TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ELEMENTARI

(M. Dedò, Mathesis,1975)

Premessa.

Quando la “base” della nostra associazione ha proposto l'argomento di questa conversazione, mi ha raccomandato di indugiare anche su questioni banali o molto note. Spero di non aver esagerato nel tentativo di accontentare questa richiesta e preventivamente mi scuso presso coloro che giudicheranno arcinote alcune delle considerazioni che verranno esposte.

Qualsiasi argomento di matematica può essere presentato oggi sia in forma intuitiva (elementare) sia in forma astratta (avanzata): questa affermazione è un po' arrischiata e, forse, non va presa alla lettera. Comunque, è vero che molte considerazioni di natura intuitiva sono state ormai "esplicate" e formalizzate, e che molti argomenti di ricerca matematica avanzata sono stati magistralmente esposti in forma intuitiva.

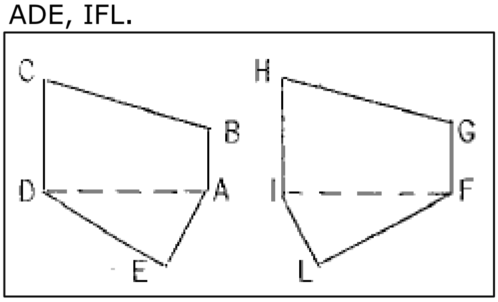
Mi è caro ricordare qui F. Enriques che si vantava con me di essere riuscito ad esporre al suo portinaio, che glielo aveva richiesto, le idee fondamentali di una ricerca che aveva in corso. Questo ricordo mi spinge anche ad affermare che, in generale, è molto più difficile presentare bene un argomento in forma intuitiva di quanto non lo sia presentarlo in forma avanzata. E aggiungo che sono fermamente convinto che una presentazione astratta, che oggi va fatta anche a livello secondario, risulta tanto più efficace quanto meglio siano conosciute, dal discente ma anche dal docente, le varie presentazioni intuitive che si possono fare dello stesso argomento. E non voglio lasciarmi sfuggire l'occasione per affermare che se un argomento è banale esso rimane tale anche con la presentazione più sofisticata.

<u>La evoluzione del concetto di uguaglianza in geometria elementare</u>.

In questa mia conversazione vorrei anche arrivare a dare una presentazione "avanzata" di alcune relazioni geometriche elementari; però, d'accordo con la precedente premessa, presenterò anzitutto queste relazioni da un punto di vista intuitivo.

La relazione più importante, per tutta la matematica ma anche per le altre scienze, è quasi certamente la relazione di <u>uguaglianza</u>. Sull'aspetto generale di questo concetto abbiamo già discusso, con una certa ampiezza, tre anni fa in occasione della mia conversazione dal titolo "Discorso sulla uguaglianza", pubblicata poi sul Periodico di Matematiche nell’agosto del 1973. Mi limiterò ora a fare qualche osservazione sul concetto di uguaglianza in geometria elementare.

Nella geometria elementare tradizionale si parlava quasi esclusivamente di uguaglianza tra figure geometriche e non di uguaglianza come trasformazione dell'intero piano (o spazio), così si definivano uguali due poligoni se essi avevano uguali tutti gli "elementi", cioè tutti i lati e tutti gli angoli. Questa definizione era <u>equivoca</u>, infatti un pignolo poteva fingere di capire che si esigesse che tutti i lati (o gli angoli) di uno stesso poligono dovessero essere uguali fra loro; ma, soprattutto, era anche <u>sbagliata</u>, infatti conduceva ad affermare che, ad esempio, sono uguali i due pentagoni segnati in figura, dove ai due quadrangoli direttamente uguali ABCD, FGHI che hanno anche uguali tra loro gli angoli LA e LD (e LI, LF), sono stati aggiunti due triangoli inversamente uguali ADE, IFL.



Per eliminare il primo inconveniente si aggiungeva un "rispettivamente" e per eliminare il secondo si aggiungeva un "ordinatamente". Finiva così per sorgere una corrispondenza biunivoca tra i vertici dei due poligoni e qualche autore definiva, correttamente, uguali due poligoni se avevano uguali tutte le coppie di elementi corrispondenti. Va detto che non tutti gli autori di libri di testo (né che tutti gli insegnanti) fossero sempre molto attenti all'uso di queste parole: rispettivamente, ordinatamente, o di altre quali associato, omologo. Come talvolta accade anche in matematica - almeno nella opinione del nostro compianto maestro, il prof. Ricci - si era venuto a stabilire un linguaggio "liturgico tribale" e vari autori ripetevano queste locuzioni pur avendo perso nozione della loro origine e, qualche volta, del loro significato. Perfino il magnifico testo di Enriques e Amaldi non è del tutto esente da queste critiche; induce infatti qualche perplessità trovare scritto (a p. 29 degli elementi di Geometria, ed. 1958) "due triangoli eguali hanno ordinatamente eguali i lati e gli angoli corrispondenti". Poiché gli autori avevano già prima precisato che cosa dovesse intendersi per corrispondenti, par proprio inutile la parola ordinatamente. Giova forse anche rilevare che non era raro trovare esaminatori troppo zelanti che tormentavano candidati che, nel "declamare" le definizioni, dimenticavano di aggiungere alcune di queste parole.
Spesso ci si preoccupava anche di definire la uguaglianza tra figure non poligonali e così, pignolescamente, si definivano uguali tutti i punti, tutte le rette, tutte le semirette, ecc. Capitava anche di leggere che un punto divide una retta a cui appartiene in due parti uguali, il che può anche risultare falso se non si forza il significato di "divide" (intendendo di operare una sezione e non una partizione).
Questa impostazione dell'insegnamento della teoria della congruenza (uguaglianza) era essenzialmente legata alla polemica, sostanzialmente ingiustificata, contro la trattazione di Euclide, a cui si attribuiva una definizione di uguaglianza come sovrapponibilità. In verità Euclide non si era mai preoccupato di definire l'uguaglianza che, sia pure implicitamente, era assunta come concetto primitivo. È solo nei trattatisti posteriori che l'uguaglianza viene derivata dal movimento, talvolta addirittura precisando che il movimento debba avvenire senza deformazione, cadendo così in un circolo vizioso.
Peraltro, questa polemica è servita a chiarire l'idea di uguaglianza in geometria e oggi possiamo affermare che non aveva del tutto ragione Helmoltz dichiarando che "non si può parlare di congruenza se non si possono muovere dei corpi rigidi o sistemi di punti senza deformazione"; ma non aveva del tutto ragione neppure Veronese affermando che la definizione dell'uguaglianza per mezzo del movimento "non può essere accettata senza che venga meno il rigore".
Effettivamente si conoscono oggi ottime sistemazioni rigorose della teoria che non ricorrono al movimento (basterà citare Hilbert) e altre, non meno rigorose, che vi ricorrono (ad esempio Peano e la sua scuola). Nel primo caso si assume come primitiva la relazione di congruenza tra segmenti (coppie di punti) e tra angoli (coppie di semirette con la stessa origine) e si postula quanto occorre per poter affermare che: i) si tratta di relazioni di equivalenza; ii) si possono trasportare segmenti e angoli; iii) vale il primo criterio di congruenza. Successivamente si estende la congruenza a tutto il piano. Nel secondo caso si assume come primitivo il concetto di movimento (cioè questo concetto non viene preso a prestito dalla meccanica) e si postula quanto occorre per poter affermare che i movimenti: i) sono trasformazioni puntuali; ii) mutano punti allineati in punti allineati; iii) formano gruppo; iv) esiste uno e un solo movimento che porta una nell'altra due bandiere. Bandiera è la figura costituita di un punto, pomo, di una semiretta che ha origine in questo punto, asta, di un semipiano la cui origine contiene questa semiretta, drappo (di semispazio la cui origine contiene questo semipiano).

