UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

PROGETTO NAZIONALE DI RICERCA (40% MURST)
"RICERCHE DI MATEMATICA ED INFORMATICA PER LA DIDATTICA"

Anno Accademico 1991-92

EDUCARE ALLA RAZIONALITA'
L'INSEGNAMENTO DELLE GRANDEZZE NELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO

A cura di Adriana Davoli Albini e Maria Angela Manara May

RAPPORTO INTERNO N. 1/92

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

PROGETTO NAZIONALE DI RICERCA (40% MURST)
"RICERCHE DI MATEMATICA ED INFORMATICA PER LA DIDATTICA"

Anno Accademico 1991-92

EDUCARE ALLA RAZIONALITA'
L'INSEGNAMENTO DELLE GRANDEZZE NELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO

A cura di Adriana Davoli Albini e Maria Angela Manara May

RAPPORTO INTERNO N. 1/92

Presentazione

Nell'ambito del Progetto Nazionale 40% "Ricerche di Matematica e di Informatica per la didattica", il sottogruppo "Matematica, handicap e scuola dell'obbligo" dell'U.O. di Milano, nell'Anno Accademico 1991-92, ha organizzato periodici incontri per insegnanti elementari con il Prof. Carlo Felice Manara, al fine di discutere problemi logici, epistemologici e didattici dell'insegnamento e dell'apprendimento dei concetti relativi alle grandezze, alla misura e alla proporzionalita'.

Il frutto del lavoro svolto viene presentato in due parti:
1) parte I: Carlo Felice Manara, GRANDEZZE, MISURE, PROPORZIONALITA', Quaderno del Dipartimento di Matematica dell'Universita' degli Studi di Milano, N.30, 1993.
2) parte II: Adriana Davoli Albini e Maria Angela Manara May (a cura di), EDUCARE ALLA RAZIONALITA'. L'INSEGNAMENTO DELLE GRANDEZZE NELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO, Rapporto Interno N. 1/92.

La parte I e' costituita dal testo del Prof. Manara per presentare agli insegnanti della scuola dell'obbligo il concetto di grandezza dal punto di vista della matematica, in una trattazione rigorosa, ma scelta in modo da collegarsi con l'esperienza elementare.

La meditazione di questo scritto dovrebbe chiarire le questioni essenziali, affinche' nella didattica si trovi il modo per non trascurare nulla, non dar nulla per scontato, e contemporaneamente per non complicare la comunicazione di concetti nuovi con aggiunte inutili.

La parte II e' materia del presente Rapporto Interno; in essa sono stati raccolti alcuni stralci di lezioni del Prof. C. F. Manara ed anche alcuni dialoghi e discussioni (trascritti e rielaborati dalle curatrici), nei quali il Professore, attraverso vari esempi, risponde a domande di chiarimento; vi sono inoltre raccolte alcune soluzioni didattiche sperimentate e commentate dalle insegnanti.

Questa seconda parte puo' essere utilizzata come un commento ed un approfondimento di alcuni argomenti della parte I; per facilitarne l'uso, il testo e' stato suddiviso tenendo presente la scansione degli argomenti presentata nella parte I.

Inoltre, si e' intenzionalmente mantenuta la vivezza del discorso parlato, lasciando esempi , battute, domande, interventi; cosicche' il lettore trovera' espressi anche eventuali suoi dubbi, e potra' vedere come vengono risolti; trovera' qualche esemplificazione didattica, e potra' chiarire come l'impostazione teorica giochi nella scelta dei modi per insegnare alcuni argomenti. Questi sono i motivi per cui ci e' sembrato utile lasciare uno squarcio, quasi per consentire anche al lettore di partecipare al lavoro svolto da questo gruppo di ricerca di didattica, in cui ciascuno portava un contributo, attingendo a cio' che aveva letto da altre parti, oppure che aveva personalmente pensato o sperimentato.

Riteniamo importante ribadire che questa seconda parte e' utile solo insieme alla prima: se l'insegnante riuscira' a superare quella naturale ritrosia verso le trattazioni teoriche, e ad accettare di confrontarsi con la precisione e la correttezza delle considerazioni, potra' trovare nella trattazione del Prof. C.F. Manara un valido strumento. Tutti i nostri sforzi sono diretti ad evitare di prescrivere ricette didattiche preconfezionate, per questo lo scritto che presentiamo vorrebbe essere un esempio di uno dei modi in cui si puo' usare lo strumento teorico, per costruire una didattica, avendo compreso e condiviso i motivi che stanno all'origine della sua costruzione.

Ad esempio ci sembra ben chiarito il modo in cui si suggerisce di valorizzare l'esperienza quotidiana (cap. 1.), ed anche il motivo che conduce a scegliere certi assiomi, e come questa scelta debba illustrare una modalita' di insegnamento, senza naturalmente che si pensi di portare un'impostazione assiomatica in classe (vedi ad es. cap. 2 - 3 - 4).

Nel raccogliere questo materiale non abbiamo avuto nessuna pretesa di completezza, poiche' per ogni dubbio rimandiamo alla prima parte del volume; inoltre spesso abbiamo preferito lasciare delle ripetizioni, quando l'argomento poteva chiarire contesti differenti.

Questa seconda parte viene presentata suddivisa in capitoli, ciascuno dei quali e' aperto da un riassunto collocato in una cornicetta per mettere in evidenza il contenuto che viene trattato in quel capitolo.

Successivamente sotto la dicitura "LETTURA" si trovano degli stralci significativi della trascrizione delle lezioni del Prof. Manara, mentre sotto la dicitura DISCUSSIONE sono raccolti i dialoghi svolti nel gruppo di lavoro degli insegnanti.

Gennaio 1993

Adriana Davoli Albini

INDICE

1. DALL'ESPERIENZA QUOTIDIANA ALLA RAPPRESENTAZIONE E ALLA DEDUZIONE CON IL SIMBOLISMO MATEMATICO

1.1 Introduzione delle grandezze nella scuola dell'obbligo. Tre momenti della costruzione razionale e simbolica del bambino.

LA PRIMA COSTRUZIONE RAZIONALE DEL BAMBINO A LIVELLO ELEMENTARE PROVIENE DALLE ESPERIENZE CONCRETE QUOTIDIANE, MA E' NON RIFLESSA ED E' SOGGETTIVA. LA SCUOLA DEVE COSTRUIRE SU QUESTO COMPLESSO BAGAGLIO DI RAZIONALITA' INCONSCIA, MA ESISTENTE, PER GUIDARE PIAN PIANO ALLA CONSAPEVOLEZZA DEL QUADRO RAZIONALE.

Quindi il primo momento educativo e' quello di condurre l'allievo a passare da una descrizione soggettiva delle cose ad una intersoggettiva.

Inoltre, quotidianamente si fanno deduzioni, e quando si ragiona bene si ottengono risultati validi. Pertanto il secondo momento e' quello di condurre a riflettere sulle operazioni che gia' facciamo tutti i giorni, sulle ipotesi che ci appaiono naturali, sulle proprieta' che accettiamo inconsciamente come fondamentali. Tutto questo e' piu' importante che insegnare cose nuove.

Infine il terzo momento sara' quello di avviare all'acquisizione del simbolismo convenzionale e delle regole che consentono di fare delle previsioni sulla realta' usando in modo "automatizzato" lo strumento simbolico.

NOTA: Come esempio di questo percorso, attraverso le letture vediamo alcune esperienze concrete che possono aiutare la formazione del concetto di grandezza.

LETTURA

Cominciamo allora a vedere il discorso delle grandezze, su quali esperienze concrete si basa (v. Parte I/introd,3): perche' siamo al livello della scuola elementare, e il ragazzino ha gia' una sua razionalita', cioe' una sua manovra concreta degli oggetti con cui viene a contatto, un suo modo, non esplicito beninteso, ma fondato, di mettere ordine; anche se questo modo di mettere ordine e di situarsi rispetto agli oggetti che ci circondano e ai fenomeni fisici fondamentali e' soggettivo. Siamo immersi in un ambiente fisico che e' formato da un campo di forze, da certi fenomeni energetici che non stiamo ad analizzare ulteriormente, che in qualche modo ci guidano e ci danno un inizio di una costruzione razionale dell'ambiente stesso; ad esempio se uno non avesse tutti i fenomeni di propriocezione e' chiaro che non distinguerebbe l'alto dal basso, come gli astronauti che galleggiano, perche' il campo gravitazionale non si fa sentire e quindi manca un sistema di riferimento soggettivo che li possa orientare comodamente.
La prima costruzione risulta essere non riflessa e soprattutto soggettiva: ognuno di noi ha una sensazione immediata dell'alto e del basso, della destra e della sinistra.

A questo proposito, io penso che i bambini che confondono la destra con la sinistra non sempre confondono i concetti; forse non sono abituati alla nomenclatura convenzionale, che e' un'altra cosa; d'altra parte abituarsi ad essa fa parte come abbiamo detto tante volte di quelle convenzioni necessarie per la vita civile che in qualche modo devono essere apprese, e la fatica di apprenderle e' pagata poi dalla facilita' nelle comunicazioni. Certo se uno fosse un eremita non avrebbe bisogno di distinguere la destra dalla sinistra; lui sa dove svoltare, ma non ha bisogno di esplicitarlo ne' a se' stesso ne' ad altri.
Allora questa prima descrizione di ambiente e di oggetti che ci circondano e' una descrizione che ha una sua razionalita', ma che ha delle lacune, delle limitazioni per il fatto di essere soggettiva, e forse non troppo cosciente. Il compito della scuola non e' solo dare delle idee; la scuola deve costruire su quel complesso di razionalita' inconscia ma esistente.
Il discorso su cui ho insistito molto e' quello di passare dalla descrizione soggettiva a quella intersoggettiva (cioe' comunicabile agli altri) e pertanto oggettiva . Un qualunque altro ragazzino deve poter comprendere a partire dalla descrizione del compagno.
Questo discorso e' un discorso di carattere educativo, da farsi senza insegnare cose nuove, senza imporre quadri precostituiti, ma costruendo pian pianino la consapevolezza del quadro razionale che il ragazzino costruisce per se'; e' uno dei discorsi cui sono piu' affezionato.

Ho cosi' introdotto le premesse didattiche al <u>discorso sulle grandezze</u>, che e' opportuno si basi sulle esperienze piu' elementari di manipolazione che facciamo tutti i giorni, ad es. se vogliamo rimanere nell'ambito piagetiano, di conservazione della quantita', ecc. Il problema, coerentemente col discorso sulla geometria, ad es. per quanto riguarda le trasformazioni, non e' quello di dire cose nuove, ma di prendere coscienza esplicita, cioe' di guardare in faccia alle operazioni che facciamo, alle ipotesi che assumiamo come naturali, alle proprieta' che accettiamo come fondamentali, per poter costruire la trattazione matematica del concetto di grandezza.

1.2 Rappresentazione e deduzione.

DUE SONO I MOMENTI FONDAMENTALI DELLA CONOSCENZA SCIENTIFICA: LA CONSTATAZIONE E LA PREVISIONE. IN CORRISPONDENZA A CIO', NEL PROCESSO DI MATEMATIZZAZIONE DELLA REALTA', ABBIAMO AD ESEMPIO LA RAPPRESENTAZIONE CON NUMERI E LA DEDUZIONE TRAMITE IL CALCOLO.
LA RAPPRESENTAZIONE DELLA REALTA' MEDIANTE QUESTI STRUMENTI LINGUISTICI CHE SONO I NUMERI CORRISPONDE AL NOSTRO COMPORTAMENTO QUOTIDIANO NEI CONFRONTI DI UNA REALTA' CONCRETA MATERIALE CHE VOGLIAMO CONOSCERE.

La rappresentazione e' solo uno dei momenti della conoscenza della realta' mediante i numeri. La cosa veramente importante e' la deduzione, cioe' la capacita' di lavorare sul simbolo, invece che sulla realta'.

LETTURA

Qual e' il nostro primo comportamento nei confronti di una realta' concreta materiale che ci si presenta, che noi vogliamo conoscere, manipolare, e soprattutto della quale vogliamo prevedere il comportamento sotto le nostre manipolazioni? La constatazione e' infatti solo un momento della conoscenza scientifica, il piu' importante e' la previsione: che cosa succedera' quando accendo un fiammifero? I libri di storia della filosofia fanno tanto parlare sul metodo sperimentale, dicendo che la rivoluzione scientifica del Rinascimento e' dovuta all'introduzione del metodo sperimentale, e che gli Aristotelici speculavano soltanto; e' anche vero, ma e' solo una parte della verita', e non e' la piu' importante; la parte veramente importante e' l'introduzione del linguaggio matematico nella descrizione della realta', e' l'introduzione della misura, che permette di rappresentare la realta' con una precisione molto superiore a quella della descrizione qualitativa usata prima, e soprattutto di dedurre le conseguenze; questo aspetto non si trova sui libri di storia della filosofia, perche' i filosofi non capiscono il significato della matematica da questo punto di vista; basta leggere la Logica di B. Croce per constatare che egli non aveva capito per esempio tutto il significato e la portata della rivoluzione logica di Peano e dei suoi seguaci; del resto anche i matematici contemporanei di Peano non avevano capito. Resta il fatto che non molti sono in grado di apprezzare il significato di questa introduzione di un nuovo linguaggio della scienza, accanto beninteso al metodo sperimentale. Ma il metodo sperimentale era gia' proclamato da Aristotele, che diceva che bisogna partire dall'osservazione; invece l'introduzione della matematica metodica e' la grande rivoluzione scientifica dell'eta' moderna.

Quello dell'introduzione alla misura e' un discorso su cui ritorno quasi ogni volta perche' mi pare che sia abbastanza importante per quanto riguarda la costruzione di una teoria scientifica che si avvalga della matematica. I numeri stampati sull'elenco telefonico possono chiamarsi numeri? Potrebbero essere gettoni, colori; si

possono chiamare cifre forse, ma posso sommare due numeri del telefono? per ottenere che cosa? L'uso abituale del linguaggio matematico e del simbolismo che si crede matematico deve essere in qualche modo meditato, queste meditazioni le faremo, in modo da vedere su quali fondamenti si basa la nostra rappresentazione della realta' mediante questi strumenti linguistici che sono i numeri.
Il momento della rappresentazione e' soltanto uno dei momenti di conoscenza della realta' mediante questi strumenti simbolici. La cosa veramente importante e' poter dedurre, cioe' poter lavorare sullo strumento, cioe' sul simbolo, invece che sulla realta'. Anche la data e' un numero? Puo' essere un numero, che misura la durata in anni dall'inizio dell'era cristiana ad oggi: pero' che significato ha? Posso sommare due date? Che cosa ottengo? Non e' come sommare due lunghezze, per esempio; pero' anche qui bisogna distinguere: se sono due lunghezze di segmenti allineati ottengo la lunghezza di un segmento, se sono lunghezze di due segmenti che non sono allineati ma perpendicolari come questi, e' un altro discorso.

