

IL CALCOLO APPROSSIMATO DIMENSIONI CULTURALI E DIDATTICHE. 2

Carlo Felice Manara

Dopo aver sollevato alcune importanti questioni relative al calcolo approssimato, pubblicate sul precedente n. 3 della rivista, vengono proposte alcune procedure paradigmatiche che consentono calcoli numerici accettabili e conducono ad informazioni corrette.

Le relazioni fondamentali

Richiamiamo qui di seguito le relazioni fondamentali che possono guidare i calcoli, allo scopo di ottenere informazioni valide; indicando con α e con β due numeri reali positivi, ed indicando con lettere latine minuscole (come a, a', b, b', \dots) dei numeri razionali, supponiamo che sussistano le relazioni seguenti:

$$(1) \quad 0 < a < \alpha < a' \\ 0 < b < \beta < b'$$

allora si ha:

$$(2) \quad (a + b) < \alpha + \beta < (a' + b'); \\ a \cdot b < \alpha \cdot \beta < a' \cdot b' \\ 1/a' < 1/\alpha < 1/a; \\ a/b' < \alpha/\beta < a'/b$$

e, se è $a > b'$, si ha anche:

$$(3) \quad (a - b') < \alpha - \beta < (a' - b).$$

Queste relazioni del tutto elementari permettono di eseguire i calcoli in modo che le informazioni che si forniscono siano rigorose, nel senso che abbiamo già presentato con le parole di G. Peano (si veda la prima parte dell'articolo pubblicata sul n. 3, 15-11-93, pp. 77-80).

Per evitare una trattazione eccessivamente astratta, che richiederebbe, tra l'altro, spazio maggiore di quello qui consentito, limiteremo il nostro discorso alla presentazione di alcuni esempi concreti di applicazione delle relazioni ricordate; esempi che potrebbero trovare posto anche nella pratica didattica.

A tal fine ricordiamo ancora una volta che i mezzi di calcolo elettronici tascabili sono di grandissima diffusione: tempo fa alcune piccole macchinette erano addirittura date in omaggio agli acquirenti dei fustini di certi detersivi! Pertanto supporremo che il lettore a cui ci ri-

volgiamo possa disporre di uno strumento elementare di questo tipo, che ha una memoria, esegue le operazioni aritmetiche elementari, calcola il reciproco di un numero, ed estrae la radice quadrata, mettendo in evidenza 8 cifre. Abbiamo detto che alcune di queste macchinette eseguono l'arrotondamento dei risultati dei calcoli, altre invece forniscono sempre dei risultati con valori troncati; per accertarsi su questa circostanza basta calcolare la divisione di 2 per 3: se l'ultima cifra che compare a destra è 7 la macchinetta arrotonda i risultati dei calcoli, se tale cifra è 6 la macchinetta dà invece valori troncati. In altre sedi abbiamo ripetutamente espresso la opinione che l'impiego intelligente di questi apparati non richiede spese, non richiede conoscenze complicate di informatica, ma permette di dare un'idea della matematica che vorremmo chiamare «ragionevole», che dà informazioni valide e non illusorie, anche se necessariamente incomplete.

L'impiego di piccoli calcolatori tascabili permette di applicare frequentemente, senza calcoli tediosi e faticosi, le relazioni esposte; e quindi permette di verificare che spesso le informazioni che vengono date in forza dell'impiego di calcolatori elettronici sono illusorie; non perché tali apparati siano difettosi, ma perché vengono utilizzati non correttamente. Un caso tipico di questi comportamenti si verifica quando si identifica il valore della costante di Archimede con il numero fisso 3.14. Consideriamo a questo proposito un problemino di geometria elementare, che consiste nel cercare la misura della circonferenza passante per i vertici di un quadrato di lato unitario. Si è così condotti a calcolare il prodotto della costante P di Archimede per la soluzione della equazione algebrica.

$$x^2 = 2.$$

Un qualunque calcolatore tascabile fornisce un valore troncato di questo numero, con la frazione decimale 1.4142135.

Se si calcola il prodotto di questo numero per 3.14 si ottiene un risultato che viene dato dall'apparato con le cifre 4.4406305; ma con l'applicazione delle relazioni (2) si verifica facilmente che l'accuratezza dell'informazione così ottenuta è illusoria, perché un valore troncato del numero che si cerca è dato da 4.44288. L'errore è provocato dal fatto che, come si deduce facilmente dalle relazioni citate in precedenza, il risultato di un calcolo aritmetico, eseguito su due numeri, è affetto da un errore che ha lo stesso ordine di grandezza di quello tra i due numeri che è rappresentato con la minore precisione; quindi se per la costante di Archimede si assume il numero «magico» 3.14, è inutile assumere il valore dell'altro fattore con 7 cifre decimali.