La congruenza come trasformazione geometrica.
Come si è detto, si preferisce oggi, a ragione, definire la uguaglianza geometrica come una trasformazione puntuale che opera su tutto il piano (o su tutto lo spazio). Si preferisce anche abbandonare la parola uguaglianza (riservandola alla identità) e parlare di congruenza (altri

autori usano la parola isometria): si diranno poi congruenti due figure quando esista una congruenza che porta l'una nell'altra. In certo qual senso, dal punto di vista intuitivo, possiamo dire che si è tornati alla sovrapponibilità, estesa a tutto il piano (spazio) e debitamente precisata.
D'accordo con la premessa, prima di arrivare alle precisazioni, ritengo opportuno presentare, da un punto di vista descrittivo, vari tipi di congruenza.
Traslazione. La presentazione intuitiva di questa ben nota trasformazione dovrà partire da modelli concreti tratti dalle esperienze degli scolari: spostamento di un cassetto, di un ascensore, di una funicolare (spostamenti orizzontali, verticali, ma anche spostamenti obliqui). Si arriverà anche a modelli un po' più astratti, quale quello di far scorrere sulla lavagna un foglio di plastica trasparente (che vi aderisca perché è stato elettrizzato strofinandolo), in modo che una retta segnata sul trasparente scorra su una retta segnata sulla lavagna. Si dovrà mettere in chiara evidenza che si vuol stabilire una applicazione, cioè che la sola cosa che qui interessa è la relazione tra la posizione iniziale e la posizione finale e non le vicissitudini intermedie. Si faranno poi scoprire alcune delle seguenti proprietà:
(a) La traslazione risulta definita da una coppia di punti corrispondenti.
(b) È una applicazione obiettiva del piano in sé (o dello spazio in sé).
(c) Conserva le lunghezze egli angoli.
(d) Non ha punti uniti.
(e) Conserva le direzioni. (Costruzione di parallele con riga e squadra).
(f) Vi è un fascio di rette parallele che sono unite.
(g) Il prodotto di due traslazioni è una traslazione, con una sola eccezione che si rimuove introducendo la traslazione identica.
(h) Il prodotto è commutativo (regola del parallelogrammo).
(i) Le traslazioni formano gruppo (abeliano): la T-congruenza, cioè la congruenza per traslazione, è quindi una relazione di equivalenza.
(j) Le potenze, ad esponente intero, di una traslazione formano un gruppo che è isomorfo a Z.

Come ho già detto, queste proprietà, almeno al primo approccio, dovrebbero essere scoperte dagli allievi, guidati da domande opportune, in esercitazioni pratiche dove si disponga di modelli adatti, facilmente realizzabili, fatti costruire o, addirittura, fatti inventare dagli allievi. Non sarà necessario presentare tutte queste proprietà e potrà risultare stimolante proporre esercizi che ne introducano altre, quale la ricerca della base del gruppo abeliano delle traslazioni che mutano in sé un foglio (illimitato) di carta quadrettata o che generano il disegno di una tappezzeria o di un tessuto. E si potrà anche arrivare a trattare alcuni problemi di matematica ricreativa che riguardano la T-eguiscomponibilità, cioè l'indagine se due figure si possono scomporre in parti a due a due T-congruenti.
Spesso le proprietà andranno riformulate in forma intuitiva, senza fare sfoggio di parole tecniche sconosciute (biiettiva, punti uniti, gruppo, abeliano, isomorfismo, ecc.): parole e concetti che verranno ripresi in trattazioni successive, per le quali sarà stato così preparato un prezioso materiale di esempio.
E vorrei anche dichiarare che non sono d'accordo con coloro che, a questo livello, sfoggiano nozioni relativistiche sulla alterazione delle lunghezze, introducendo questioni critiche che, quando pure siano state bene intese dal docente, sarebbero mal intese dal discente.

Rotazione. Anche qui si partirà da modelli concreti noti e se ne costruiranno altri più schematizzati. Sarà bene fare anche riferimento a casi in cui l'asse di rotazione è soltanto ideale (movimento su rotaie o della Luna) ed insistere sul fatto che la rotazione va estesa a tutto il piano (la giostra, prolungata, può essere un modello suggestivo) e che la rotazione non va intesa come un movimento ma come una applicazione della posizione iniziale sulla posizione finale. Nell'elencare le proprietà da far scoprire agli allievi ci riferiremo alla trasformazione nel piano; è però opportuno fare anche qualche riferimento allo spazio, almeno per chiarire alcuni

equivoci della nomenclatura corrente. In questo contesto la rotazione avviene sempre intorno ad un asse-e, ad esempio, non è lecito parlare della rotazione di un oggetto che sia vincolato con un giunto cardanico.
Ecco alcune proprietà:
(a) Esiste sempre un punto unito (il centro della rotazione): è fondamentale la costruzione di questo punto quando sia data una figura e la sua trasformata (sta sugli assi delle coppie di punti corrispondenti).
(b) È comodo definire una rotazione mediante una coppia di semirette corrispondenti, che hanno la stessa origine. Risulta così il centro e l'ampiezza della rotazione: questa è un angolo e, in quanto tale, è definita a meno di multipli di 2π. Potrà convenire riferirsi alla misura principale (non negativa e minore di 2π) o alla misura aritmetica (positiva o negativa e, in valore assoluto, minore di π).
(c) Se le due semirette sono opposte, allora si ha il mezzogiro o simmetria centrale. Parlando di questa notevole trasformazione sarà opportuno far elencare figure che hanno un centro di simmetria. Si potrà anche utilmente divagare citando il ben noto gioco del tavolino dotato di centro di simmetria: due giocatori si alternano nel collocare uno stesso oggetto (un sigaro, nella versione originale) sul tavolino e perde chi non trova più spazio sufficiente per collocarne un altro. La strategia è quella di occupare sempre la posizione simmetrica di quella occupata dall'avversario: chi gioca per primo, se occupa il centro, è sicuro di poter vincere. Si ha così l'occasione di mettere in evidenza che si ha qui un caso di congruenza "allo stato puro", cioè una pura associazione dei punti alle loro immagini, senza dover pensare a trasformazioni continue che trasportino gli uni nelle altre.
(d) Vi è un fascio di circonferenze concentriche unite.
(e) Tutte le direzioni sono alterate di uno stesso angolo (ampiezza della rotazione).
(f) Una rotazione è anche definita da una coppia di semirette (che non siano parallele ed equiverse). Costruire il centro.
(g) Il prodotto di due rotazioni, in generale, non è commutativo (esempi e controesempi).
(h) Il prodotto di due rotazioni è una rotazione o una traslazione (precisare): quindi le rotazioni non formano gruppo.
(i) Le rotazioni con un dato centro formano un gruppo abeliano: a differenza di quanto accadeva per le traslazioni, questo gruppo può anche risultare un gruppo finito. Anche qui andrà introdotta la rotazione identica.
(j) Le potenze ad esponente intero di una rotazione formano un gruppo abeliano a cui Z è omomorfo: risulta un isomorfismo se l'ampiezza è incommensurabile con π.
(k) Il prodotto (non commutativo) di una rotazione per una traslazione è una rotazione (tranne, ovviamente, il caso in cui la rotazione sia identica).
(l) L'insieme delle rotazioni e delle traslazioni è un gruppo (non abeliano): è il gruppo delle congruenze dirette. Ciò significa affermare che ogni congruenza diretta è una rotazione o una traslazione. Le congruenze dirette inducono una relazione di equivalenza tra figure geometriche, le quali si diranno direttamente congruenti se esiste una congruenza diretta che porta l'una nell'altra.