1.3 Dalle grandezze alla proporzionalita'. Programma del Corso.

PER ARRIVARE AL CONCETTO DI PROPORZIONALITA' PARTIREMO DALLA MANIPOLAZIONE SULLE GRANDEZZE E COSTRUIREMO IL CONCETTO DI MISURA.
LA NOSTRA RIFLESSIONE SULLA REALTA' RELATIVA ALLA MISURA VERRA' INTRODOTTA ATTRAVERSO UN PROCESSO DI ASSIOMATIZZAZIONE, PER VEDERE QUALI IPOTESI SONO REALMENTE ESSENZIALI, QUALI SONO I PILASTRI DEI CONCETTI CHE ANALIZZIAMO, E COSI' EVITARE IL PERICOLO DI DIMENTICARE COSE UTILI, O DI DARNE PER SCONTATE ALTRE CHE NON LO SONO, SFRONDANDO IL NOSTRO INSEGNAMENTO DA TUTTO CIO' CHE E' INUTILE CONTORNO.
LA CONOSCENZA DI UNA CERTA STRUTTURA ASSIOMATICA PUO' AIUTARE A PRESENTARE I CONCETTI E SOPRATTUTTO A FARE UNA VALUTAZIONE PIU' APPROPRIATA DELLA EVENTUALE GRAVITA' DEGLI ERRORI NEI COMPITI DEGLI ALUNNI.

LETTURA

GRANDEZZE E PROPORZIONALITA': questo argomento mi pare assolutamente centrale nella matematica elementare e non. Sostanzialmente tutto il programmmma della matematica elementare applicata, come chiave di lettura di una realta' che noi manipoliamo con simboli e con concetti matematici, e' contenuto in questi discorsi.
Parleremo della proporzionalita' tra grandezze in particolare; quindi prima preciseremo il concetto di grandezza , poi parleremo del concetto di misura, cioe' della rappresentazione della realta' mediante quegli strumenti linguistici che sono i numeri; poi ci sarebbe il discorso della legge di proporzionalita', cioe' di questa relazione tra grandezze che cogliamo quasi istintivamente, che e' la prima relazione che mettiamo in opera quando si tratta di rappresentare un legame tra due grandezze fisiche che variano una in funzione dell'altra.
Parleremo dunque della proporzionalita' dal punto di vista teorico e dal punto di vista pratico. Euclide nei suoi Elementi ne parla in due libri: in uno delle proporzioni tra numeri e nell'altro delle proporzioni tra grandezze, tra quantita', tra cose; Euclide usa il neutro plurale, che come e' noto in greco e in latino indica le cose. L'importante e' che Euclide parla non solo del concetto ma anche delle regole per lavorarci sopra, del componendo, del dividendo, ecc. in modo da manovrare efficacemente, praticamente il concetto. Non solo ma poi nel libro in cui tratta della proporzionalita' tra grandezze, il V, costruisce il concetto di numero razionale, discorso che ritorna per tutta la storia della matematica, da Talete in poi, e quindi e' uno dei punti base della matematica applicata.
Cercheremo di analizzare questi concetti andando al fondo delle cose, di fare cioe' una operazione come si suol dire di assiomatizzazione non per pignoleria, ma perche' ci interessano i pilastri, in modo da evitare nell'insegnamento di dire cose inutili e di dimenticare cose utili, di dare per scontate cose che non lo sono, oppure di introdurre ipotesi non necessarie.

1.4 Significato del termine GRANDEZZA nel linguaggio comune e nel linguaggio scientifico.

POICHE' SPESSO SI PRESENTA LA NECESSITA' DI PRECISARE, AI FINI DELL'USO MATEMATICO, IL SIGNIFICATO DI TERMINI CHE SI RIFERISCONO AI CONCETTI ASSOLUTAMENTE ELEMENTARI, CHE VENGONO SCELTI COME I CONCETTI PRIMITIVI SU CUI COSTRIRE UNA TEORIA, NEL SEGUITO VIENE SPIEGATO CHE COSA SI INTENDE PER DEFINIZIONE D'USO O IMPLICITA.

INOLTRE SI PRESENTA L'INTRODUZIONE ASSIOMATICA DELLE GRANDEZZE OMOGENEE.

Le proprieta' del concetto di grandezza ci forniranno da un lato la definizione implicita del concetto e dall'altro i fondamenti per costruirci la codificazione mediante numeri della realta'.

Piu' che una presentazione assiomatica proponiamo una riflessione sulle ipotesi che abbiamo tratte dall'esperienza comune attraverso le proprieta' delle grandezze.
Dalla costruzione concreta del concetto di grandezze continue discendera' poi l'impostazione del concetto di frazione e di numero razionale, la giustificazione dell'operazione di misura e dell'uso che ne facciamo per rappresentare la realta' e dedurre conclusioni.

LETTURA I

Insisto che, trattandosi di un termine del linguaggio comune, il termine grandezza ha una enorme quantita' di significati, quindi se pretendiamo di analizzarli tutti non finiamo piu'. D'altra parte abbiamo detto che i termini del linguaggio comune hanno molti significati, ma uno dei grossi guai per il loro uso scientifico e' dato dal fatto che il significato e' molto spesso precisato dal contesto, mentre per l'uso scientifico abbiamo bisogno di termini che almeno in una medesima teoria abbiano sempre lo stesso significato, siano simbolizzabili in un modo univoco che puo' essere riconosciuto una tantum, senza bisogno di leggere l'intera pagina, ed e' questa la cosa veramente importante dell'impiego della matematica, la partenza necessaria per poter utilizzare il linguaggio matematico. Allora noi prenderemo in considerazione soltanto un significato ristretto di questo termine, che e' usato nel linguaggio comune, con questo significato, che scegliamo e precisiamo. Questa e' la procedura che si segue abitualmente quando si prende un termine del linguaggio comune e lo si usa per la simbolizzazione matematica, ad esempio probabilita', informazione.

Fatto questo discorso occorrerebbe parlare della <u>definizione</u> (v. Parte I/I,5). Qui occorre sgombrare il campo dalle abitudini nominalistiche che sono purtroppo in tanta trattazione: "la grandezza e' ....". Non e' detto che la precisazione di un concetto debba necessariamente passare attraverso frasi di questo tipo. Un esempio classico: Peano ha precisato il concetto di numero naturale attraverso certi assiomi da lui scelti, che sono

per cosi' dire le regole del gioco, cioe' sono le frasi iniziali di ogni teoria che voglia parlare di numero, almeno in questo contesto. In altre parole la definizione di tipo nominalistico non da' il concetto, al livello di questi concetti assolutamente elementari. Quando si parla di concetti fondamentali come quelli che trattiamo in questa sede si sceglie la definizione implicita, o definizione per postulati, o definizione d'uso. Quest'ultima espressione si riattacca al discorso su Peano; Peano dice: la parola numero io la uso cosi', cioe' definisce implicitamente il concetto di numero parlando di esso, enunciando certe proposizioni fondamentali, che descrivono il concetto di numero non in forma esplicita. La definizione del pezzo degli scacchi non sta nel nome del pezzo, esempio Re, ma nelle regole del gioco stesso; la definizione di ogni pezzo finisce quando e' scritta l'ultima regola per l'insieme di tutti i pezzi.
Naturalmente e' piu' facile far dire la lezione, insegnare delle frasi e verificarne la ripetizione, che far sorgere pian pianino una razionalita' coerente e precisa dal patrimonio esistente. Il discorso formativo pero' segue questa strada, cioe' l'uso rigoroso, codificato, cosciente del termine in certe circostanze. Questo e' l'atteggiamento della matematica, la cosiddetta assiomatica, che non impone verita' dal di fuori, ma va a cercare i fondamenti, le regole precise che noi intendiamo seguire per utilizzare un concetto, senza pretendere di dare una definizione per genus et differentiam come voleva la logica classica, cioe' attraverso una frase che puo' suonare bene ma poi non dice un gran che. Caso tipico, la prima frase con cui comincia il trattato degli Elementi di Euclide: "il punto e' cio' che non ha parti", oppure: "insieme e' una collezione di enti presi come un tutto unico", frasi che sembrano suonare come definizioni, ma definizioni non sono, perche' quando le ho pronunciate ne so come prima, e non possono essere utilizzate nelle dimostrazioni. Non ci sono dimostrazioni di Euclide che concludono: "... questo e' vero perche' il punto e' cio' che non ha parti". E' semplicemente un richiamo , una illustrazione, un chiarimento di termini, come diceva Hilbert. Del resto il termine greco usato da Euclide e' semeion, segno; il risultato dell'atto che io faccio quando identifico una certa posizione. E' chiaro che se la identifico e' quella li', non puo' avere parti.
C'e' un discorso che purtroppo si legge su molti libri, prendi una macchiolina piccola piccola ...; comunque sia piccola io posso sempre immaginare di romperla se la guardo al microscopio. Ma se noi seguiamo la strada di Euclide, che dice: un segno, una posizione, ma non un segno materiale, bensi' l'identificazione di una posizione nello spazio, allora diventa unica di per se'.
Seguiremo questa strada, di precisare il concetto di grandezza ai fini dell'uso matematico, che si tradurra' come termine ultimo nella costruzione e nella utilizzazione del concetto di misura . Attraverso certe operazioni fondate sulle proprieta' del concetto che vogliamo precisare, arriviamo non solo a rappresentare la realta', ma a dedurre conseguenze, a fare i conti, quindi in sostanza a scrivere le leggi di questa realta': questo e' il fondamento della conoscenza fisico-matematica. Si comincia di qui e si arriva ad Einstein: il cammino e' lungo, ma la strada e' giusta. I grandi risultati, le metodologie fondamentali non si portano direttamente a scuola, ma informano la nostra azione didattica, se ne siamo convinti.

Mediteremo sulle proprieta' del concetto di grandezza, perche' sono esse che ci daranno da una parte la definizione implicita, dall'altra i fondamenti per costruirci la codificazione mediante numeri e quindi l'inizio della conoscenza matematica della realta'. Di conseguenza verranno la rimeditazione sui numeri razionali, in particolare sulle frazioni, e poi la proporzionalita': la regola del tre e cose analoghe dovranno scaturire in modo quasi spontaneo dalla impostazione che noi daremo, non saranno imposte dal di fuori. Voglio smontare tutte le regole date ab extrinseco, non vorrei che l'insegnamento diventasse come un rivestimento di cose puramente convenzionali che il ragazzino memorizza e poi giustamente dimentica .
Vorrei arrivare alla semplicita', a dare quelle nozioni che sono indispensabili alla vita civile di oggi in modo motivato, semplice, collegato, fondato, perche' allora si riesce a rendere unitario questo che dovrebbe essere l'approccio scientifico alla realta'. Ho detto che si arriva ad Einstein: e' vero, questa e' la strada che l'umanita' ha percorso per costruire la scienza nel senso moderno del termine; questa presa di coscienza esplicita via via delle cose e la codificazione mediante un linguaggio ben determinato e potentissimo come e' quello della matematica e' uno dei fatti fondamentali della nostra civilizzazione. Oltre ad essere importantissimo e' pero' anche estremamente semplice se noi riusciamo a metterlo nella luce giusta, a non scaricare regole o nozioni o convenzioni (escluse quelle strettamente necessarie) nella testa dei ragazzini, che invece devono essere educati a capire ad analizzare e ad appropriarsi delle cose.
Se si riuscisse a conciliare le necessarie convenzioni che dobbiamo insegnare e lo sfruttamento radicale dell'appropriazione delle idee da parte dei piccoli clienti si arriverebbe a costruire una vera e propria razionalita' e non funambolie di tipo algoritmico che non sono affatto necessarie. Del resto anche i programmi della scuola elementare raccomandano di evitare esercizi troppo ripetitivi complicati ecc.

LETTURA II

Riprendo il discorso sulle grandezze.
<u>Come precisiamo il significato del termine grandezza?</u>
Scegliamo questo concetto come concetto primitivo e quindi non ne diamo la definizione per genus et differentiam, evitando cosi' di cadere nel nominalismo e nella fallacia che i logici antichi chiamavano circolarita': idem per idem.
<u>Decidiamo quindi di adottare il termine di grandezza come concetto primitivo;</u> rinunciamo a darne una def. nel senso classico del termine, tuttavia non rinunciamo a precisarlo, ma cerchiamo di circoscriverne mediante opportuni assiomi, come si suol dire oggi, cioe' mediante opportune frasi, il significato. Questo e' cio' che i logici da piu' di un secolo, dopo Peano, chiamano definizione d'uso. La precisazione del significato nasce dall'uso, cioe' come suol dirsi dalla <u>definizione implicita</u>. E' cio' che accade tutte le volte che i concetti che trattiamo sono cosi' elementari che non e' possibile decomporli in altri piu' elementari; del resto se anche fosse possibile resterebbe ancora l'onere di spiegare il significato dei termini elementari, e all'infinito non si puo' andare. Questo e' un discorso che fa

anche Aristotele.
Allora scegliamo questa procedura per il termine grandezza, preso dal linguaggio comune e da noi usato per la matematica, cioe' cerchiamo di enunciare delle proposizioni elementari in cui entra il concetto di grandezza. Questo e' cio' che ho cercato di fare in quel libro pubblicato dall'IRRSAE ("Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo", quaderni IRRSAE n.13); noi lo faremo ad un livello molto piu' concreto, perche' dobbiamo soprattutto allenare i nostri piccoli clienti alla razionalita', cioe' alla precisazione del significato e alla coerenza del comportamento, scegliendo di fare le osservazioni piu' elementari e piu' immediate, nate dall'esperienza, che ci aiuteranno a circoscrivere il concetto di grandezza, e quindi a darne una definizione implicita in soldoni.
Del resto non si puo' trasferire nella scuola elementare una impostazione assiomatica. Gli stessi assiomi di Peano qualche volta non sono capiti dai clienti (anche piu' maturi). E' soprattutto difficile far capire la necessita' di un'assiomatizzazione cosi' rigorosa e astratta di un concetto che a noi sembra del tutto elementare, certe acrobazie logiche rischiano di far diminuire la stima che i nostri clienti hanno del ragionamento e della dimostrazione.
Io scelgo quasi sempre di seguire una strada che e' piu' vicina all'esperienza comune, perche' noi dobbiamo sapere quali sono le difficolta' logiche e gli eventuali tranelli in cui possiamo cadere presentando una certa cosa in un modo piuttosto che in un altro.