Prenderemo ancora occasione da un articolo di giornale, che riguardava questa volta il ben noto e classico argomento della sezione aurea di un segmento, trattato da Euclide, in relazione alla costruzione del decagono regolare. È noto che molti autori, nel corso dei secoli, hanno scritto su questo argomento, mettendo in evidenza anche il significato estetico dell'impiego della sezione aurea di un segmento, nell'architettura e nella pittura. L'articolaista richiamava molte di queste cose ed aggiungeva altre considerazioni di tipo quasi filosofico, in relazione al numero che misura la sezione aurea di un segmento unitario. È noto che questa misura è la radice positiva dell'equazione quadratica:

$$(4) \quad x^2 + x - 1 = 0;$$

tale radice positiva è fornita dalla formula risolutiva dell'equazione algebrica di secondo grado (4):

$$(5) \quad x = (y - 1)/2$$

essendo y la radice positiva dell'equazione, pure algebrica di secondo grado:

$$(6) \quad y^2 = 5.$$

Si dimostra facilmente che il numero x è irrazionale: infatti la formula risolutiva (5) non fa che rimandare il calcolo della x a quello del numero y definito dalla (6); e si dimostra quest'ultimo è irrazionale. Ciò significa che il suo valore esatto non potrà mai essere espresso in for-

ma finita con frazioni decimali; infatti quelle che vengono chiamate «regole per il calcolo della radice quadrata» presentano sostanzialmente una procedura, consistente in un insieme di tentativi razionalmente programmati, per ottenere informazioni, sempre migliorabili ma mai definitive, sulla radice della (6).

Un valore troncato della y è dato dalla frazione decimale:

$$(7) \quad y = 2.236067\dots$$

e, partendo da questo valore, si può calcolare il valore della radice x con una approssimazione di 1 su 100000. Invece l'articolista di cui si parlava poco sopra asseriva disinvoltamente che si ha $x = 0.618$, ed intesseva su questo numero, presentato quasi come magico, delle elucubrazioni che non stiamo a ripetere. Si vede facilmente che il valore troncato $x = 0.618$ si ottiene dalla (5) assumendo $y = 2.236$ come valore troncato della radice positiva della (6). Se volessimo migliorare l'informazione di partenza, possiamo in questo caso adottare un artificio che ci sembra istruttivo, perché permette anche di fare dei richiami di geometria analitica. Precisamente proponiamoci di valutare la radice della equazione che ha le radici opposte di quelle della (4). Tale equazione è:

$$(8) \quad x^2 - x - 1 = 0,$$

e può essere scritta nella forma:

$$(9) \quad x = 1 + 1/x.$$

In questa forma si può interpretare l'equazione come ottenuta dalla eliminazione della variabile Y dal sistema di equazioni:

$$(10) \quad Y = x; \quad Y = 1 + 1/x$$

e questo problema traduce algebricamente il problema geometrico di ricercare l'intersezione tra una retta ed una iperbole equilatera, avente gli asintoti paralleli agli assi coordinati cartesiani X, Y . Da questa interpretazione geometrica si può partire per instaurare una procedura «a ragnatela» di determinazione del valore della radice della (8). E da questa si giunge facilmente a garantire che per la radice cercata della (4) valgono le limitazioni:

$$(11) \quad 0.618033988 < x < 0.618033989.$$

L'impiego dell'elettronica

Abbiamo detto poco sopra che per cercare delle informazioni ragionevoli non è necessario avere delle conoscenze approfondite di informatica. Vo-

gliamo tuttavia concludere queste pagine presentando un caso che ci sembra tipico, in cui l'impiego di elaboratori programmabili deve essere fatto con un certo senso critico.