Anche qui si può ripetere quanto è stato detto a commento delle proprietà delle traslazioni. In particolare, sarà utile ricorrere a modelli per realizzare esempi e controesempi di proprietà poco intuitive. Molte proprietà potranno essere formulate direttamente dall'allievo per analogia (o per contrasto) con quelle elencate per le traslazioni. Potrà apparire inaspettata l'ultima proprietà e, ad esempio, desterà interesse la costruzione del centro della rotazione che porta l'uno nell'altro due triangoli direttamente congruenti (che non abbiano i lati paralleli), disegnati, ad esempio, trasportando, senza ribaltarlo, un ritaglio di carta (o una squadretta).

Simmetria rispetto ad una retta (o riflessione). I modelli concreti da cui si potrà partire sono lo specchio piano (meglio se argentato su entrambe le facce), la carta piegata, una porta (meglio se è del tipo ribaltabile, con l'asse di rotazione in centro), le pagine di un libro o quaderno, ecc. Spesso è anche chiamata simmetria assiale o, addirittura, ribaltamento: queste denominazioni implicano la considerazione di una rotazione di mezzo giro nello spazio e la restrizione di questa trasformazione al piano considerato (che conterrà l'asse della rotazione). Vi è qualche buona ragione per non fare riferimento a tale rotazione (e quindi di evitare di parlare di asse di simmetria, dicendo semplicemente retta di simmetria), sia per non introdurre elementi estranei, sia, soprattutto, per liberarsi dal movimento come trasformazione continua. Se non si fa riferimento alla rotazione, ad esempio con uno specchio, si realizza un'altra congruenza allo "stato puro".

Ecco alcune proprietà:

(a) Risulta una trasformazione puntuale del piano intero in sé (non di un solo semipiano nell'altro).

(b) È definita da una coppia di punti corrispondenti.

(c) Vi è una retta di punti uniti (retta di simmetria), che è l'asse di ogni coppia di punti corrispondenti.

(d) Vi è un fascio di rette parallele, perpendicolari alla retta di simmetria, che sono unite.

(e) Due rette corrispondenti si incontrano sulla retta di simmetria o sono entrambe parallele a questa retta.

(f) La trasformazione è involutoria.

(g) Il prodotto di due simmetrie è una rotazione o una traslazione. (Precisare).

(h) Il prodotto di due simmetrie è commutativo solo nel caso in cui le due rette di simmetria sono perpendicolari (o, banalmente, coincidenti).

(i) Le simmetrie non formano gruppo e, quindi, non inducono una relazione di equivalenza.

(j) La trasformata di una simmetria s_1 mediante una simmetria s_2 (cioè il prodotto $s_2 s_1 s_2^{-1}$) è ancora una simmetria s_3. Qual è la retta di simmetria di s_3? Quando accade che $s_3 = s_1$?

(k) Il prodotto di una simmetria per una traslazione, perpendicolare alla retta di simmetria, è una simmetria (precisare).

(l) Bastano al più tre simmetrie per portare una nell'altra due figure congruenti.

(m) Ogni congruenza inversa è una antitraslazione (cioè è il prodotto commutativo di una simmetria per una traslazione - eventualmente identica - parallela alla retta di simmetria).

Come per gli altri concetti, non abbiamo dato alcuna definizione di congruenza, congruenza diretta, congruenza inversa che andranno qui intese nel loro aspetto intuitivo.

Tra le esercitazioni basterà qui segnalare la ricerca di figure note dotate di una o più simmetrie; la generazione di "pavimentazioni" (mosaici) generate da riflessioni parallele o perpendicolari o inclinate di un sottomultiplo di π.

A questo punto sono disponibili tutte le congruenze: esse formano gruppo e, quindi, inducono una relazione di equivalenza (geometria metrica).

Ricordiamo che alcuni autori preferiscono la denominazione isometria, inoltre invece degli aggettivi diretta o inversa si trovano spesso le qualificazioni concorde o discorde o, anche, pari o dispari.

Considerazioni di carattere generale sulle congruenze.

Le proprietà precedentemente elencate contenevano, implicitamente, il seguente notevole

Teorema. Esiste una e una sola congruenza che porta una bandiera, $\langle A, a, \pi \rangle$, in un'altra, $\langle A', a', \pi' \rangle$.

Vale forse la pena di dare qui una dimostrazione esplicita di questo teorema.

La simmetria s_1: $A \to A'$ porta $\langle A, a, \pi \rangle$ in $\langle A', a_1, \pi_1 \rangle$; se $a_1 = a'$ e $\pi_1 = \pi'$, allora la congruenza richiesta è la simmetria s_1. Altrimenti consideriamo la simmetria s_2: $a_1 \to a'$, la quale porterà $\langle A', a_1, \pi_1, \rangle$ in $\langle A', a', \pi_2 \rangle$; se $\pi_2 = \pi'$, allora la congruenza richiesta è data dal prodotto $s_2 s_1$ che rappresenta una congruenza diretta che è precisamente una traslazione (se a, a' sono parallele e concordi) o una rotazione. Altrimenti consideriamo la simmetria

s_3: $\pi_2 \rightarrow \pi'$: il prodotto $s_3s_2s_1$ (che come vedremo è una antitraslazione) dà la congruenza richiesta. Ovviamente nel caso in cui sia A = A', la congruenza richiesta risulta dal prodotto di non più di due simmetrie.
L'unicità della congruenza - che, ovviamente, non significa unicità di costruzione - segue dal fatto che tutte le congruenze che portano <A, a, π> in <A', a', π'>, portano un qualunque punto P nello stesso punto P'. Infatti, è ben determinata (unica) la immagine di un punto B della semiretta a ed è ben determinata la immagine del triangolo ABP (situato o non nel semipiano π).
Il caso in cui la congruenza richiesta risulti una congruenza diretta è già stato precisato (si ha una traslazione o una rotazione). Una congruenza inversa non si può invece ricondurre sempre ad una sola trasformazione "elementare": o si tratta di una simmetria oppure è il prodotto di una simmetria per una congruenza diretta. Tra le varie decomposizioni "canoniche" che si possono fare, la più notevole è quella che riconduce ogni congruenza inversa al prodotto commutativo di una traslazione per una simmetria parallela alla traslazione: è questa la trasformazione che abbiamo già chiamato antitraslazione. Per stabilire questo fatto, consideriamo la retta m che passa per il punto medio di AA' e che biseca le direzioni (orientate) delle semirette a, a': la antitraslazione che ha la retta m come retta unita porta effettivamente (se la congruenza considerata è inversa) una bandiera nell'altra e quindi, per la unicità prima dimostrata, la congruenza data coincide con questa antitraslazione.