ESEMPI

Vediamo di partire allora con gli esempi concreti, secondo l'impostazione data sopra e che ora riassumero'.
Noi abbiamo una quantita' di cose che classifichiamo abitualmente sotto il <u>concetto di grandezza</u> (v. Parte I/I,4) perche' per rappresentarle utilizziamo il linguaggio della matematica e per prevederne il comportamento utilizziamo la struttura del linguaggio matematico.
Ad esempio lunghezze, aree, volumi per la geometria, energia, velocita', distanze, durate, per la fisica, somme di denaro, prezzi, per l'economia, ecc. Tutte cose che manipoliamo, o anche che paghiamo: per esempio il prezzo al chilowattora nella bolletta della luce. Questa grandezza che noi chiamiamo consumata, sarebbe meglio dire trasformata, perche' non e' che si consumi, ma abbiamo utilizzato per trasformarla in un'altra fonte di energia, o abbiamo sprecato, e' codificata mediante numeri, e' codificato mediante numeri da parte dell'Enel anche il prezzo unitario, e un'operazione del tutto banale nel linguaggio matematico che e' la moltiplicazione ci da' il risultato finale, la somma che dobbiamo pagare. Questo esempio, che ho preso non a caso da un ambito diverso da quello abituale dei libri della scuola elementare (lunghezze aree volumi li abbiamo sotto mano, ma anche le altre grandezze le abbiamo sotto mano), e' un esempio tipico di rappresentazione precisa di una certa grandezza e di uso degli strumenti matematici per ottenere certe conseguenze: quest'ultimo e' il momento della moltiplicazione del numero dei chilowattora per il prezzo del chilowattora, perche' e' il momento in cui il linguaggio matematico ci fornisce la deduzione, lo strumento per ottenere le conseguenze certe, ed e' questa la cosa veramente

importante.
Allora noi manipoliamo, non materialmente, tutta una quantita' di cose che trattiamo come grandezze. Vediamo i fondamenti su cui ci basiamo per attribuire il nome di grandezza a certe cose: capacita', pesi, somme di denaro, ecc.; da queste osservazioni noi cominceremo a trarre un momento di astrazione, cioe' di contemplazione di qualita' generali comuni a tutte, che descriveremo come uno dei fondamenti dell'applicazione del concetto generale di grandezza.
Ripeto ancora una volta che seguo una strada classica, quella di Euclide ("non c'e' niente di piu' nuovo del dimenticato"). E' l'impostazione che si usa per fare i conti della spesa, non e' niente di sublime, anche se l'idea fondamentale poi serve fino ad Einstein.

DISCUSSIONE SULL'USO DELLA DEFINIZIONE

Ins. A.: Quando diamo una definizione, non e' detto che la cosa risulti piu' chiara di prima.

Ins. B.: E' un lavoro di riappropriazione del linguaggio, senza il verbalismo inutile di chi ritiene che il concetto sia acquisito quando si sa dare una certa definizione. Un'insegnante delle medie aveva fatto fare un compitino in cui richiedeva la definizione di numero primo e qualche esempio. Un bambino, dopo aver scritto la definizione giusta, per introdurre gli esempi, ha scritto :" I numeri primi sono i primi numeri, ad esempio 0, 1, 2, 3,...". Povero bambino, con l'esempio si era messo in contraddizione con quello che aveva scritto appena prima.

Ins. C.: Mi pare che il Prof. Manara abbia detto una volta di non usare il termine "infinito"...

Ins. B.: Secondo me , non tanto di non usarlo, ma di smitizzarlo un po'... Ad esempio se prendiamo un segmento, lo dividiamo in due parti, ognuna ancora in due, e cosi' via, dividi, dividi, dividi, un tempo io credevo che, se la linea e' un insieme di punti, ad un certo momento si arrivasse ad un punto; invece tu dividi e ottieni sempre due grandezze della stessa specie, cioe' due segmenti, per quanto piccoli siano. Qui per me la definizione e' fuorviante: mi ricordo in prima superiore di avere continuato per mezza giornata a cercare di imparare a memoria la definizione: la retta e' un insieme di punti; non mi entrava in testa, perche' subito prima si parlava del punto che e' l'ente geometrico senza dimensioni e io non capivo come mettendo vicine delle cose senza dimensione si arrivasse alla retta che ha una dimensione.

2.UN INSIEME DI ASSIOMI PER DEFINIRE IMPLICITAMENTE IL CONCETTO DI GRANDEZZA

2.1 Primo passo. La relazione di uguaglianza.

PRIMO PASSO (I ASSIOMA): LA RELAZIONE DI UGUAGLIANZA.

Questa relazione ha le proprieta': riflessiva, simmetrica e transitiva e permette di strutturare un insieme di grandezze omogenee in CLASSI DI EQUIVALENZA.

L'uso della classe di equivalenza corrisponde alla possibilita' di sostituire un oggetto con un altro ad esso equivalente, a certi fini, beninteso.

Nei casi concreti, la relazione di uguaglianza tra due grandezze omogenee viene verificata con procedure diverse a seconda del tipo di grandezza.

Nella risposta alla domanda di un'insegnante viene presentata una precisazione sull'uso dei termini uguaglianza ed equivalenza. Noi scegliamo di usare il termine "uguale" e lo indichiamo con due lineette; di volta in volta verra' precisato il suo significato a seconda del tipo di grandezza.

NOTA: Per la definizione implicita del concetto di grandezza possiamo individuare tre passi.
I PASSO: attraverso la relazione di uguaglianza si puo' stabilire un criterio per identificare una classe di grandezze all'interno della quale una grandezza si puo' ritenere uguale ad un'altra.
II PASSO: esistenza di una operazione di composizione interna, che chiamiamo somma, tale che a due grandezze ne assicia una terza (vedi cap. 2).
III PASSO: Multipli e sottomultipli di una grandezza. I numeri razionali (Vedi cap. 5).

LETTURA

Primo passo: supponiamo di avere una classe di grandezze omogenee; anche questo e' un termine che assumiamo come noto e precisiamo solo in qualche modo attraverso gli esempi; diremo che i pesi, i volumi, le lunghezze formano un insieme di grandezze omogenee, e cosi' le capacita', le durate, le velocita'.
Che cosa constatiamo in tutte queste classi di grandezze omogenee? <u>Constatiamo che abitualmente parliamo di uguaglianza</u> (v. Parte I/II,1); esiste una relazione tra grandezze omogenee che chiamiamo cosi': uguaglianza di durata, di peso, di differenza di potenziale elettrico, uguaglianza di volume; noi diciamo che due pesi sono uguali ecc.
Se una ricetta di cucina parla di lasciare al fuoco per 10 minuti, ogni volta che la applico devo mettere al fuoco per la stessa durata, pena la non riuscita della salsa. Ecco che abbiamo questo concetto di uguaglianza che nei casi concreti viene verificato

ogni volta con procedure diverse, perche' l'uguaglianza della lunghezza di due segmenti si puo' verificare direttamente con il trasporto rigido , l'uguaglianza di due aree si puo' verificare con altre tecniche un po' piu' complicate, per i volumi il discorso e' ancora piu' complicato, l'uguaglianza di due durate viene verificata con certe tecniche che fanno entrare in scena certi meccanismi: ben pochi tra noi saprebbero smontare e rimontare un orologio, cioe' ben pochi conoscono i principi fisici in base ai quali questo strumento mi permette tuttavia di verificare l'uguaglianza di due durate. Cosi' ben pochi di noi saprebbero giustificare ad esempio il trasporto rigido nel caso della geometria, oppure l'uguaglianza di due pesi; diciamo che due corpi che tengono in equilibrio la bilancia hanno addirittura lo stesso peso, che due automobili che hanno fatto lo stesso percorso nello stesso tempo hanno tenuto velocita' uguali o addirittura la stessa velocita', e arriviamo al concetto astratto che identifica una grandezza con tutte quelle che sono uguali. Non voglio usare le virgolette, diciamo pure uguali, ma sapendo che la verifica concreta dell'esistenza di questa relazione di uguaglianza e' fatta con tecniche diverse di caso in caso, che ciascuno di noi prende come naturali ma che naturali non sono.
Non facciamo il discorso che risale ad Archimede, che poi e' stato ripreso da altri fondatori della meccanica razionale, su quali basi e' fondata la bilancia, quali sono i fondamenti dell'operazione di confronto di pesi. C'e' un'appendice al libro di Bonola sulla Geometria non Euclidea che mostra quanto sia importante l'ipotesi di essere in uno spazio euclideo sulla legge di composizione delle forze che da' origine all'operazione della bilancia: sono cose che a noi sembrano naturali perche' le usiamo tutti i giorni, ma non lo sono quando scendiamo veramente ad analizzarle. Lo stesso per le durate, le velocita': se consideriamo velocita' vicine a quelle della luce, o durate astronomiche, operazioni che a noi sembrano naturali non lo sono piu', il che significa che il nostro uso del linguaggio matematico ha sempre un certo grado di approssimazione, non e' mai assoluto: la matematica non ci da' mai tutte le conoscenze possibili, ci da' pero' strumenti potenti, questo si'; pero' dobbiamo tener presente il fatto che l'impiego del linguaggio matematico per le operazioni fisiche e' sempre sottoposto ad un certo ordine di approssimazione, di cui bisogna tener conto quando si vuol dare un giudizio complessivo del significato dei nostri enunciati nei riguardi della conoscenza del mondo materiale che ci circonda.
Abbiamo dunque una relazione, che chiamiamo di uguaglianza.

-Domanda: Che differenza c'e' tra parlare di uguaglianza e di equivalenza?

-Prof.Manara: Qualcuno la chiama equivalenza, qualcuno la segna con tre righette; non oso dire che la nostra scelta sia giusta e le altre sbagliate. L'importante e' intendersi una tantum sulla simbologia.
Bisogna spiegare il significato che si da' ad una certa parola, e poi essere coerenti con la scelta fatta. Io uso sempre i due trattini e la parola uguale, di volta in volta diremo qual e' il significato. Ad esempio diremo che due pesi sono uguali se messi su due piatti della bilancia tengono la bilancia in equilibrio. E cosi' via: in ogni questione questa parola ha un determinato

significato.
Ho detto poco fa che nel linguaggio comune il significato dei termini e' precisato dal contesto; invece nella scienza vorremmo utilizzare gli strumenti linguistici, non solo le parole del linguaggio comune, ma anche i simboli matematici, sempre nello stesso significato; ovvero: vorremmo che il nostro linguaggio fosse staccato dal contesto. A mio parere questo non e' possibile in assoluto: e' vero che posso inventare una quantita' di simboli stravaganti per indicare i concetti della scienza; infatti oggi i libri di matematica sono pieni di simboli che non capisco. Ma il significato di questi simboli devo spiegarlo con parole del linguaggio comune; quindi il contesto non e' eliminabile, neppure nell'ideale della costruzione scientifica; cio' a cui vogliamo avvicinarci e' la costanza del significato del simbolo.

Esiste dunque una relazione che ha le proprieta' dell'uguaglianza, cioe' le proprieta' che tutti conosciamo, riflessiva simmetrica e transitiva, la quale permette di costruirci un astratto, ovvero di <u>strutturare l'insieme delle grandezze omogenee in classi di equivalenza</u>. Questa e' un'operazione logica estremamente importante, perche' la utilizziamo quotidianamente. Se devo mandare un ragazzino a comperare un regolo della lunghezza di questo tavolo, non c'e' bisogno che lo mandi col tavolo, ma basta che si metta in tasca un filo della lunghezza giusta. L'uso della classe di equivalenza corrisponde alla sostituibilita', a certi fini, beninteso. Se poi invece di dargli un filo che si mette in tasca gli diamo una misura, ecco che abbiamo utilizzato il linguaggio matematico e un insieme di convenzioni per cui il venditore sa che cosa deve consegnare al ragazzino. Piu' ci si impadronisce della struttura del linguaggio, piu' si conosce la realta', cioe' piu' si risparmia fatica e piu' si sanno prevedere le conseguenze delle nostre manipolazioni sulla realta'.
Noi strutturiamo continuamente la realta' su cui lavoriamo in classi di equivalenza, e questo perche' sussistono quelle proprieta' riflessiva simmetrica e transitiva della relazione di uguaglianza. E' chiaro che, se ci mettiamo in questo punto di vista, parlare di grandezza di un dolore di denti non ha senso, perche' non posso confrontare il mio dolore di denti con quello di un altro e sostituirlo, o altre cose del genere. Tutta una quantita' di occasioni di uso del linguaggio matematico nella psicologia, nella fisiologia ecc. deve essere guardato per bene per evitare equivoci: non e' l'uso della matematica che vogliamo fare noi.

DISCUSSIONE SU CIO' CHE CHIAMIAMO "GRANDEZZA"

Ins. A.: Quando parlando con i ragazzi dici: vogliamo sapere se questo tavolo e' lungo come la lavagna, loro dicono: misuriamo. Non pensano a trasportare, e neppure ad usare un filo. Oggi i ragazzi conoscono troppe cose.
Quando chiedi: che altro possiamo misurare? Loro rispondono: la temperatura. Perche' in realta' la misuri.

Ins. B.: I bambini di terza elementare hanno fatto questo elenco di cose che si possono misurare: peso, altezza, temperatura,

lunghezza, capacita', tempo, velocita', vista, udito, rumore, i terremoti, la forza del vento, la forza del mare.
Ma sono tutte da considerare grandezze, oppure no?
Io adesso mi propongo di aiutarli ad analizzare caso per caso, per decidere quali sono grandezze e quali non lo sono.

