbe compiere prima di giungere a qualche formula significativa; e peggio ancora del fatto che quando qualcuna di queste si presentasse, vi si passerebbe accanto senza comprenderne il valore.

Ben altro è l'insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore.⁸ [...]

⁶ Ricordiamo che il noto logico e filosofo inglese (1872-1970) si dedicò anche a studi di filosofia della matematica e scrisse, tra l'altro, in collaborazione con A. N. Whitehead, i *Principia Mathematica* (1910-1913; II ed. 1927).

⁷ Raimon Lull, o Lully (c. 1235-1315).

⁸ Si vedano le acutissime osservazioni su « L'errore nelle matematiche » dello stesso F. Enriques alle pagg. 252 e seguenti.