Presentazione intuitiva di altre trasformazioni geometriche elementari.
Omotetia. È forse il più semplice esempio di similitudine, motivata, ad esempio, dal problema dell'ingrandimento o della rappresentazione in scala. Tra i vari modelli si può esibire l'abituale pantografo (parallelogrammo articolato) o un pantografo più rudimentale che si realizza con un filo elastico fissato ad un estremo e che all'altro estremo porta una punta scrivente: mantenendo teso l'elastico si fa percorrere ad un punto intermedio (segnato eventualmente con un nodo) la figura da ingrandire; la punta scrivente descriverà l'ingrandimento. Non c'è da sperare di ottenere così un buon disegno, ma è facile visualizzare così la proprietà fondamentale.
Come precedentemente, enunciamo alcune proprietà:
(a) Esiste un (solo) punto unito O, che si chiama il centro di omotetia.
(b) Le rette per O sono rette unite.
(c) Le distanze da O sono tutte moltiplicate per un fattore costante k (diverso da zero) che si chiama rapporto di omotetia (o fattore di scala). Non si esclude che k sia negativo; in particolare, per k = -1, si ritrova la simmetria centrale.
(d) La trasformazione, biunivoca in tutto il piano, trasforma punti allineati in punti allineati.
(e) Ogni lunghezza viene moltiplicata per k. Ogni area è moltiplicata per k^2.
(f) Una circonferenza di centro C e raggio r, si trasforma nella circonferenza di centro C' (trasformato di C) e raggio kr. Questa proprietà è anche più facile da giustificare della (d), la quale si può giustificare, in modo analogo, pensando la retta come luogo dei punti equidistanti da due punti dati.
(g) Rette corrispondenti hanno la stessa direzione (l'eventuale punto comune, diverso da O, sarebbe unito).
(h) Angoli corrispondenti sono congruenti.
(i) Figure corrispondenti sono simili (hanno la stessa forma geometrica).
(j) Le potenze ad esponente intero di una data omotetia (tra le quali figura l'omotetia identica, con k = 1) formano un gruppo abeliano che è isomorfo a Z.
(k) Il prodotto di due omotetie è una omotetia o una traslazione (precisare).
(l) Non sempre il prodotto di due omotetie è commutativo (esempi e controesempi).
(m) Le omotetie non formano gruppo e, quindi, non inducono una relazione di equivalenza.
(n) Si può forzare la proprietà (k) e riguardare le traslazioni come omotetie particolari (con il centro improprio): si ha così un gruppo (e una relazione di equivalenza).

(o) Esistono due omotetie (una del le quali è, eventualmente, una traslazione) che mutano una nell'altra due circonferenze date. Fissato il raggio CP vi sono infatti due raggi $C'P_1'$, $C'P_2'$ paralleli (concordi o non): i due centri 0_1 e 0_2 delle omotetie sono i punti comuni a CC' e, rispettivamente, PP_1', PP_2', 0_1, 0_2 sono detti <u>centri di similitudine</u> dei due cerchi dati.

Esercizi: costruire il centro di una omotetia che muta uno nell'altro due triangoli che abbiano i lati paralleli; lo stesso per due quadrangoli (precisare); lo stesso per due quadrati, per due poligoni regolari. Costruire le tangenti comuni a due circonferenze (quante sono?).

<u>Similitudine</u>. Si può ottenere come prodotto di una omotetia per una congruenza: diciamo che si fa un ingrandimento (o impicciolimento) e poi lo si porta altrove, anche su altro foglio. Diventa quindi facile elencare e giustificare le seguenti proprietà:

(a) Le omotetie e le congruenze sono particolari similitudini.

(b) La similitudine è una trasformazione biunivoca in tutto il piano (o tra due piani) che trasforma rette in rette e circonferenze in circonferenze (i centri delle quali sono punti corrispondenti).

(c) Tutte le lunghezze risultano moltiplicate per uno stesso numero k (<u>fattore di scala</u>); le aree risultano moltiplicate per k^2.

(d) Le similitudini (tra piani sovrapposti, o tra piani orientati) si possono classificare in similitudini <u>dirette</u> o similitudini <u>inverse</u>.

(e) Gli angoli corrispondenti sono congruenti.

(f) Due coppie di punti corrispondenti, <A, A'>; <B, B'> definiscono due similitudini, una diretta e l'altra inversa.

(g) Ogni similitudine diretta, che non sia una traslazione, ha un (solo) punto unito. Infatti supponiamo che la similitudine non sia una omotetia (caso in cui la proprietà è banalmente vera) e che i segmenti corrispondenti AB, A'B' si incontrino in Z: il punto unito è la ulteriore intersezione O delle circonferenze AA'Z e BB'Z (figura 1). Per giustificare questa affermazione basta osservare che, per le proprietà angolari dei quadrangoli inscritti in una circonferenza, due triangoli ABO, A'B'O risultano (direttamente) simili. (Non dà difficoltà l'esame del caso particolare in cui O = Z).

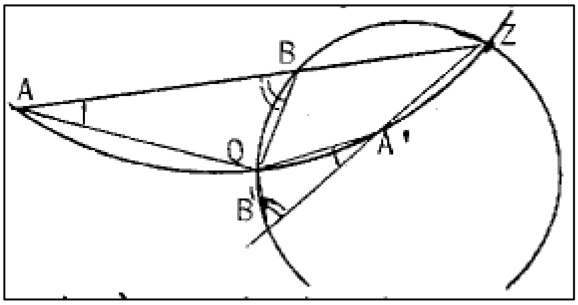


Figura 1

(h) Ogni similitudine diretta, che non sia una traslazione, è una <u>rotoomotetia</u>, cioè si può decomporre nel prodotto commutativo di una omotetia per una rotazione aventi lo stesso centro (che è appunto il precedente punto unito O).

(i) Il prodotto di una omotetia di centro O per una simmetria rispetto ad una retta m passante per O, è commutativo e dà luogo ad una similitudine inversa che si chiama <u>antiomotetia</u>: per essa sono uniti il punto O (centro), la retta me la perpendicolare n al la m per O (<u>assi del la antiomotetia</u>).