Ins. C.: Comunemente il bambino sente parlare di chili e di etti, a meno che non vada dall'orefice... Io poi ho parlato di diottrie, ma non sapevano che cosa fossero; abbiamo elencato grandezze e relative unita' di misura. Ci siamo soffermati su quelle di lunghezza, in particolare, io avevo detto: portate cio' che avete. Una bambina che ha il negozio di merceria ha portato il "metro rigido", e un bambino il cui nonno faceva il sarto ha portato il "centimetro"; qualcuno ha detto : ma noi usiamo la squadra invece del righello... e cosi' via.
E' anche venuto fuori il discorso sulla vista, io porto gli occhiali: dire che tu hai 5 diottrie e io ne ho 8, non serve a niente, maestra; ma se il tuo occhio sinistro ha 4 diottrie e il destro 5, tutte insieme fanno 9, e per la patente e' cio' che ci vuole.
Allora io ho spiegato che l'oculista considera la vista di ogni occhio separatamente, mentre la somma non ha senso.

Ins. D.: Nel nostro refettorio c'era troppo rumore, allora sono venuti dei tecnici che hanno misurato la rumorosita'. Si tratta di una grandezza?

Ins. E.: Secondo me no. Perche' nel linguaggio familiare parliamo di misura tutte le volte che si usano strumenti per ottenere un numero, misuriamo degli stati, dei modi di essere , che pero' non sono delle grandezze. Sono come dei cartellini messi accanto a ciascuno stato. Come per identificare l'intensita' di un colore.

Ins. F.: Allora come possiamo far capire ai bambini quali sono da considerare grandezze e quali no?

Ins. A.: Di solito io non faccio considerazioni complicate, secondo me basta ad esempio non dire ai bambini: "le grandezze sono...", ma: "vediamo di confrontare due pesi, due volumi, due lunghezze ...". L'attenzione viene spostata dalla definizione al come poter dire se due grandezze sono equivalenti. Il primo assioma fornisce gia' delle indicazioni dal punto di vista didattico.

Ins. G.: Nella scuola media mi sono sentita dire da un ragazzino che il confronto tra due grandezze e' un'operazione matematica rigorosa perche' dice una cosa vera. Spesso i bambini hanno una ... grande idea della matematica! Io ho risposto che l'operazione di confronto tra due grandezze e' proprio quell'operazione pratica che viene eseguita materialmente sugli oggetti che vogliamo studiare. Quando poi arriveremo alla misura, dovro' spiegare che cosa vuol dire che l'informazione e' "vera".

2.2 Grandezze di I, II, III specie.
Spiegazione dei termini: uguaglianza, congruenza, isometria.
Spiegazione dei termini: uguaglianza e simmetria.

DOMANDA RELATIVA ALLA DISTINZIONE TRA GRANDEZZE DI I, II, III SPECIE.
Nella risposta viene precisato che questa distinzione riguarda non il concetto di grandezza, ma le tecniche che si possono usare per verificare certe relazioni, in particolare per le grandezze della geometria. Si tratta di manipolazioni scelte in modo convenzionale, non imposte dalla realta'.

RICHIESTA DI PRECISARE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI: UGUAGLIANZA E CONGRUENZA.
Risposta. Supponiamo di sapere che cosa vuol dire che due figure sono rigide, allora le trasportiamo una sull'altra e otteniamo cosi' una verifica di una relazione di equivalenza, che alcuni autori chiamano : CONGRUENZA (Grandezze di prima specie).
Ora, se presumiamo di sapere che cosa vuol dire accostare due figure poligonali, possiamo costruire una relazione di equivalenza delle figure poligonali, la cui verifica e' un po' piu' complicata della sovrapponibilita', ma implica un numero finito di operazioni. Diciamo che due figure uguali (o equivalenti) hanno la stessa area (grandezze di seconda specie).
Infine, per le cosiddette grandezze di terza specie e' ancora piu' complessa la verifica se due figure sono equivalenti, in quanto essa implica l'uso di una procedura che in linea teorica non avrebbe mai termine consistendo di un infinito numero di operazioni.
In questi ultimi due casi alcuni autori parlano di UGUAGLIANZA, altri di EQUIVALENZA.

RICHIESTA DI PRECISARE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI: CONGRUENZA E ISOMETRIA.

Risposta. Alcuni autori distinguono la CONGRUENZA dalla ISOMETRIA. Essi chiamano isometria una corrispondenza biunivoca che conserva gli angoli e le distanze tra tutti i punti corrispondenti, ma che non puo' essere ottenuta con un movimento rigido (vedi ad esempio le figure speculari).

Altri autori chiamano isometria una corrispondenza piu' generale della congruenza, per cui ogni congruenza e' considerata una isometria, ma non viceversa.

DISCUSSIONE PIU' IN GENERALE SUL SIGNIFICATO DEL TERMINE: UGUAGLIANZA.

Il termine UGUAGLIANZA viene considerato da alcuni in senso assoluto, da altri in senso relativo.

Il concetto di UGUAGLIANZA con significato relativo varia a seconda delle manipolazioni che di volta in volta decido di ritenere lecite sulle figure geometriche, o sulle figure astratte o sui concetti.

Noi scegliamo la seconda via: l'eguaglianza delle figure e' definita dalle trasformazioni che eseguo su di esse e che le portano l'una sull'altra.

A questo proposito un'insegnante pone una domanda sulla SIMMETRIA.
Risposta. La simmetria e' una particolare isometria, caso tipico di isometrie che non sono congruenze.

LETTURA I

Stiamo riflettendo su quali cose abitualmente classifichiamo nel concetto di grandezza per farci guidare da queste osservazioni non tanto a fare un'assiomatica, ma a capire il significato, l'importanza e la portata del linguaggio matematico in questo ordine di realta' concrete che studiamo.
Il primo dei punti fondamentali sui quali abbiamo finora meditato e' il fatto che sia possibile stabilire una relazione che abbiamo chiamato uguaglianza.
La <u>costruzione delle classi di equivalenza</u> e' dunque il momento fondante in questo contesto dell'operazione di astrazione, per cui noi ad esempio diciamo che due macchine che hanno percorso lo stesso spazio nello stesso tempo hanno tenuto la stessa velocita', e tanto vale che misuriamo l'una piuttosto che l'altra. Questa operazione, che possiamo chiamare scherzosamente di confusione, e' l'operazione fondamentale che codifica in questo contesto l'operazione di astrazione, cioe' la costruzione del concetto astratto che vale per tutti gli elementi della classe.

-Domanda: Che differenza c'e' tra uguaglianza, congruenza e isometria? E perche' si parla di grandezze di I, II e III specie?

-Prof.Manara: Questa domanda riguarda in particolare le grandezze della geometria e non i concetti, ma <u>le tecniche con le quali verifichiamo il sussistere di certe relazioni</u>. Per ogni classe di grandezze esiste una tecnica che ci permette di giudicare se, in base alle manipolazioni che noi facciamo e alla teoria che vogliamo costruire, quelle due grandezze siano da noi da considerarsi uguali. Niente di strano che, se volessimo costruire delle altre teorie, o codificare altre manipolazioni, certe grandezze che per una certa teoria e con certe manipolazioni erano considerate uguali possano essere considerate disuguali in un

altro contesto in un'altra teoria e con altre manipolazioni. <u>Non esiste una teoria naturale delle cose che noi cerchiamo</u>; ci sono scelte che noi possiamo fare per concettualizzare le operazioni che facciamo; esiste poi un'esigenza di coerenza. Del resto per fare un esempio di uso improprio, quella che chiamiamo misura della temperatura, come ci hanno detto di costruire il termometro? Prendi un tubetto con un liquido, del mercurio per esempio, con un'appendice che e' un canale perfettamente cilindrico, dopo di che lo metti nel ghiaccio fondente e segni, lo metti nel vapore dell'acqua bollente e segni, poi dividi per 100 quella lunghezza. E perche' non posso comperare un regolo calcolatore e mettere i segni dove li ha il regolo calcolatore, che non sono a distanze proporzionali? Otterrei una scala logaritmica che magari e' piu' valida e piu' utile per gli usi della termodinamica teorica. Invece abbiamo fatto questa convenzione, ci sono convenzioni cui sottostare che non sono imposte dalla realta', ma che noi abbiamo scelto.
Una volta ho scoperto che i chimici usano dei termometri, per trovare con precisione ad esempio il punto di fusione, in cui il canale non e' perfettamente cilindrico, anzi c'e' un canale in cui scorre il mercurio che ha un certo diametro per le temperature che a loro non interessano, e un diametro molto piu' piccolo, diventa capillare, per le temperature che a loro interessa misurare con estrema precisione. In questo caso il mercurio, quando e' scaldato, arrivato ad un certo punto si mette a correre.
<u>Per ogni classe di grandezze esiste quindi una tecnica diversa da classe a classe</u> che richiede manipolazioni o uso di strumenti o ipotesi che ci permettono di costruire il concetto astratto della grandezza della classe, ci permettono di costruire la classe di equivalenza, in maniera che quando con quella tecnica verifichiamo che due grandezze sono uguali, tanto vale prendere l'una anziche' l'altra. <u>E' la codificazione della costruzione del concetto astratto.</u>
Puo' avvenire -e qui cerco di rispondere alla domanda che mi e' stata fatta- che sia utile per certe classi di grandezze fare delle ulteriori distinzioni, riguardanti come ho gia' detto non il concetto, ma la tecnica con la quale verifichiamo il sussistere della relazione di uguaglianza.
Nel caso della geometria su molti libri c'e' la distinzione tra <u>grandezze di prima, seconda e terza specie</u> (come c'e' la distinzione tra <u>congruenza</u> e <u>isometria</u>, o tra congruenza e <u>uguaglianza</u>). Questa distinzione -che in qualche caso puo' essere utile, purche' noi abbiamo le idee molto chiare- ha il suo campo di applicazione, come appena detto, non nel concetto di grandezza, ma nelle tecniche che per certe particolari grandezze della geometria noi utilizziamo per verificare l'esistenza della relazione che si diceva. Il fondamento di questa distinzione e' classico, risale a Euclide; se noi immaginiamo di sapere che cosa vuol dire trasportare rigidamente una figura, ci sono oggetti per i quali la verifica del sussistere della relazione di uguaglianza si fa con un'unica operazione. Questo avviene per i segmenti, per gli angoli, avviene per gli archi; sto cercando non di dirvi cose nuove, ma di scavare, cioe' di fare in modo di non considerare necessarie le cose che diamo per scontate, che chiamiamo naturali, ma sono solo abituali.
Puo' avvenire che sia utile costruire teorie diverse per codificare le nostre conoscenze, le nostre manipolazioni della

realta'; ad esempio per le velocita' vicine alla velocita' della luce, che si ottengono nelle macchine elettroniche che ci sono al Cern di Ginevra e altrove, la composizione delle velocita' cosi' come noi siamo abituati a fare sommando un numero con l'altro non vale piu'; se noi utilizzassimo quella legge non troveremmo piu' le conseguenze che cerchiamo dalla teorizzazione che noi facciamo sugli enti della fisica. Certe cose che noi consideriamo naturali non sono affatto necessarie, e' quindi utile andare a rivedere il fondamento sul quale lavoriamo.
Poincare' diceva che, se ci fosse un universo in cui noi non avessimo la sensibilita' termica, e ci mancasse una quantita' di fenomeni fisiologici per cui siamo sensibili al cambiamento della temperatura, nel momento in cui noi misurassimo le distanze trasportando dei regoli, questi potrebbero dilatarsi da un punto all'altro; noi pero' non riusciremmo a concepire alcuna diversita' fisica da un punto all'altro, non sentendo la differenza di stati fisici, quindi giudicheremmo uguali tra di loro regoli che potrebbero non esserlo.
Questo per mettere in chiaro che c'e' una quantita' di costruzioni teoriche che noi consideriamo naturali, necessarie, e che invece sono solo abituali e ragionevoli. Lascio a loro il giudizio se nella scuola elementare sia utile portare la nomenclatura tecnica o sia meglio limitarsi a fare certe osservazioni che sono quelle basilari.
Ci sono grandezze della geometria, per esempio segmenti, ampiezze di angoli, lunghezze di archi di circonferenze con lo stessso raggio, per cui la verifica del sussistere della uguaglianza si riduce ad una operazione molto semplice che e' il trasporto rigido, supposto di conoscere dall'esperienza concreta e da tutto l'insieme delle propriocezioni (cioe' delle sensazioni che noi abbiamo della posizione di un altro corpo, dello sforzo che noi eseguiamo sui corpi che manipoliamo) che cosa vuol dire corpo rigido e trasporto rigido. Se non preciso le modalita' del trasporto, se un corpo e' fatto di pasta di pane o di pongo ovviamente nel trasporto si deforma.
E' il discorso di Euclide: due figure sono uguali quando trasportate una sull'altra vanno a coincidere. Supponiamo di sapere che cosa vuol dire che le due figure sono rigide, e allora le trasportiamo una sull'altra.
C'e' tutta una quantita' di esperienze che diamo per note, di qualita' di corpi concreti che diamo per conosciuti e invariabili, le quali ci permettono di fare questa operazioncina e quindi di distinguere questa classe, che viene chiamata classe di equivalenza (uso la nomenclatura dei libri di 60 anni fa sui quali ho studiato io). La relazione che cosi' si ottiene e cosi' si verifica viene da molti autori chiamata congruenza.
Gia' Euclide aveva osservato che si possono dare altre grandezze per cui la verifica della relazione di uguaglianza non si ottiene in un modo cosi' semplice. Il caso piu' semplice, quello che si puo' portare nella scuola elementare, perche' e' di immediata percezione, e' la procedura che viene seguita nella geometria elementare per la definizione del concetto di area. Se vogliamo essere rigorosi, non definiamo l'area: la misura dell'area e' un'altra cosa, ma la definizione del concetto di area la diamo in forma implicita, cioe' definiamo soltanto che cosa vuol dire che due figure poligonali hanno uguale area. Cosi' come non diciamo che cos'e' il peso di un corpo, ma solo che cosa vuol dire che due