Proponiamoci di determinare un valore approssimato della costante P di Archimede, traducendo con un programma la procedura di questo grande matematico: precisamente inscriviamo nella circonferenza di raggio 1 un poligono regolare, del quale conosciamo il perimetro; bisecchiamo gli angoli al centro, costruiamo il poligono regolare che ha numero doppio di lati e calcoliamone il perimetro, e così via. Dovremmo così ottenere dei valori sempre più vicini alla lunghezza della circonferenza, e quindi, dividendo per 2, dei valori sempre più approssimati della costante P di Archimede. Se disponiamo di un calcolatore, la scrittura di un programma che ripeta un numero N di volte l'operazione è un facile esercizio: infatti, se indichiamo con a la lunghezza della corda di una circonferenza di raggio unitario, la lunghezza b della corda che è vista dal centro secondo un angolo che è la metà di quello secondo cui è vista la precedente è data dalla formula:

$$(12) \quad b = [2 * \{1 - [1 - a^2/4]^{(1/2)}\}]^{(1/2)}$$

che si dimostra facilmente in base a considerazioni di geometria elementare. Per esempio in linguaggio BASIC si potrebbe scrivere il programma di 12 istruzioni:

```
10 INPUT "N = "; N
20 DIM A(N)
30 DIM P(N)
40 A(1) = 1
50 I = 1
60 IF I > N GOTO 120
70 A(I + 1) = SQR(2) * SQR(1 -
  - SQR(1 - (A(I)^2)/4))
80 P(I + 1) = (2^I) * 3 * A(I + 1)
90 PRINT "P(" I + 1 ") = " P(I + 1)
100 I = I + 1
110 GOTO 60
120 END
```

In questo programma si è preso come poligono di partenza l'esagono regolare, come mostra l'istruzione 40. Si ha ovviamente $P(1) = 3$, ed al crescere di N dovrebbe migliorare l'approssimazione: così per esempio si ha $P(7) = 3.141574$. Tuttavia l'approssimazione non migliora affatto indefinitamente al crescere ulteriore di N ; anzi si ha $P(12) = 3$ e $P(13) = 0$. Questo risultato è apparentemente paradossale, e contrario a ciò che si potrebbe attendere, fondandosi sulla immagine geometrica; invece si spiega bene osservando che l'istruzione 80 dà il semiperimetro del poligono inscritto come prodotto di due fattori: uno di essi

(e precisamente 2^I) cresce indefinitamente con I , ma l'altro diminuisce pure indefinitamente. Da un certo indice in poi l'apparato arrotonda a zero il risultato della istruzione 70, e ciò spiega l'apparente paradosso.

Questo calcolo richiama alla mente di chi scrive un episodio con il quale intendo chiudere queste note. Venne da me tempo fa un piccolo imprenditore, anzianotto ma ancora ben portante, il quale mi disse in gran segreto di aver scoperto che tutti i matematici (da Archimede in poi) hanno sbagliato nel calcolo di pigreco, e che lui aveva intenzione di proporre un nuovo valore per questa costante. Gli dissi che l'avrei ascoltato, ma che prima avrebbe dovuto scrivere diligentemente le sue scoperte ed andare, con testimoni, da un notaio a depositare in busta chiusa e sigillata il suo lavoro; ciò per evitare i furti di idee e le contestazioni di priorità, e per garantirsi la personale gloria futura nella storia della matematica. Questo atteggiamento mi è servito quasi sempre per depistare e scoraggiare certi soggetti e quindi per evitare un secondo incontro, e per risparmiare le discussioni faticose, e spesso penose, ma soprattutto inutili, con personaggi che si credono geni incompresi e perseguitati, che sono spesso in preda ad idee fisse e non ammettono di aver sbagliato. Ma il soggetto in parola era più coriaceo degli altri, e ritornò dopo qualche tempo, dicendo che era andato da un notaio, secondo il mio consiglio, e mi consegnò un tabulato, ottenuto probabilmente con un programmino del tipo di quello esposto qui sopra. Riuscii a capire che egli possedeva un «computer» con il quale faceva i calcoli (e bene anche) della sua piccola e fiorente azienda; ma che era anche un matematico dilettante e volenteroso, e che usava la macchina anche per fare indagini teoriche.

Cercai di spiegargli che, anche presso gli antichi Greci, gli oracoli che il dio Apollo emanava per mezzo della Pizia dovevano essere opportunamente interpretati, per evitare spiacevoli conseguenze; e che, se ciò accadeva per gli oracoli di un dio, a maggior ragione debbono essere interpretati gli oracoli del computer, che è il nuovo feticcio del nostro tempo; che la macchina è certo infallibile, ma che l'uomo può errare nell'interpretare le risposte infallibili della macchina. Temo di non essere riuscito a convincere il mio volenteroso interlocutore; ma forse egli ha smesso i suoi sforzi di proporre un nuovo valore per pigreco, perché, a quanto so finora, pare che sia ancora in circolazione il vecchio valore...