(j) Ogni similitudine inversa, che non sia una antitraslazione, è una antiomotetia. Infatti, una tale similitudine è il prodotto di una omotetia per una congruenza inversa (antitraslazione), cioè è il prodotto di una omotetia per una traslazione e per una simmetria. Ricordando che il prodotto di una omotetia per una traslazione è un'altra omotetia, possiamo pensare che la similitudine data sia il prodotto di una omotetia, di centro U, per una simmetria rispetto ad una

retta r. Sulla perpendicolare alla r per U vi è un punto O che è unito per la similitudine data (detto k il fattore di scala e c la distanza di r da U, un facile calcolo mostra che tale punto ha da U distanza $2c/(1+k)$). Siano m, n le rette per O che sono, rispettivamente, parallela e perpendicolare alla retta: le antiomotetie che hanno centro in O e assi le rette m,n e fattore di scala k o $-k$, coincidono con la similitudine data.
La costruzione del centro e degli assi delle antiomotetie, equivalenti alla similitudine data, si può fare rapidamente congiungendo i punti A_1, B che dividono internamente le coppie di punti corrispondenti A, A'; B, B′ nel rapporto AB/A'B'; e congiungendo i due punti A_2, B_2 che dividono esternamente le stesse due coppie nello stesso rapporto. (Come sottoprodotto si trova che le due rette m e n che così risultano sono perpendicolari).
Per giustificare la costruzione precedente si consideri una antiomotetia, di centro O e assi m, n: siano A_1, A_2 i punti in cui la retta AA', che congiunge due punti corrispondenti, taglia le rette m, n. Le rette corrispondenti 0A e 0A', poiché la similitudine conserva gli angoli, sono bisecate dalle rette unite m e n e pertanto (teorema della bisettrice) A_1, A_2 dividono, internamente ed esternamente, il segmento AA' nel rapporto 0A/0A'=$1/k$.
(l) Le similitudini formano gruppo e, quindi, inducono una relazione di equivalenza (Geometria simile).

Esercizi: far costruire una similitudine che sia definita da: i) una coppia di segmenti corrispondenti (far precisare); ii) una coppia di triangoli simili (casi particolari: rettangoli, isosceli, equilateri). Sarà utile semplificare le costruzioni ricorrendo alle decomposizioni canoniche prima presentate. In ciascun caso sarà utile far precisare il numero delle soluzioni. Far costruire la figura simile, con dato fattore di scala, di una figura data (anche poligoni non convessi, o figure più complicate). Uso di quadrettature per ingrandire. Può essere stimolante fare rappresentare su due lucidi, in scale diverse una stessa regione geografica e far notare che se si sovrappongono i due lucidi vi è un punto unito (cioè coincidono le immagini diverse di una stessa località).

Affinità omologica ortogonale. Può essere presentata come una espansione o contrazione che si ottiene precisamente moltiplicando per uno stesso fattore $k \neq 0$ tutte le distanze da una data retta, detta asse della affinità omologica. Generalizza la simmetria che si ritrova per $k = -1$.
Ecco alcune proprietà:
(a) È una trasformazione puntuale di tutto piano.
(b) Vi è una retta di punti uniti (l'asse).
(c) Punti allineati si trasformano in punti allineati
(d) Vi è un fascio di rette parallele, perpendicolari all'asse, che sono unite.
(e) Due rette corrispondenti si incontrano sull'asse o sono entrambe parallele all'asse.
(f) La trasformazione può essere definita da una coppia di punti corrispondenti e dal fattore k.
(g) Tutte le affinità omologiche ortogonali che hanno un dato asse, formano un gruppo.
(h) Le distanze fra coppie di punti situate su rette di data direzione sono tutte moltiplicate per uno stesso fattore h; in particolare $h = 1$ per la direzione dell'asse e $h = k$ per la direzione perpendicolare all'asse.
(i) Tutte le aree sono moltiplicate per uno stesso fattore, che è lo stesso k.
(j) Rette parallele si trasformano in rette parallele (in particolare un parallelogrammo si trasforma in un parallelogrammo).
(k) Esiste sempre una affinità omologica ortogonale che trasforma un dato rettangolo in un quadrato. Si assuma l'asse parallelo ad un lato….)
(l) Esiste sempre una affinità omologica ortogonale che trasforma un dato parallelogrammo in un rettangolo. (Si assuma come asse una diagonale….)
(m) Esiste sempre una affinità omologica ortogonale che trasforma un dato triangolo isoscele in un triangolo equilatero. (Si assuma come asse una parallela alla base….)
(n) Esiste sempre una affinità omologica ortogonale che trasforma un dato triangolo in un

triangolo isoscele. (Si assuma, ad esempio, come asse il lato AB del triangolo dato e si faccia corrispondere al terzo vertice C un punto C' tale che CC' è perpendicolare ad AB e AC' = AB).
(o) Ogni affinità omologica ortogonale si può costruire come prodotto di una proiezione ortogonale del nostro piano π su un altro piano π_1 passante per l'asse, e di un ribaltamento, intorno all'asse, di π_1 su π. Infatti, si vede facilmente che dopo queste due operazioni le distanze dall'asse risultano moltiplicate per $1/\cos \pi\pi_1$
(p) Una circonferenza si trasforma nella proiezione ortogonale di una circonferenza, cioè in una ellisse. (Della quale si possono così stabilire le varie proprietà: in particolare la formula che dà l'area).
(q) Esiste sempre una affinità omologica ortogonale che trasforma una data ellisse in una circonferenza. (Si assuma l'asse parallelo ad un asse della ellisse e moltiplicatore il rapporto delle lunghezze degli assi).

Esercizi: oltre a quelli, analoghi ai precedenti, riguardanti la costruzione di affinità variamente determinate, si possono presentare molti interessanti problemi di geometria affine. Si osservi infatti che il prodotto di un numero finito di affinità omologiche ortogonali dà luogo a trasformazioni più generali (affinità), che formano gruppo, per le quali valgono ancora le proprietà (a), (c), (h), (i), (j), (p). Operando con queste nuove trasformazioni si potrà risolvere qualsiasi problema di geometria affine (cioè che, in particolare, si riferisca alle proprietà ora citate) relativo ad un parallelogrammo o ad un triangolo o ad una ellisse, sostituendo a queste figure rispettivamente un quadrato, un triangolo equilatero o una circonferenza.

Esempi.
1. Trovare il minimo parallelogrammo che si ottiene dividendo i lati (orientati) di un dato parallelogrammo secondo uno stesso rapporto k. (Riferendosi ad un quadrato diventa banale trovare $k = -1$).
2. Dimostrare che il triangolo PQR, che ha vertici sui lati di un dato triangolo ABC, non è mai minore di ciascuno degli altri triangoli in cui risulta scomposto il triangolo dato. (Supponendo che PQR sia equilatero, il fatto è banalmente vero se anche ABC è equilatero, ma è anche vero se uno degli altri triangoli, diciamo AQR, ha ∠A >60°, e ciò deve sempre accadere perché tre angoli di ABC non possono essere tutti minori di 60°).
3. Si può dare una nuova dimostrazione dell'esistenza e delle proprietà del baricentro, riferendosi ad un triangolo equilatero.
4. Trovare il massimo triangolo inscritto in una ellisse. (Nella circonferenza è equilatero; nell'ellisse avrà ciascun lato parallelo alla tangente nel vertice opposto). Come sottoprodotto si trova che, nell'ellisse, tutti triangoli cosiffatti sono equivalenti.

Simmetria obliqua. Si presenta in un triangolo, rispetto a ciascuna mediana, in un parallelogrammo, rispetto a ciascuna mediana, ecc. Come trasformazione geometrica piana si ottiene associando ad ogni punto P il punto P' tale che PP' abbia una data direzione (costante) e sia dimezzato da una data retta (asse della simmetria). Valgono con ovvi adattamenti le precedenti proprietà (a), (b), (c), (d), (e), (h), (i) (anzi le aree, a parte l'orientamento, sono conservate), (j).
Considerando la simmetria obliqua che ha per asse una mediana di un triangolo, diventa banale dimostrare che le tre mediane passano per uno stesso punto.