corpi hanno lo stesso peso; e' la definizione implicita o definizione d'uso: precisiamo quali sono le circostanze entro le quali accettiamo di dire che due figure hanno la stessa area.
Certo e' molto piu' semplice memorizzare qualche formula, ma e' molto piu' rigoroso accontentarsi della definizione implicita.
Nel caso della costruzione del <u>concetto</u> <u>di</u> <u>area</u> risulta evidente, o accettiamo dall'evidenza della manipolazione degli oggetti, che sia possibile dare la stessa area a due figure poligonali ad esempio che non sono sovrapponibili con una sola operazione di trasporto rigido, ma sono decomponibili in un numero finito di parti poligonali tali che le parti accostate con tecnica diversa diano una volta una figura e una volta un'altra. Qui presumiamo di sapere che cosa vuol dire accostare due parti poligonali, cioe' due figure in maniera che abbiano una parte di perimetro in comune. Il caso tipico della decomposizione e' quando si fabbrica il rettangolo a partire dal triangolo e viceversa. Allora gli autori che hanno considerato questa operazione (non Euclide, che li chiama uguali e basta) hanno fatto questa osservazione, che si puo' parlare di uguaglianza di area con una relazione che costruisce una classe di equivalenza delle figure poligonali, e la cui verifica e' un po' piu' complicata della sovrapponibilita'.
Questa distinzione puo' sembrare da una parte una pignolata, ma dall'altra e' abbastanza interessante anche da portarsi nella scuola elementare; si puo' chiedere ai ragazzini: che cosa vuol dire avere la stessa area? Si puo' rispondere con il discorso intuitivo che si trova dappertutto e che non e' privo di fondamento: immaginiamo di costruire le figure col cartoncino, immaginiamo di intuire o dare per noto che il peso del cartoncino o il peso di una vernice che noi usiamo per verniciarlo per esempio e' proporzionale all'area. La definizione di area di una superficie curva e' stata data nel secolo scorso dopo le celebri polemiche di Peano, (che litigava con tutti) che ha fatto vedere che la definizione del concetto di area era sbagliata perche' mancava una precisazione; cosi' si e' fatto nemici tutti i matematici francesi anche di altissimo livello che avevano adottato quella definizione da molto tempo; invece Minkowski per superare quella difficolta' propone una definizione di area di una superficie curva: come misuri la superficie di una pera, o della cupola di San Pietro? Puoi fare un'operazione di limite, se vuoi; oppure Meschkowski dice: disponi un velo sottilissimo di vernice su tutti i punti della pera, e allora l'area risulta proporzionale al peso della vernice; se vuoi proprio misurarla, dividi il volume della vernice per lo spessore piccolissimo dello strato di vernice, e otterrai un valore abbastanza approssimato; cosi' l'area della superficie del corpo umano, come in quel famoso film di Goldfinger che aveva verniciato d'oro tutta la ballerina, e aveva potuto anche calcolare l'area della superficie del corpo della ballerina usando il volume della vernice che aveva usato.
Fermiamoci alle aree poligonali piane; il ragazzino capisce qual'e' la differenza tra fare una unica operazione e farne un'altra che puo' in teoria anche essere molto complicata, e definita di volta in volta in base alle figure che abbiamo, e puo' dare oltretutto diversi risultati (un esempio e' il tangram, tutte le figure che costruisco hanno la stessa area); ecco che costruiamo un concetto che puo' essere dominato con gli strumenti della matematica, e non e' solo un gioco.

-Domanda: Per riassumere, nella Scuola Elementare e' importante distinguere i termini di uguaglianza e congruenza?

-Prof.Manara: E' l'insegnante che deve valutare quando l'uso di termini tecnici aiuta a far progredire il "cliente": esso presuppone un'analisi ed e' utile quando l'analisi e' necessaria (ad esempio io non ho mai avuto bisogno di conoscere la distinzione tra multa e ammenda, e l'ho imparata solo quando un mio collega pignolo ha voluto spiegarmela). Sono contrario all'uso del linguaggio tecnicizzato (e alle distinzioni inutili, date per sforzo di nomenclatura) se i bambini non lo collegano a dati ben precisi.
In geometria distinguiamo tra congruenza ed uguaglianza; ai miei tempi si diceva: tra congruenza ed equivalenza, essendo l'equivalenza, che pure gode le proprieta' riflessiva simmetrica e transitiva, che pure e' fondamentale per la costruzione del concetto di area, una relazione piu' generale, nel senso che due figure congruenti sono certamente equivalenti, ma non e' detto che due figure equivalenti siano congruenti.
In geometria si fanno tutte quelle operazioni per giustificare il calcolo delle aree, per cui ogni poligono viene ricondotto ad un poligono equivalente con un lato di meno, e si arriva al quadrilatero, poi si costruisce il parallelogrammo, poi il rettangolo, e si dimostra che rettangoli che hanno le basi congruenti hanno le aree proporzionali alle altezze, e viceversa, e allora si giustifica la regola del prodotto per la misura dell'area; questo e' pero' un passo ulteriore, perche' questa regola gia' ci conduce all'uso del linguaggio matematico, cioe' ad una codificazione coi numeri; effettivamente questa operazione di riduzione, codificata ma non in modo unico, perche' le figure sono tantissime e diverse, ci permette come diceva Veronese di ricondurre il confronto tra due grandezze di seconda specie alle grandezze di prima specie. Se io per esempio prendo due poligoni, uno con duemila lati e l'altro con duemilacinquecento, e con l'operazione di cui ho appena parlato, che e' scritta sui libri di geometria, li riconduco a due rettangoli che hanno un lato congruente, ecco che il confronto viene fatto sugli altri due lati, e quindi il confronto viene ricondotto a quello di due grandezze di prima specie. Questo discorso geometrico e' estremamente importante, perche' e' un discorso di riduzione, cioe' ci da' una tecnica precisa di ricondurre le operazioni a grandezze di prima specie.
Non vorrei che queste preoccupazioni di tipo semantico fossero troppo gravi, perche' il vocabolario cambia molto da autore ad autore. Come ho detto la volta scorsa Euclide usa sempre il termine uguali e basta, pero' gli autori piu' recenti hanno voluto fare delle distinzioni.

Per quanto riguarda la <u>congruenza</u>, ci sono autori che chiamano congruenti due figure quando sono sovrapponibili con un movimento rigido, quindi distinguono la congruenza dalla isometria, chiamando isometria una corrispondenza biunivoca la quale conserva gli angoli e le distanze tra tutti i punti corrispondenti ma non puo' essere realizzata con un movimento rigido, per esempio la corrispondenza tra una figura e la propria immagine speculare. Altri autori chiamano isometria una corrispondenza piu' generale della congruenza; in tal caso ogni congruenza e' una isometria, ma non ogni isometria e' una congruenza, perche' la congruenza fa riferimento anche alla operazione concreta con cui una figura viene portata sopra un'altra, immaginando che sia rigida e che si sappia che cosa vuol dire movimento rigido; invece una isometria puo' essere una corrispondenza, come quella speculare o quella tra le due mani, che, pur conservando le distanze e gli angoli dei singoli elementi se misurati uno ad uno, non puo' pero' essere realizzata con un movimento rigido di sovrapposizione.

LETTURA II

Per quanto riguarda poi l'uguaglianza, la discussione e' un po' filosofica, un po' logica e un po' matematica, perche' ci sono autori che considerano l'uguaglianza come una relazione data in astratto, che ha un significato indipendente dalle cose, quindi una relazione assoluta; altri dicono: questa relazione assoluta non ha senso perche' ciascuno sarebbe solo uguale a se stesso.
Leibnitz da' la nota definizione: "duo eadem sunt quando quidquid praedicatur de uno praedicatur etiam de altero salva veritate". Questa definizione filosofica dell'uguaglianza con significato assoluto e' difficilmente difendibile se non si fanno delle distinzioni, dei gradi e dei significati. Ad esempio se scrivo: 1+1=2 , e voglio indicare che l'uguaglianza non sussiste tra i simboli, ma tra le cose indicate, quelli sono due diversi nomi di una medesima cosa; allora in questo modo il segno uguale indica l'uguaglianza di significato.
Poi c'e' un'altra posizione, quella di Helmoltz, tenuta anche dal mio maestro Prof. Chisini: l'uguaglianza ha un significato relativo, cioe' puo' essere definita quando si da' un'operazione che porta le due cose a coincidere. Diceva il mio maestro con una frase paradossale: due cose per essere uguali devono essere anzitutto diverse; cioe' l'uguaglianza e' una relazione che e' costituita dalla possibilita' di trasformare una cosa in un'altra. Se mi metto nell'ambito della geometria dei movimenti rigidi, due circonferenze sono uguali solo se hanno uguale raggio, perche' le posso portare una sull'altra con un movimento rigido; se mi metto nella geometria delle similitudini, due circonferenze sono sempre uguali tra di loro. Se mi metto nella geometria proiettiva, una circonferenza e' uguale ad una conica qualsiasi, a un'ellissi, a un'iperbole. Questo discorso dell'uguaglianza viene riferito in questo atteggiamento alla possibilita' di dare delle trasformazioni o delle manipolazioni che portano una cosa sull'altra.
Quando dico che i numeri di due insiemi sono uguali, o che due insiemi hanno lo stesso numero di elementi, significa che esiste un'operazione ben precisa e ben precisabile, che e' quella di costituire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'uno e gli elementi dell'altro, che mi da' una relazione ben determinata. Questa si esprime scrivendo che i due numeri sono uguali.
Su questo discorso i filosofi hanno scritto moltissimo, partendo da San Tommaso d'Aquino, Leibnitz, Schopenauer, poi altri, poi nel secolo scorso Veronese, Peano ecc. Per quanto riguarda gli oggetti della geometria, che partecipano della materialita' oltre che dei

concetti, io preferirei chiamare uguali due figure quando e' possibile pensare una trasformazione che le porta una sull'altra. Qui e' veramente la scelta di un itinerario concettuale e didattico; uno domanda: si sovrappongono perche' sono uguali, o sono uguali perche' si sovrappongono? Quale punto di partenza scegliamo? Immaginiamo che la relazione di uguaglianza sia una cosa data, e che la sovrapposizione verifichi semplicemente questa relazione che per se' e' fondata ed esistente indipendentemente dalla manipolazione, oppure l'uguaglianza delle figure e' costituita dalla manipolazione che io eseguo su di esse?
Il mio maestro aveva scelto questa seconda strada, che e' quella che scelgo anch'io; infatti quando facevo lezione di geometria differenziale in questa stessa aula dicevo sempre: la geometria e' costituita dal gruppo di trasformazioni, perche' a seconda delle manipolazioni che io ritengo lecite sulle cose, sui concetti o sulle figure astratte, il concetto di uguaglianza varia.
Per le similitudini, ripeto, tutte le circonferenze e tutti i quadrati sono uguali tra di loro, ed e' questo il livello di astrazione in cui si mette la geometria euclidea: indipendentemente dalla unita' di misura ecc. conta la forma. Il quadrato e' sempre un quadrato, perche' esiste una trasformazione che e' la similitudine, che noi supponiamo di poter eseguire, che porta il quadrato di due centimetri nel quadrato di due chilometri. Le cose che interessano la geometria sono invarianti rispetto a quel gruppo che sono le similitudini.

LETTURA III

-Domanda: Come si situa il discorso della simmetria?

-Prof.Manara: La <u>simmetria</u> e' una particolare isometria, cioe' corrispondenza biunivoca tra elementi (punti segmenti angoli ecc.) in cui sono conservate le misure dei singoli elementi corrispondenti: tuttavia non ogni isometria e' realizzabile con un'operazione che rimane nel nostro spazio, perche' se io prendo una simmetria rispetto ad un centro nel piano, allora la posso realizzare girando il piano di 180 gradi intorno ad un centro, se prendo una simmetria rispetto ad una retta la posso realizzare ma ribaltando il piano, cioe' facendolo uscire; se invece vado nello spazio, ecco che la simmetria speculare non e' piu' realizzabile con operazioni concrete che rimangano nel nostro spazio: e' il caso tipico di isometrie che non sono congruenze, riservando il nome di congruenza alla corrispondenza che si puo' verificare col movimento rigido. Ecco che per un certo sistema di nomenclatura l'isometria diventa un caso piu' generale di congruenza.
Tutti i discorsi che ci sono sui libri di come si realizzano questi movimenti sono discorsi non molto importanti, tutto sommato il loro fondamento e' poi nei criteri di uguaglianza dei triangoli che si trova negli Elementi di Euclide, in cui l'uguaglianza viene definita col trasporto, e sotto c'e' il discorso di accettare come noto il trasporto rigido. E' una lacuna di Euclide, come aveva gia' rilevato il filosofo Schopenauer, perche' introduce un elemento meccanico in una dottrina cosi' ideale come la geometria. Perche' questa lacuna non diventi un circolo vizioso, bisogna

uscirne scegliendo i concetti che diamo per noti: diamo per noto il movimento rigido che fa parte della nostra esperienza quotidiana, e serve per definire l'uguaglianza, oppure diamo per nota una relazione di uguaglianza che noi supponiamo esistente. Io sono d'accordo col mio maestro che diceva: codifichiamo anzitutto i nostri comportamenti; cioe' io ammetto di potermi comportare cosi' e cosi' nei confronti delle figure, di poterle trasformare in un certo modo; allora la trasformazione e' costitutiva della relazione di uguaglianza, nel senso che quando porto due figure una sull'altra le chiamo uguali.
Si dimostra che la proprieta' delle operazioni di formare gruppo nel senso tecnico dell'algebra sono fondamento delle proprieta' riflessiva simmetrica e transitiva dell'uguaglianza. Dal punto di vista logico formale le strade sono equivalenti, si tratta di essere coscienti delle cose che diamo per scontate e delle cose che definiamo.

2.3 Classi di equivalenza.
Significato dei termini: segmento, lunghezza, misura della lunghezza. Il metro.

PUNTO DI RIFERIMENTO: NOI SCEGLIAMO DI PASSARE DALLA CONOSCENZA DEGLI OGGETTI ALLA COERENZA DEI NOSTRI COMPORTAMENTI NEI RIGUARDI DEGLI OGGETTI.

Per questo motivo, dietro ad ogni teorizzazione c'e' una serie di operazioni che noi immaginiamo di poter eseguire concretamente e che ci consentono di sostituire un oggetto con un altro, in modo da poterne scegliere uno qualsiasi per studiarne le proprieta' invarianti.

Ad esempio, per quanto riguarda le lunghezze, noi scegliamo di usare questa nomenclatura:
SEGMENTO: figura della classe di equivalenza di tutti i segmenti sovrapponibili tra loro;
LUNGHEZZA DEL SEGMENTO: la classe di equivalenza;
MISURA DELLA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO: parliamo della misura della lunghezza, e non di misura del segmento, in quanto la misura non dipende dal particolare oggetto, ma dalla classe di equivalenza a cui esso appartiene.
In seguito ad una domanda, viene poi precisato che noi intendiamo il metro come una unita' di misura convenzionale delle lunghezze, naturalmente, e non dei segmenti.

LETTURA I

Io cercherei, se fosse possibile, di evitare di introdurre distinzioni di denominazioni, perche' i vari autori hanno diversi vocabolari, dato che ciascuno sceglie una strada per precisare il significato delle parole del linguaggio comune. Io ad esempio preferisco distinguere il segmento come figura dalla classe di equivalenza di tutti i segmenti sovrapponibili tra di loro, chiamare quindi lunghezza del segmento la classe di equivalenza, parlare poi di misura non del segmento ma della lunghezza del segmento, perche' la misura che ottengo non dipende dal particolare oggetto ma solo dalla classe di equivalenza. Questo pero' e' un itinerario logico che io scelgo, perche' mi sembra chiarisca i vari strati mentali di astrazione e di codificazione mediante numeri. E' la strada del mio maestro: dietro ogni teorizzazione c'e' una serie di operazioni che noi immaginiamo di poter eseguire o eseguiamo concretamente e che portano un oggetto sull'altro in maniera da poterne scegliere uno qualsiasi per studiarne le proprieta' invarianti. Il concetto di uguaglianza diventa non relativo, ma precisato in base alle operazioni che noi decidiamo di poter fare, e che ci porgono quello che la filosofia scolastica chiamava oggetto formale; io lo chiamerei punto di vista sotto il quale guardiamo quel determinato oggetto, punto di vista che e' chiarito dal gruppo di trasformazioni che io di volta in volta presumo di poter fare su questi oggetti. Questo discorso, ripeto, ha un secolo di vita, perche' riguarda Helmoltz, riguarda Klein, il quale ha fatto il celebre discorso che cito sempre del programma di Erlangen, in vista della nascita di tanti rami della geometria che sembravano diversi tra di loro, e il momento unificante e' proprio questo: che cosa vuol dire che due figure sono uguali; sono uguali se c'e' un gruppo di trasformazioni che le porta una sull'altra. Se cambi il gruppo, cambi nozione di uguaglianza, che non e' piu' una nozione assoluta, ma e' una nozione che ha il suo fondamento nel gruppo di trasformazioni. La geometria elementare implicitamente studia le proprieta' invarianti per similitudine.

La circonferenza e' sempre una circonferenza, ecc., e le proprieta' che interessano al geometra sono quelle indipendenti dalla particolare realizzazione.

Cio' non significa che il disorso dell'uguaglianza sia assolutamente relativo: allora non ci sono piu' cose uguali? No, perche' l'assolutezza viene scaricata sulle spalle della coerenza del mio comportamento, cioe' se io scelgo di definire l'uguaglianza mediante un gruppo di trasformazioni, poi devo essere coerente con questa definizione. Per la geometria proiettiva ad esempio l'ellisse e' uguale alla circonferenza, mentre se la faccio rotolare l'ellisse non e' uguale alla circonferenza; perche' il gruppo di trasformazioni della geometria proiettiva e' diverso dal gruppo di trasformazioni della geometria elementare.

Del resto quando facevo lezione di geometria proiettiva io dicevo che quasi mai noi vediamo le cose rotonde come rotonde: i piatti che sono sulla tavola noi li vediamo come ellissi, per vederli come circonferenze bisognerebbe andare sul piatto e mettere l'occhio sulla retta perpendicolare al piano che passa per il centro. Noi vediamo come ellissi anche le ruote di automobile ecc., solo attraverso una operazione nervosa di ricostruzione della posizione le vediamo come rotonde; se io prendessi una fotografia, a meno che essa non sia stata fatta da un punto della retta perpendicolare al centro, mi accorgerei che sono tutte ellissi.

Succede che noi diamo per scontata tutta una serie di trasformazioni che sono la ricostruzione della posizione dell'oggetto in quella che ci pare essere la sua situazione reale. Nei giochi televisivi sull'oggetto misterioso capiamo che oltre alla forma dell'oggetto noi prendiamo una quantita' di informazioni da tutto il quadro in cui l'oggetto e' inserito, per cui se noi conosciamo l'ambiente, o se la figura ci da' informazioni riguardo all'ambiente, ricostruiamo il significato dell'oggetto; diversamente non riusciamo a dire niente. In quel famoso libro "Il nostro agente all'Avana" il Tizio che faceva lo spionaggio mandava fotografie di aspirapolvere ingrandite dicendo che erano impianti atomici. E' un caso tipico della relativita' dell'uguaglianza: e' chiaro che l'aspirapolvere non e' uguale all'impianto atomico, ma se io tolgo il contesto esiste una trasformazione che trasforma l'aspirapolvere in quella roba la'.

Io quindi farei sempre il discorso relativo alle operazioni che faccio, o che implicitamente ritengo di poter fare, precisando tuttavia che questo discorso non e' una relativizzazione, non e' una demolizione della conoscenza razionale, ma e' trasportare la razionalita' da un'altra parte, cioe' dalla conoscenza degli

oggetti alla coerenza dei nostri comportamenti nei riguardi degli oggetti. Dopodiche possiamo scegliere il nostro comportamento e non e' che la conoscenza diventi relativa: diventa sempre coerente, ma dobbiamo mettere in chiaro il punto di partenza. Per esempio due segmenti uguali per la geometria euclidea non lo sono per quella non euclidea, perche' convengo di operare in modo diverso.
La moltiplicazione della nomenclatura che si ritiene tecnica o che si fa passare per tecnica e' forse pericolosa perche' si rischia di giudicare sbagliate cose che semplicemente partono da diverse convenzioni. Spesso insegnamo una serie di parole inutili credendo che siano concetti e invece non lo sono, o insegnamo termini tecnici che sembrano il frutto di un'analisi, mentre l'analisi bisogna farla si' ma all'origine della nostra schematizzazione.

LETTURA II

-Domanda: Ho una domanda di tipo linguistico: il metro e' un'unita' di misura della lunghezza o del segmento?

-Prof.Manara: Io ho scelto una strada che non e' condivisa da tutti; non posso dire di aver ragione perche' le convenzioni di linguaggio non si dimostrano. Alcuni Autori identificano il segmento con la sua lunghezza, cioe' chiamano lunghezza del segmento il segmento: questo secondo me non va bene, pero' e' una scelta. Io ho voluto distinguere il segmento dalla classe di equivalenza di tutti i segmenti che si possono sovrapporre ad esso, e chiamarla lunghezza del segmento (Burali Forti da' della lunghezza una definizione piuttosto complessa). Questo segmento singolo e quest'altro hanno in comune una certa proprieta' che e' la lunghezza, che appartiene a questo segmento e a tutti gli altri che si possono sovrapporre ad esso mediante movimento rigido.
Preferisco poi parlare di misura della lunghezza del segmento, perche' l'operazione di misura mi da' sempre lo stesso risultato, applicata ad uno qualunque. Quindi io parlerei di segmento, lunghezza del segmento, misura della lunghezza del segmento.
La cosa piu' importante tuttavia e' che uno chiarisca il significato dei termini che usa e delle operazioni che intende eseguire per dar senso a quei termini, dopodiche' se le convenzioni sono diverse, pazienza, vuol dire che abbiamo un'idea diversa.
Analogamente, io parlerei di misura dell'area, nel senso che do' un significato numerico convenzionale ad una certa proprieta' che e' comune a questa figura e a tutte quelle che sono equidecomponibili con essa. Cosi' come fin dall'epoca di Socrate e Platone si distingueva tra il concetto di uomo e quello di umanita', non come collezione di esseri umani, ma come essenza dell'essere uomo che puo' venir detto di Tizio Caio Sempronio .. di Socrate ecc.: concetto universale, cioe' che vale per tutti. Quest'operazione di astrazione e' fondamentale, e' la costruzione dell'universale. Lasciamo da parte il discorso sulle modalita' con cui arrivo all'universale, perche' questo e' un discorso di carattere filosofico, ma nel caso della geometria e' immediato: io arrivo al concetto generale attraverso un certo gruppo di

operazioni che e' il trasporto rigido. Nel caso della geometria il discorso di Klein dei gruppi di trasformazioni e' quello che codifica l'operazione di costruzione dell'universale. Se poi vogliamo sapere che cos'e' l'area di una figura, questo e' un altro discorso: noi ci accontentiamo di dire quand'e' che due figure hanno la stessa area. Cosi' come non sappiamo che cos'e' la temperatura di un corpo, ma assegnamo un numero che in qualche modo la rappresenta; il Prof. Polvani diceva che in prima approssimazione basterebbe un termoscopio, cioe' uno strumento che ci dica quando un corpo e' piu' caldo di un altro, o altrimenti l'operazione concreta di metterli a contatto e vedere quale si raffredda e quale si riscalda.
Questi discorsi oggi sono universalmente accettati, ma solo un secolo e mezzo fa non era cosi': se uno va a leggere i libri di fisica della fine del '700 e dell'inizio dell' 800 trova tutte le definizioni: e' occorso un secolo di critica per poterle demolire.

3. ESISTENZA DI UN'OPERAZIONE INTERNA

3.1 Secondo passo. Operazione di somma e sue proprieta'.

ESISTENZA DI UN'OPERAZIONE DI COMPOSIZIONE INTERNA (SOMMA) PER OGNI CLASSE DI GRANDEZZE OMOGENEE; RELATIVE PROPRIETA' COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA E COSTRUZIONE ARTIFICIALE DELLA GRANDEZZA ZERO (ASSIOMI II, III, IV E TEOREMI CONSEGUENTI).

Ci sono alcune proprieta' dell'operazione di composizione interna che noi accettiamo e che sono immediata conseguenza del buon senso: la somma di due grandezze diverse da zero non puo' mai dare zero; accettiamo anche che aggiungendo grandezze uguali a due grandezze uguali si ottengono grandezze uguali.

**Vengono inoltre esaminate alcune procedure con cui si assegnano dei numeri per fornire informazioni a vario titolo.
In alcuni casi questi numeri sono indici di stato, per essi non ha senso l'operazione di somma; invece le grandezze, attraverso l'operazione della misura, vengono sostituite con numeri che si possono sommare e l'applicazione delle proprieta' formali permette la deduzione rigorosa.**

LETTURA I

Fatto questo primo passo, che si puo' codificare con assiomi ben determinati, il secondo passo e' l'esistenza di una operazione di composizione interna (v. Parte I/II,2), come si suol dire; cioe' per ogni classe di grandezze omogenee noi possiamo determinare un'operazione che chiameremo somma, che date due grandezze della classe ci conduce a costruirne una terza. Qui c'e' un equivoco su cui val la pena di soffermarsi, perche' val la pena di distinguere tra l'operazione e il risultato della stessa: invece di somma avrei dovuto dire composizione. Rinunciando alla volonta' di rigore di cui sopra, usero' la stessa parola somma promiscuamente per due significati: l'operazione e il suo risultato.
Questo e' il secondo momento distintivo del concetto di grandezza cosi' come noi vogliamo circoscriverlo; l'esistenza di questa operazione ci permette di introdurre una distinzione fondamentale, che riguarda l'impiego del linguaggio matematico per la rappresentazione della realta'. Il prof. Polvani circa 50 anni fa ci faceva distinguere tra i numeri che indicano uno stato fisico, e quelli che indicano le grandezze fisiche (v. Parte I/V,6). Il numero che indica uno stato fisico e' in sostanza una coordinata, ad esempio la data non e' una grandezza, e' un numero che indica tuttavia una coordinata temporale. Non e' che non ci dia informazioni, perche' la scansione del tempo e' trasferita, ribaltata sulle proprieta' di ordinamento dell'insieme dei numeri, e quindi possiamo dire che cio' che e' avvenuto nel 1900 e' stato anteriore a cio' che e' avvenuto nel 1910. E' una cosa talmente naturale che fa venir da ridere rifletterci su; ma e' una cosa veramente importante che una struttura linguistica, quella dei

numeri, riproduca le proprieta' di un fatto cosmologico quale e' il passare del tempo. Tuttavia se non conoscessimo la struttura d'ordine dell'insieme dei numeri utilizzare dei numeri per dare delle date non ci darebbe tutte le informazioni che invece noi deduciamo dalle date.
Non ha pero' senso sommare due date, perche' quei numeri indicano certe proprieta' della realta' cosmologica, ma non tutte quelle che ci danno invece le misure delle grandezze. Ha senso invece sommare due durate, perche' la differenza di due date ci da' una durata, che noi consideriamo come una grandezza. Cosi' sono grandezze fisiche le differenze di potenziale elettrico o gravitazionale, non i potenziali stessi, che sono numeri indici di stato.
Non ha senso sommare due temperature, ma la differenza di due temperature ha significato fisico, come minimo perche' il secondo principio della termodinamica dice che il calore passa spontaneamente dal corpo di temperatura maggiore a quello di temperatura minore. Ecco l'informazione che ci e' data dalla differenza di temperatura; perche' quando io dico: un corpo ha la temperatura di 37 gradi, ne so come prima; ma se io dico che tra due corpi c'e' una differnza di temperatura di tot gradi, allora so che se li metto a contatto avviene un fenomeno fisico ben determinato, non solo ma facendo un discorso termodinamico esso puo' essere collegato a tutta una serie di ragionamenti energetici sul calore.