Affinità omologica speciale. Può essere introdotta a partire dallo scorrimento che subiscono le carte da gioco di un mazzo quando si passa dalla forma di parallelepipedo retto a quella di parallelepipedo obliquo.
Precisamente ad ogni punto P si associa un punto P' tale che PP' sia parallelo ad una retta fissa (asse) e tale che le rette AP, A'P' si incontrino sull'asse o siano entrambe parallele all'asse, essendo A, A' una data coppia di punti corrispondenti (situati su una parallela all'asse).

Valgono, anche per questa trasformazione, le precedenti proprietà (con qualche adattamento). Le aree sono, anche qui, conservate.
Al gruppo delle affinità generali, di cui abbiamo già parlato e che dà luogo alla geometria affine, appartengono, oltre alle affinità particolari ora presentate, anche le similitudini e, quindi, le isometrie. Dalle considerazioni fatte sono già emerse le proprietà principali. Vogliamo solo far vedere che risulta anche la proprietà fondamentale:
Esiste una e una sola affinità che porta uno nell'altro due triangoli dati. Si osservi infatti che ogni triangolo si può trasformare, con una affinità, in un triangolo equilatero e che due triangoli equilateri sono simili. Per la unicità occorrerà solo precisare che l'affinità di cui si parla porta, diciamo, il triangolo ABC nel triangolo A'B'C', non, ad esempio, in B'A'C'.
Inversione circolare. È questa una trasformazione geometrica che non ha carattere proiettivo, cioè non trasforma rette in rette ma rette in circonferenze. Peraltro, essa si può definire e trattare in forma elementare e trova applicazioni in fluidodinamica e in elettrologia.
Si tratta di una applicazione biunivoca di tutti i punti diversi da un punto fisso O (centro di inversione), che associa ad ogni punto P il punto P' tale che P e P' sono allineati con O e $OP\llcorner \cdot OP' = k$ (k, potenza dell'inversione, deve essere diverso da zero).

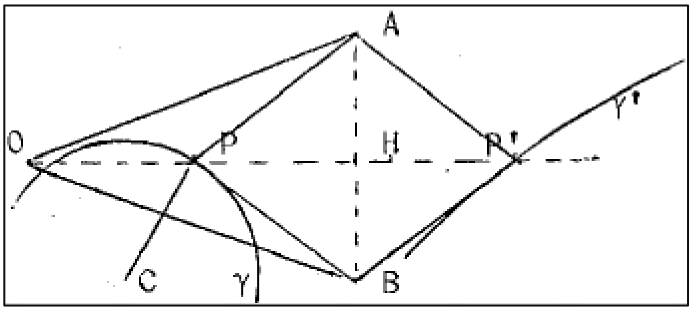
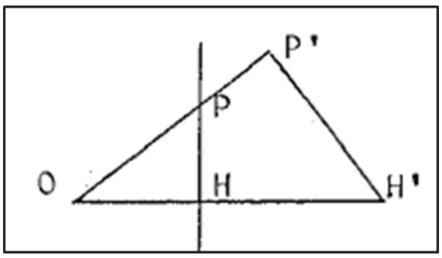


Figura 2

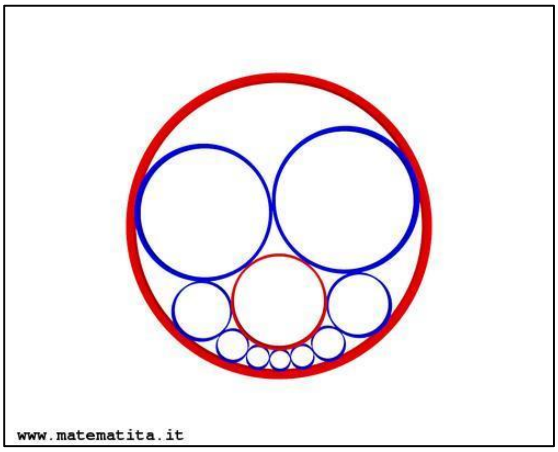
Volendo appoggiare la sua introduzione su un modello concreto, si potrà realizzare l'inversore di Peaucellier (figura 2): si tratta di un sistema articolato, costituito di due sbarre di lunghezza a, incernierate in un punto fisso O, e di altre quattro sbarre, di lunghezza b, incernierate tra loro in modo da formare un rombo che ha due vertici opposti incernierati alle estremità libere delle prime due aste. Detti P e P' i due vertici liberi del rombo, sorge tra P e P' una corrispondenza che è appunto una inversione circolare (ristretta alla regione raggiungibile con l'apparecchio). Si osserva infatti che i tre punti O, P, P' si mantengono allineati (stanno sull'asse di AB, altra diagonale del rombo); inoltre si ha, successivamente, OP·OP' = (OH-PH)(OH+HP') = OH^2-PH^2 = (OH^2+HA^2) - (PH^2+HA^2)= $a^2 - b^2$.
In forza delle proprietà che ora esporremo, si può usare l'apparecchio come compasso per disegnare archi di cerchi molto grandi: basta aggiungere una settima sbarra CP e fissare C in modo che P descriva una circonferenza γ, prossima ad O, e P' descriverà il corrispondente arco di circonferenza (se la prima circonferenza passa per O, la seconda diventa una retta).
Enunciamo alcune proprietà.
(a) La trasformazione è biunivoca in tutto il piano, con la sola eccezione del punto O: si può rimuovere questa eccezione introducendo un ente astratto O', corrispondente di O (cioè ampliando il piano con un solo punto improprio).
(b) Le rette per O sono unite.

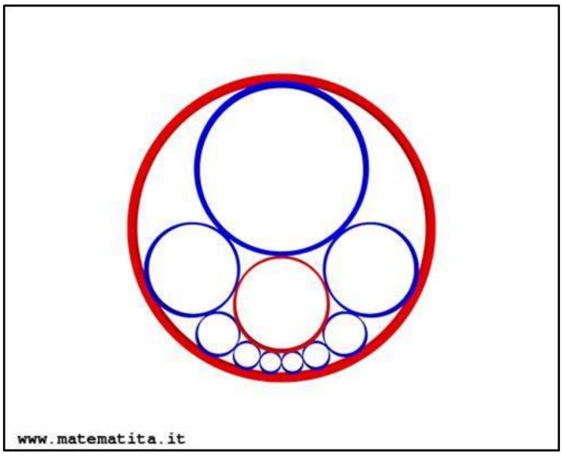


(c) Se k < 0, allora non vi sono punti uniti; se $k > 0$, allora sono uniti tutti i punti della circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{k}$ (circonferenza fondamentale).
(d) La trasformazione è involutoria.
(e) Una retta non passante per O viene trasformata in una circonferenza tangente in O ad una retta parallela alla data. Si può stabilire questa proprietà osservando che l'inverso P',

di un punto P, vede sotto un angolo retto il segmento OH', essendo H' l'inverso del piede H della perpendicolare condotta da O alla retta data: risultano infatti simili i triangoli OPH, OH'P', perché OP:OH' = OH:OP'.
(f) Una circonferenza per O si muta in una retta parallela alla tangente in O.
(g) Ogni circonferenza passante per due punti corrispondenti è unita. Infatti, siano P, P' i punti dati e Q, Q' due punti della circonferenza allineati con O. Si ha OQ·OQ' = OP·OP' (teorema della secante) e quindi Q' è l'inverso di Q.
(h) Il prodotto di due inversioni che abbiano lo stesso centro è una omotetia che ha lo stesso centro.
(i) Ogni inversione circolare si può decomporre nel prodotto di una inversione circolare concentrica, di potenza arbitraria, per una omotetia concentrica.
(j) Una circonferenza γ, non passante per O, si trasforma in una circonferenza γ', non passante per O. Infatti, pensiamo di decomporre l'inversione data nel prodotto di una inversione concentrica la cui potenza sia uguale alla potenza di O rispetto a γ (e per questa inversione γ è unita) per una omotetia concentrica (e per questa omotetia la γ va in una circonferenza γ').
(k) Se O è interno a γ, allora esso è anche interno a γ': le due circonferenze risultano ugualmente <u>orientate</u> e i punti <u>interni</u> a γ si trasformano in punti <u>esterni</u> a γ'. Se invece O è esterno a γ, allora esso è anche esterno a γ', le circonferenze risultano orientate in versi opposti e i punti interni a γ vanno in punti interni a γ'.
(m) L'angolo formato da due curve γ_1, γ_2 in un loro punto comune P è uguale e contrario all'angolo formato in P' da γ'_1, γ'_2. Infatti, ove si noti che l'inversione conserva il contatto di due curve (naturalmente le curve devono ammettere tangente), basterà riferirci al caso in cui γ_1 e γ_2 siano due rette: queste si mutano in due circonferenze γ'_1 e γ'_2 che si tagliano in O e in P'; l'angolo in O è uguale, per la (e), all'angolo di $\gamma_1\gamma_2$ ed è uguale e contrario all'angolo formato dalle stesse circonferenze in P'.
(n) La circonferenza fondamentale (quando esista) è perpendicolare ad ogni circonferenza unita. Risulta come corollario della proprietà precedente, ma si può stabilire direttamente in forza del teorema della secante e della tangente.
(o) Vi sono due inversioni che mutano una nell'altra due circonferenze date: hanno centro nei centri di similitudine delle due circonferenze.
(p) Una coppia di circonferenze γ_1 , γ_2 si può sempre trasformare, con una inversione, in: i) una coppia di rette, se γ_1 , γ_2 sono secanti; ii) in una coppia di rette parallele, se γ_1 , γ_2 sono tangenti; iii) in due circonferenze concentriche se γ_1 , γ_2 non sono secanti. Il solo caso che non è ovvio è il terzo, a meno che non si ricordi che esiste un fascio di circonferenze ortogonali a due circonferenze date: prendendo come centro di inversione uno dei punti base di questo fascio (<u>punto limite</u> per le circonferenze date), risultano due circonferenze γ_1 , γ_2 le quali sono tagliate ortogonalmente dalle rette di un fascio, cioè sono concentriche.
(q) Le inversioni circolari non formano gruppo: si ottiene un gruppo considerando le trasformazioni più generali che sono prodotto di un numero finito di inversioni circolari <u>(Geometria anallagmatica</u>).
(r) Trasformando una inversione circolare con una inversione circolare si ottiene una inversione circolare.

Una importante applicazione delle inversioni circolari è quella di "semplificare le figure", soprattutto in questioni di geometria elementare che riguardino circonferenze e loro angoli (in particolare perpendicolarità e contatti). Infatti, a meno di inversioni circolari, ci si potrà riferire a rette o a circonferenze particolarmente comode. A titolo di esempio voglio ricordare la semplicissima dimostrazione di uno dei ben noti "porismi" di Steiner: se nella zona compresa fra due circonferenze non secanti si inseriscono altre circonferenze tangenti alle due circonferenze date e tali che ciascuna tocchi esternamente la successiva, allora può accadere che l'ultima tocchi la prima. Ed ecco il porisma: se ciò accade partendo da una circonferenza, allora accade sempre, qualunque sia la posizione della prima circonferenza inserita.





La dimostrazione è ovvia se, in forza della (p), ci si riferisce a circonferenze concentriche.

Proiezione stereografica della sfera. Si tratta ora della applicazione di una sfera su un piano. Si potrà partire dal problema della cartografia, cioè della rappresentazione della Terra (o di una sua regione) su una carta geografica: poiché la sfera non è una superficie sviluppabile, si avranno sempre delle distorsioni; se si vuole che gli angoli non siano distorti, cioè se si vuole una rappresentazione conforme, si ricorrerà alla proiezione stereografica.
Fissato un punto O della sfera ω, si associa ad ogni altro punto P, della sfera stessa, il punto P' in cui la retta OP taglia un ben determinato piano π, parallelo al piano μ che è tangente in O alla sfera data. Le figure che si ottengono al variare del piano π (che andrà mantenuto parallelo a μ), sono simili fra loro, così che non fa differenza sostanziale riferirsi, come·fanno molti autori, al caso in cui π è un piano diametrale.
Ecco alcune proprietà:
(a) La trasformazione è biunivoca con la sola eccezione del punto O. Si può rimuovere questa eccezione ampliando π con un solo punto improprio O'.
(b) Le circonferenze di ω che passano per O si trasformano in rette di π, e, inversamente, le rette di π provengono tutte da circonferenze passanti per O.
(c) Sono uniti tutti punti della eventuale circonferenza comune a ω e π.
(d) Le circonferenze di ω, che non passano per O, si proiettano in circonferenze di π e, inversamente, ogni circonferenza di π è proiezione di una circonferenza di ω, non passante per O. Sia infatti γ una circonferenza di ω e sia α la sfera passante per γ e per la proiezione A' di un punto A di γ: la ulteriore intersezione di α, con il cono che da O proietta γ, è la circonferenza γ', proiezione di γ (Figura 3). Sia infatti P un altro punto di γ e P' la ulteriore intersezione di OP con α: la figura, in cui è disegnata la sezione con il piano OAP, che non è necessariamente piano diametrale di ω, mette in luce che $\angle O = \angle P = \angle A'$, cioè che A'P' è parallelo alla tangente in O, e ciò è quanto dire che P' sta anche su π. Inversamente, supposto che γ' sia una circonferenza, consideriamo la sfera α che passa per γ' e per un punto A di γ: la ulteriore