Questa operazione di somma ha le classiche <u>proprieta' dell'operazione</u> <u>di</u> <u>somma</u> tra numeri naturali, commutativa e associativa.
Costruiamo artificialmente una grandezza zero, che non e' necessaria ma e' molto utile. Essa risulta essere una costruzione della nostra mente, ed e' molto utile perche' risulta essere l'elemento neutro dell'operazione di composizione che abbiamo deciso di chiamare somma. La giustificazione del nome e' data dal fatto che questa operazione ha le stesse proprieta' formali di quella operazione che noi chiamiamo somma e che operiamo sui numeri. Questa osservazione era stata fatta con molto brio e con molta arguzia nell'Enciclopedia di Matematiche Elementari dal compianto mio maestro prof. Giovanni Ricci. Quando scrivo a+b, dice, ci sono due correnti di pensiero; una dice: devi precisare con un simbolo diverso di volta in volta se sommi due numeri o due segmenti o due aree o due velocita', altrimenti fai confusione; l'altra dice: benvenuta la confusione, perche' le proprieta' di questa operazione sono sempre le stesse qualunque sia l'ente, quindi e' sempre vero che a+b = b+a, tanto se si tratta di numeri che di lunghezze o di velocita'.
Tuttavia questo atteggiamento e' il risultato di una scelta, non possiamo dire che sbagliano gli altri se vogliono fare la distinzione. La scelta di usare il termine somma anziche' composizione e' giustificata dal fatto che le operazioni che noi eseguiamo sono definite dalle loro proprieta' formali, quindi decidiamo di chiamare somma due operazioni eseguite anche su diversi enti quando hanno le stesse proprieta' formali: commutativa e associativa. Sono le proprieta' formali quelle che ci permettono la deduzione rigorosa. Del resto se facciamo i conti con il computer noi mettiamo dentro dei numeri: che i numeri rappresentino granelli di sabbia, lire o chili di peso, il

computer fa le somme e basta, applica cioe' le proprieta' formali del linguaggio che utilizziamo per rappresentare di volta in volta la realta'; siamo noi che dobbiamo saper leggere i risultati.
Esiste un pericolo didattico (v. Parte I/introd,4), a tutti i livelli di scuola, che e' quello di scaricare nella testa dei discenti un vocabolario tecnico che non e' giustificato dalla loro esperienza; allora esso resta memorizzato semplicemente e non posseduto, perche' il discente non ne vede la necessita'; quando poi il complesso delle esperienze e delle conoscenze giustifichera' ai suoi occhi l'uso di termini diversi, perche' riguarda distinzioni effettive che egli sa fare e ha visto fare, allora il vocabolario tecnico viene acquisito e motivato.

LETTURA II

Riassumendo, ci siamo soffermati sul discorso delle grandezze, sulla relazione di uguaglianza, e soprattutto ci siamo dilungati per far vedere come ci siano diversita' di tecniche per verificare il sussistere di questa relazione, diversita' di tecniche che portano talvolta i trattatisti a distinguere tra uguaglianza e congruenza. Abbiamo detto poi che, se abbiamo la possibilita' di costruire delle classi di equivalenza (il che e' gia' una realizzazione concreta dell'operazione di astrazione, perche' significa riconoscere in un elemento le proprieta' generali di tutta la classe) consideriamo in secondo luogo una operazione che chiamiamo somma.
Alcuni autori usano vari simboli e nomi; io la chiamo somma come se fosse la somma di numeri. Questa e' una scelta, che faccio, primo, perche' data l'infinita' delle classi di grandezze bisognerebbe coniare una parola tecnica per ognuna e non si finirebbe piu'. Secondo , perche' in quest'operazione che chiamiamo somma il nome e' giustificato dalle proprieta' formali dell'operazione: commutativa e associativa, che sono quelle che qualificano la somma di due numeri. Nel caso dei numeri poi esiste un elemento anomalo che e' lo zero, inventato dagli Indiani, non necessario ma estremamente utile; lo zero non e' un numero, cioe' non e' il risultato del conteggio degli elementi di un insieme; dire che quando un insieme e' vuoto il numero dei suoi elementi e' zero e' una convenzione non cervellotica, non contradditoria, estremamente comoda. I Greci facevano calcoli spaventosi, a pensarci, senza lo zero. Tutta la matematica antica, esclusi gli Indiani, lavorava senza lo zero. Il che ci dice che la scelta di introdurre lo zero tra i numeri naturali e' una cosa molto utile ma non e' il risultato di una necessita' logica.
In modo analogo, data una classe di grandezze, parliamo della grandezza nulla; e' un'operazione convenzionale analoga a quella per cui introduciamo lo zero in un insieme di numeri, operazione non necessaria, perche' nessuno va dal droghiere a comperare zero chili di zucchero. Questa grandezza nulla ci funziona come elemento neutro dell'operazione di composizione interna.
All'operazione di composizione interna poi diamo certe proprieta' che sono immediata conseguenza del buonsenso, cioe': la somma di due grandezze diverse da zero non puo' mai dare lo zero, questa e' la cosa piu' immediata che accettiamo come valida, e accettiamo anche che aggiungendo grandezze uguali a due grandezze uguali si

ottengono grandezze uguali. Quindi le proprieta' che l'osservazione concreta ci da' come immediate noi le accettiamo.

DISCUSSIONE SU COME RICONOSCIAMO LE GRANDEZZE

NOTA: Negli esempi che seguono si lavora sulle misure delle grandezze, anziche' sulle grandezze stesse (cioe' si da' per scontato di aver fatto un'operazione di misura). In realta' l'introduzione della misura, da un punto di vista teorico, e' una cosa piuttosto complessa, tuttavia le considerazioni dei bambini sono valide, poiche' essi fanno riferimento alla loro concreta esperienza quotidiana.

Ins. A.: Dicevo ai bambini: tutti i giorni ci capita di usare le misure, ad esempio, ieri abbiamo fatto tanti chilometri in macchina, al mercato la mamma ha comprato le mele a chili, ecc.
Ho proposto di cercare semplici situazioni in cui noi dovessimo usare la somma di misure. Il primo esempio che hanno fatto e' stato col peso: la mamma compera un etto di prosciutto e un etto di pancetta, quanti etti di salumi compera in tutto? Poi c'era la lunghezza (in realta' loro distinguevano tra lunghezza e altezza, ma poi si sono accorti che si misurano entrambe con il metro): percorro prima una strada lunga 4 km, poi una lunga 2 km, quanti km percorro in tutto? Poi la temperatura; un bambino inizia: in casa mia ci sono 10 gradi, in casa di mia nonna c'e' molto piu' caldo, ci sono 20 gradi, qui si e' fermato. Allora l'ho aiutato: non possiamo dire quanti gradi ci sono in tutto, in questa situazione fare la somma non ha senso. Una bambina dell'altra quinta mi ha detto: pero' la differenza si'.

Ins. B.: Infatti abbiamo detto che la temperatura non e' una grandezza, ma la variazione di temperatura, si'.

Ins. A.: Poi c'era la capacita': una damigiana contiene 13 l di vino, un'altra ne contiene 20, in tutto quanto vino? Poi il tempo: gli anni, i millenni,... Un bambino ha detto: io ho 10 anni, la mia mamma 48, quanti anni abbiamo in tutto? Ma se io dico 58 non serve a niente! Allora abbiamo scritto: in questa situazione la somma non serve a nulla, si potrebbe trovare la differenza. Poi mi hanno detto: e' diverso pero' se io considero quanto tempo impiego a studiare, cioe' la durata di un'azione.
Una bambina ha detto: io per risolvere un problema impiego 5 minuti e per studiare storia 50 minuti. Quanti minuti studio in tutto?
Io ho lasciato il discorso a questo punto ed ora vi faccio una domanda: vale la pena di riscrivere l'elenco delle grandezze come lo avevamo fatto ingenuamente in terza? Scrivendo ad esempio: peso e' una grandezza, lunghezza anche, temperatura no, ma differenza di temperatura si',...

Ins. B.: Per esempio si potrebbe lasciare che i bambini parlino di "misura della temperatura", all'inizio, poi ad un certo punto si potrebbe approfondire la questione ponendo la domanda sulla somma. Oppure fin dall'inizio si potrebbe dire : per adesso accontentiamoci di parlare di misura della temperatura, poi preciseremo meglio il discorso. Questo modo di fare potrebbe evitare che il bambino pensi che gli cambiamo le carte in tavola.

Ins. C.: E' interessante anche la riflessione che si legge su "Introduzione al pensiero matematico" di Waismann:
- Si vede che e' possibile trovare l'analogo del concetto di somma nei campi piu' disparati, bisognera' soltanto tener presente che il termine "somma" acquista volta per volta nuovi contenuti...
Come ulteriori esempi potremmo citare la somma di due onde o di due colori (intendendo per somma di due colori il colore ottenuto dalla loro mescolanza). ...
Riflessioni analoghe si possono ripetere per il concetto di eguaglianza.-

Ins. D.: Ho visto che il III assioma afferma che esistono grandezze diverse dalla grandezza nulla. Poi c'e' un teorema in cui si dimostra che la grandezza nulla e' unica, ma allora come va a finire con gli angoli?

Ins. E.: Gia' lo scorso anno il Prof. Manara ci ha parlato di angoli e sui miei appunti si puo' leggere:
- C'e' il problema di dare un significato all'operazione che si esegue sugli angoli come se fossero una classe di grandezze, affinche' prenda senso l'espressione "misura dell'angolo".
Euclide definisce l'angolo come: "inclinazione di una retta rispetto ad un'altra". A dire il vero non e' immediato capire bene che cosa si intenda dire; significa semplicemente che noi diciamo che due rette formano un angolo quando non sono tra loro parallele.
Ma, come s'e' detto, ci sono due tipi di esperienze diverse. Se chiamo angolo quello che e' regione angolare, allora nel problema di misurare una estensione infinita sorgono quei famosi errori (vedi Legendre che confonde la misura dell'angolo con quella della regione angolare).
D'altra parte se devo definire o costruire in qualche modo una classe di grandezze, devo definire una operazione di somma, la qual cosa si fa bene sulla seconda esperienza, quella dell'orologio, e meno bene sulla prima.
Occorre anche distinguere il fatto cinematico da quello statico, perche' se io ho la lancetta che gira, quando torna al punto di partenza, l'inclinazione di una lancetta sull'altra e' zero; eppure la prima ha fatto un intero giro. <u>Questo problema di non corrispondenza biunivoca tra l'ente geometrico e la misura e' un'ulteriore complicazione che rende piu' difficile venirne fuori con discorsi di carattere elementare.</u> Infatti si deve stabilire un omomorfismo tra una classe di grandezze e un'altra classe modulo uno, come nel seguente esempio: 0,6+0,7=0,3.
Invero Busolini e Morin definiscono la somma a livello elementare per angoli piccoli, in modo che la somma di due angoli convessi dia ancora un angolo convesso, pero' il passaggio ad angoli qualunque diventa complicato.
L'intersezione di due regioni convesse e' ancora una regione convessa, quindi un segmento che ha i due estremi all'interno della regione e' formato da punti tutti interni alla regione. Ma nel caso della rotazione (che pure si riferisce ad esperienze elementari) la dimostrazione di questo fatto e' molto complicata (anche se la constatazione e' immediata).
Il riferimento cinematico (giro delle lancette dell'orologio) e'

piu' presentabile ai bambini, in quanto meno astratto dell'intersezione, ma il fatto di tornare a zero, pur avendo percorso un cammino lungo, e' difficile. C'e' pero' il vantaggio di evitare la confusione tra regione angolare ed angolo; si evita anche la confusione di cui parla la Castelnuovo tra i lati dell'angolo e l'angolo stesso.
Tutti i bambini possono fare riferimento all'esperienza di vedere girare qualcosa, e anche a quella che continuando a girare si ritorna al punto di partenza. Del resto anche l'equivalenza a meno di qualcosa e' un'esperienza di tutti i giorni: posso partire alle 23.30 da Milano e arrivare a Piacenza alle 0.10. Allora sono forse arrivato prima della partenza? No. Nel caso delle ore utilizziamo abitualmente questo tipo di equivalenza. Nel caso degli angoli si tratterebbe di trasferire la stessa esperienza con modalita' che in questo momento non saprei suggerire. -

4. DIVISIBILITA' E CONTINUITA'

4.1 L'elaborazione fantastica dei dati e la divisibilita'.

LA PROPRIETA' DI DIVISIBILITA': UNA GRANDEZZA SI PUO' SEMPRE CONSIDERARE COME SOMMA DI ALTRE DUE (ASSIOMA V)

ELABORAZIONE FANTASTICA DEI DATI DELL'ESPERIENZA.
La divisibilita' si presenta come indefinitamente ripetibile.
Posso continuare a dividere all'infinito un segmento e mai ottengo dei punti, ma sempre dei segmentini: se due punti sono distinti non si toccano e c'e' un segmento tra di loro, ed io posso ripetere la divisione.
Questo discorso che si fa per la geometria, si puo' anche rifare per le grandezze della fisica, solo che questa immagine non rende tutta la realta', anche se e' adeguata a certi fini.
IL QUADRO CHE NOI COSTRUIAMO E' LIMITATO AD UN CERTO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE, MA (ALMENO TEORICAMENTE) E' SEMPRE PERFETTIBILE.

LETTURA

Un'altra proprieta' che e' il fondamento di tutta una serie di discorsi che riguardano la geometria e la fisica e' la proprieta' di divisibilita' (v. Parte I/II,3). La incontriamo per prima con le grandezze, non la incontriamo con gli interi, perche' i numeri naturali non sono divisibili, invece per le grandezze noi possiamo sempre considerare una grandezza come somma di altre due. Il discorso comincia qui e va molto lontano, perche' questa possibilita' di dividere e' poi ripetuta in modo indefinito.
Gia' a questo livello c'e' una piccola considerazione che val la pena di fare. Se noi guardiamo questo segmento ci sembra tutto pieno, ma se ci mettiamo dal punto di vista della fisica atomica ci sono piu' buchi che nel formaggio gruviera. Questa nostra immagine del continuo pieno e' dovuta alla inadeguatezza dei nostri sensi. Se avessimo la sensibilita' a certe lunghezze d'onda quello che ci appare uno specchio ci sembrerebbe bucato. Allora qui avviene una elaborazione che la fantasia fa dei dati dell'esperienza ricostruendosi delle immagini nelle quali la divisibilita' e' presentata come indefinitamente ripetibile. Il segmento posso continuare all'infinito a tagliarlo a meta', a meta', e mai ottengo dei punti, sempre dei segmentini, per quanto piccoli, perche' i punti del segmento non sono come i grani del rosario. Non esistono due punti a contatto come le perle di una collana: se due punti sono diversi, non si toccano; e se sono diversi c'e' un segmento tra di loro, ed io ripeto la divisibilita'.
Allora questo discorso che si fa per la geometria si puo' anche rifare per le grandezze della fisica, soltanto che questa immagine per la fisica di oggi non dico che e' sbagliata, ma non rende tutta la realta', e' limitata, perche' quando arrivo agli atomi devo abbandonare l'immagine della indefinita divisibilita' e prenderne un'altra. Il quadro che noi costruiamo e' limitato ad un certo ordine di approssimazione, come tutti i quadri. Faccio un