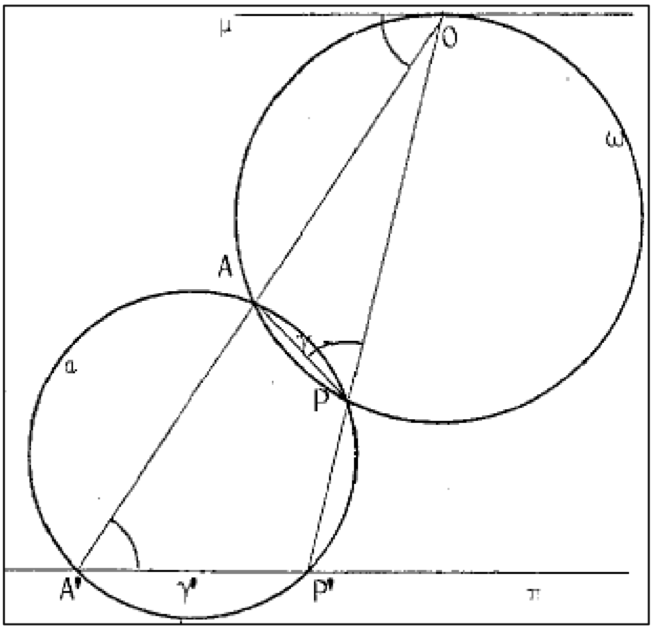


Figura 3

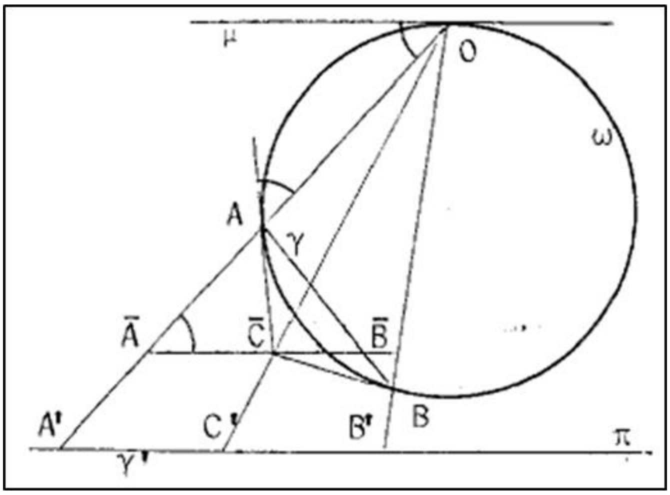


Figura 4

intersezione di α con la sfera ω è la curva γ (circonferenza). Sia infatti P' un punto di γ' e P la intersezione di OP' con ω; la stessa figura mette in luce che ∠A' = ∠O = ∠P, così che i quattro punti A, P, P', A' sono conciclici e P appartiene anche alla sfera α.

(e) Il centro C′ della circonferenza γ' sta sulla retta che congiunge O con il polo $\bar{C}$ del piano di γ.
La figura 4, in cui è disegnata la sezione diametrale che contiene $\bar{C}$, mette in evidenza che, essendo $\bar{A}\bar{B}$ parallelo al piano tangente μ, ∠O = ∠A = ∠$\bar{A}$: è quindi isoscele il triangolo $A\bar{A}\bar{C}$ e, analogamente, $B\bar{B}\bar{C}$. Pertanto, $\bar{C}$ è il punto medio di $\bar{A}\bar{B}$ e quindi anche C' è punto medio di A'B', cioè il punto C' è il centro della circonferenza γ.

(f) La proiezione stereografica conserva gli angoli. Sia infatti t una tangente, in P, alla sfera ω e si consideri il piano che da O proietta t in t'. La Figura, che rappresenta la sezione con questo piano, indica che ∠P = ∠O = ∠P', cioè che t e t' sono ugualmente inclinate rispetto a OP. Considerando allora due tangenti in P, t_1 e t_2, gli angoli t_1t_2, e $t_1't_2'$ sono uguali perché sono sezioni ugualmente inclinate di uno stesso diedro (Figura 5).

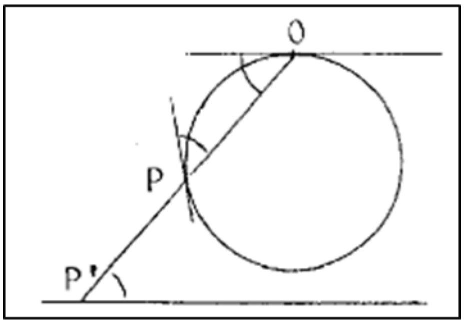


Figura 5

(g) Siano Σ_1 e Σ_2 due proiezioni stereografiche della stessa sfera ω, su uno stesso piano, fatte dai due centri diametralmente opposti. Il prodotto $\Sigma_2 \Sigma_1^{-1}$ è una trasformazione del piano π in sé che è precisamente una inversione circolare che ha come circonferenza fondamentale la eventuale intersezione di π con ω.
(h) Con le notazioni precedenti, il prodotto $\Sigma_2^{-1}\Sigma_1$ è una trasformazione involutoria della sfera ω in sé, che si può costruire per proiezione dal polo del piano π rispetto alla sfera ω.

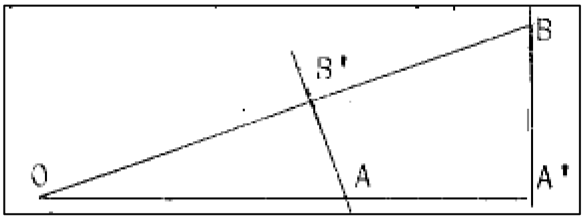
Osservazione. Il cenno che abbiamo voluto dare delle dimostrazioni sintetiche delle proprietà meno ovvie, potrà far apparire artificiosi tali metodi sintetici a chi preferisce i metodi di routine della geometria analitica. Peraltro ho anche voluto accontentare coloro che hanno conservato il gusto geometrico per i metodi sintetici.

Polarità rispetto ad un cerchio. Anche questa ultima trasformazione, tra il piano punteggiato e il piano rigato, si può trattare in forma del tutto elementare e rappresenta un esempio significativo di trasformazione tra enti di natura diversa.
Si può definire a partire da una inversione circolare, di centro O e potenza k, associando ad ogni punto P la retta p, che passa per P' ed è perpendicolare ad OP (ovviamente questa stessa definizione può essere formulata senza menzionare l'inversione). Si dice che P è il polo della

retta p e che questa è la polare di P.

Ecco alcune proprietà:
(a) La corrispondenza è biunivoca con una sola eccezione che si rimuove ampliando il piano con la retta impropria (piano proiettivo) che sarà, per definizione, la polare di O.

(b) Se la polare di A passa per B, allora la polare di B passa per A (legge di reciprocità). Si noti infatti che se A', B' sono gli inversi di A, B, allora questi quattro punti sono conciclici e anche l'angolo in B' risulta retto, cioè appunto AB' è la polare di B.



(c) Se un punto A descrive una retta r, allora la polare di A descrive un fascio che ha come sostegno il polo R di r. Infatti, se A sta su r allora la polare di A passa per R.
(d) Se $k > 0$, allora la circonferenza fondamentale dell'inversione, che si dice anche circonferenza fondamentale per la polarità, è tale che la polare di un suo punto coincide con la tangente in quel punto.
(e) Nell'ipotesi precedente, la polare di un punto P esterno passa per i punti di contatto delle tangenti uscenti da P.
(f) Se $k < 0$, allora si può decomporre la polarità data nel prodotto commutativo di una simmetria rispetto ad O per una polarità dotata di circonferenza fondamentale. (Antipolarità).
(g) Il prodotto di due polarità concentriche è una omotetia.

Anche sulla polarità si possono svolgere utili esercitazioni: in particolare risulterà stimolante far costruire polo o polare con il metodo delle tangenti, (e), anche nel caso in cui il polo sia interno o la polare sia non secante: la necessaria applicazione della legge di reciprocità rende particolarmente eleganti certe costruzioni.

Forse mi sono troppo dilungato sull'aspetto intuitivo delle trasformazioni geometriche e debbo quindi rimandare ad una prossima chiacchierata la presentazione rigorosa di alcune di queste trasformazioni.

(Ciclostilato rieditato settembre 2021. M. P. Manara)

Prospettività. **Marco Palmezzano (1510)- *PARTICOLARE* da Madonna con Bambino in trono fra santi- Fondazione Cassa di Risparmio di Cesena.**