esempio: la traiettoria della terra intorno al sole e' schematizzata con una curva, ma come minimo e' un tubo, la Terra e' abbastanza grossa, come minimo la Terra si comporta come una pallina che gira in un tubo, mentre noi la schematizziamo come un ente ad una dimensione. Allora e' sbagliato? Si', da un certo punto di vista e' sbagliato, ma non si puo' parlare di immagini giuste o sbagliate, si puo' parlare di immagini adeguate o non adeguate; per certi usi dell'astronomia e' chiaro che ogni stella e' rappresentata con un punto. E' sbagliata quest'immagine? Si', se pretendiamo che renda tutta la realta', ma per certi impieghi della schematizzazione puo' essere giusto dare le coordinate di una stella.
Faccio questo discorso perche' d'ora innanzi ci capitera' spesso di utilizzare la indefinita divisibilita' come uno schema della realta' che noi rappresentiamo con i numeri, senza pretendere che questa realta' sia resa fino all'ultima cifra decimale dall'immagine che noi costruiamo. La quale immagine non e' cervellotica, non e' arbitraria, non e' contradditoria, e' semplicemente limitata, vale a dire da' certe informazioni e altre non le da'. Qui la storia della scienza ci insegna molte cose, perche' all'epoca di Newton, di Lagrange o di Eulero la materia era considerata come un continuo, come se avesse le stesse proprieta' degli enti della geometria, oggi questa immagine si e' capovolta e noi abbiamo accettato la frammentarieta' della materia e addirittura dell'energia.
L'immagine si e' capovolta perche' quando all'epoca di Newton si davano delle misure con un numero finito di cifre decimali si pensava che questo fosse dovuto all'incapacita' nostra di rappresentare tutta la realta', perche' la realta' si immaginava continua, oggi invece quando si immagina la realta' continua ci si rende conto che e' una nostra immagine, perche' la realta' non e' continua, e' discreta.
Quindi dall'epoca di Newton all'epoca di oggi e' avvenuto un capovolgimento di punto di vista che non deve farci pensare che la nostra scienza sia sbagliata, ma semplicemente che e' limitata: noi costruiamo delle immagini, dei modelli che ci danno delle informazioni, e quando quelle informazioni non quadrano piu' con tutti i dati, buttiamo via i modelli e ne costruiamo altri. E' chiaro che in teoria potrei andare a comprare una bottiglia d'acqua minerale dicendo al commesso di darmi tanti miliardi di miliardi di miliardi di molecole d'acqua; quello chiama subito l'ambulanza. Ovviamente basta chiedere un litro d'acqua. Nell'ordine di approssimazione che ci interessa per la pratica immaginiamo che la materia sia continua e indefinitamente divisibile, pero' per certe operazioni di meccanica fine la superficie non si presenta piu' liscia come uno specchio.
Il discorso dell'approssimazione dell'immagine dipende dagli scopi che vogliamo ottenere.
E' stato un lungo discorso che pero' dovevo fare per evitare che diamo troppo peso alle immagini che ci costruiamo; la prima che noi incontriamo e' quella delle grandezze indefinitamente divisibili, immagine che utilizziamo sempre per le grandezze della geometria, perche' sarebbe troppo scomodo fare una geometria finita, anche se non impossibile, non incoerente con i nostri scopi. Per ora la fisica atomica e anche la fisica nucleare utilizzano gli schemi della continuita' per esempio per le equazioni differenziali.

Io ho sempre domandato ai miei colleghi fisici perche' usino le equazioni differenziali che presuppongono la continuita' mentre la materia e' discreta, e perche' non usino le equazioni alle differenze finite ad esempio che sarebbero lo strumento principe. E' perche' la teoria delle equazioni alle differenze finite e' troppo complicata, non e' stata abbastanza sviluppata nel nostro secolo. Se usiamo le equazioni differenziali abbiamo uno strumento concettuale che sappiamo essere sbagliato ma e' molto comodo. Questo avviene per altri campi, ci accontentiamo dello schema geometrico com'e' e dello schema del continuo com'e'.
Quindi questo schema, questa immagine della divisibilita' noi l'accettiamo per le grandezze della geometria e anche per quelle della fisica, della chimica ecc. almeno a livello macroscopico. Il discorso comincia a diventare piu' incerto, pieno di pericoli per esempio per la statistica e l'economia perche' in matematica finanziaria e' chiaro che le grandezze non sono continue, perche' le cifre variano di una lira o mille lire alla volta, il tempo varia da un giorno all'altro, perche' le operazioni finanziarie sono date con una data, e quindi li' il discorso dell'impiego degli strumenti classici della matematica del continuo comincia a diventare un po' piu' problematico; ma per la fisica macroscopica e per la geometria in particolare accettiamo questo schema.

DISCUSSIONE SU COME SCEGLIERE UNO SCHEMA INTERPRETATIVO DELLA REALTA'

Ins. A.: Ho trovato molto interessante l'aspetto che la infinita divisibilita' in realta' non esiste, perche' in ogni superficie o volume sono piu' i buchi dei pieni. Ma allora la continuita' c'e' o non c'e'?

Ins. B.: Dipende dalla domanda che facciamo di volta in volta, in base alla quale decidiamo quale schema accettare. Il bambino deve avere la sensazione che ogni informazione puo' essere migliorata, questo puo' bastare nella scuola elementare.

Ins. C.: E' vero, se ad esempio devo misurare la traiettoria di una giostra, forse basta andare a spanne; se devo calcolare la traiettoria di un missile per farlo ritornare a terra, allora non va bene. Dipende ancora una volta dalla domanda.

Ins. A.: Pero' i bambini hanno bisogno di certezze, se faccio questi discorsi, capisco che genero grossi problemi.

Ins. D.: E' vero che i bambini hanno bisogno di certezze, ma non in questo ambito, in cui loro stessi spontaneamente utilizzano vari tipi di approssimazione a seconda delle situazioni.
Per esempio un pacchetto di zucchero da un chilo, anche se ha perso qualche granellino e' sempre un chilo, la mamma non mi sgrida quando arrivo a casa. Ma se faccio l'orologiaio e devo usare un bilanciere con un certo peso, 10 grammi sono molto importanti. Se al momento opportuno riusciamo a trovare gli esempi che fanno parte dell'esperienza comune del bambino, anziche' scardinargli la certezza riusciamo a mostrargli che la sua esperienza puo' essere organizzata meglio.
Nel primo caso pochi grammi non contano e i due pesi vengono

considerati equivalenti, a differenza del secondo caso. Perche'? Tutto sta nella domanda di partenza.

Ins. E.: Se do' da misurare una superficie e due bambini ottengono due misure differenti, non ci fanno caso. Ma se devono costruire una scatola, si accorgono che e' indispensabile che i pezzi siano sovrapponibili in maniera precisa, diversamente la scatola non sta insieme. Il Prof. Manara ci guida ad una riflessione sui nostri comportamenti.

4.2 La continuita'

LA PROPRIETA' DELLA CONTINUITA' (ASSIOMA VII) COSTITUISCE UNA RICHIESTA IN PIU' RISPETTO ALLA DIVISIBILITA' INDEFINITA.

In una classe di grandezze omogenee, le parti di una data grandezza sono solo potenzialmente presenti, non in atto. Questa e' una prima difficolta' psicologica per il bambino.
La continuita' e' un discorso che non si esaurisce con la divisibilita', va un po' piu' avanti, pero' per trattarlo in modo un po' rigoroso occorrono operazioni di carattere logico di cui si parla in questo paragrafo.
Che senso ha dire che se io parto dal lato del quadrato di area 1 e arrivo al quadrato di area 4 devo necessariamente passare attraverso tutti i valori del lato? Questo e' il sunto della problematica della continuita'.
Se prendo tutti i punti del segmento tra zero e due che hanno per coordinata un numero razionale, cioe' una frazione, io trovo che quei punti sono infiniti, ovunque densi (cioe' in ogni pezzettino ce ne sono infiniti), ma non esauriscono i punti della retta. Anzi, in particolare, quel punto li' che mi da' il lato del quadrato di area due non c'e'.

LA LOGICA, CIOE' LA NOSTRA CAPACITA' DI DEDURRE, SUPERA QUALUNQUE ESPERIMENTO.
(Vedi ad esempio la dimostrazione della incommensurabilita' tra lato e diagonale di un quadrato).

Attenzione: e' matematico il linguaggio con cui cerchiamo di riprodurre la realta', ma non e' matematica la realta'.

LETTURA

Il discorso della divisibilita' delle grandezze ci servira' per impostare un altro discorso, che e' pure molto importante, cioe' che per le grandezze cosi' come vogliamo dominarle noi dobbiamo introdurre un'altra proprieta' che e' la continuita' (v.Parte I/II,6), che e' una richiesta in piu' rispetto alla divisibilita' indefinita. Andiamo ora in un ambito molto delicato, come aveva intuito gia' Euclide, perche' arriviamo alle soglie della ripetizione indefinita di certe operazioni mentali. La nostra immagine del continuo geometrico ci dice che non arriviamo mai all'elemento costitutivo (abbiamo detto che i punti non sono come le perle di una collana) e quindi siamo di fronte a problemi di carattere teorico ma anche pratico abbastanza complicati, che si ricollegano a quelli citati a proposito dell'uso dell'espressione "praticamente" (ad esempio "praticamente π=3,14" ...).
Il discorso che si puo' fare qui mi sembra questo, ed e' quello che noi dobbiamo capire per rispondere in qualche modo ai ragazzini . Vorrei distinguere tra quello che si legge molto spesso: in un segmento ci sono infiniti punti, oppure una grandezza puo' essere divisa in infinite parti, e il discorso che ho fatto: si puo' ripetere indefinitamente l'operazione di

identificare un punto all'interno di un segmento. Io preferirei non fare il discorso dell'infinito, per la semplice ragione che poi la fantasia galoppa, trae conclusioni un po' affrettate. I discorsi sull'infinito sono pericolosi, quindi io parlo di indefinita ripetizione di atti di pensiero, nel senso che i nostri atti di pensiero sono sempre in numero finito, ma non esiste nessuna barriera che ci fermi; ecco che cosa vuol dire ripetibilita' indefinita dell'operazione di divisione di una grandezza, o come vedremo, in maniera strettamente collegata, il miglioramento dell'informazione.

Domanda: Non capisco bene che cosa si intenda per grandezze omogenee e continuita'.

-Prof.Manara: Devo precisare che la trattazione fatta finora presuppone una scelta (v. Parte I/II,1). Il termine di grandezza e' preso dal linguaggio comune (sul Palazzi si trovano 19 sinonimi), per precisare il termine e il concetto abbiamo scelto una strada, in cui proponiamo di chiamare classe di grandezze omogenee un insieme di grandezze per cui valgono le operazioni che abbiamo detto: si puo' fare la somma, si possono ordinare in un certo modo, si possono moltiplicare per un numero, si possono dividere, ecc. Non ha senso dire ad esempio che una lunghezza e' piu' grande di un peso: lavoro sulla classe delle lunghezze, oppure su quella delle aree, o su quella dei volumi; tutto l'insieme di grandezze per ognuna delle quali valgono queste operazioni di somma, queste operazioni logiche di confronto, questa operazione di moltiplicazione per un numero intero, e poi di divisione in parti uguali ecc. ecc. le chiamiamo classe di grandezze omogenee. L'omogeneita' e' nell'interno di ciascuna classe: le aree formano una classe di grandezze omogenee, i pesi pure, le lunghezze, i volumi, le differenze di potenziale, le velocita', le durate e cosi' via; facciamo l'operazione logica di mettere in una stessa classe di grandezze tra loro omogenee tutti gli enti sui quali noi accettiamo di lavorare con queste operazioni e di fare questi confronti logici, ognuno basato su certe operazioni concretamente eseguibili, che si fanno cioe' toccando le cose, manipolandole, dividendole col coltello, piuttosto che pesandole sulla bilancia.
Come vedremo quando parleremo di proporzionalita', noi daremo senso alle operazioni di calcolare i rapporti solo tra grandezze omogenee, ad esempio due lunghezze, o due pesi, infatti stabiliremo una corrispondenza, che chiameremo appunto proporzionalita', tra grandezze che appartengono a classi di grandezze omogenee, non necessariamente diverse tra di loro. Ad esempio con le leggi della fisica posso stabilire una proporzionalita' tra la differenza di potenziale e la corrente che percorre un filo, oppure dico che la spesa e' proporzionale alla lunghezza della stoffa; ho due classi di grandezze omogenee, le somme di denaro e le lunghezze dei pezzi di stoffa, ed ho una proporzionalita'.
Vedremo quali sono le cose veramente importanti di questa corrispondenza che noi utilizziamo tutti i giorni, perche' e' il primo modo di codificare la realta'. Data da una ventina di secoli, e ci ha condotto a molti equivoci nell'utilizzare la matematica, purtroppo, perche' la prima cosa che si fa e' pensare ad una legge di proporzionalita'. Di fatto molto spesso invece la

realta' concreta e' discontinua, cioe' presenta delle soglie, delle quantita' critiche che poi fanno esplodere dei fenomeni,ma ormai l'abitudine di secoli ci conduce a scrivere come prima regola la proporzionalita' tra causa ed effetto. Gli ingegneri e i fisici si sono trovati in grossi guai, perche' si prende una legge che vale in un certo tratto, la si prolunga, e prima o poi le cose saltano.

Quanto alla <u>divisibilita' e alla continuita'</u>: prendiamo una classe di grandezze omogenee, ad esempio le lunghezze, o le aree; non siamo piu' di fronte agli insiemi finiti in cui le parti sono ben distinte e separabili, devo immaginare la divisione in parti, devo immaginare ad esempio l'operazione concreta che facciamo fare ai ragazzini quando consideriamo la meta' della lunghezza di uno spago; non e' effettivamente diviso, lo dividiamo poi quando prendiamo le forbici, non solo ma come lo divido in due lo posso dividere anche in tre parti uguali, cioe' non e' stabilito nella natura delle cose il numero delle parti.
La filosofia classica diceva: le parti sono potenzialmente presenti, non in atto. Sono operazioni che facciamo, anzi che crediamo di fare, perche' abbiamo l'esperienza di dividere a meta' uno spago, una torta, il vino che sta in una bottiglia, un'area; dividere a meta' una temperatura e' un discorso che non ha molto senso, pero' c'e' tutta una serie di esperienze che eseguiamo su questi oggetti concreti, e che schematizziamo con dei concetti che non si riferiscono agli oggetti concreti ma ad una elaborazione degli stessi: se voglio divedere a meta' un litro d'acqua, non e' detto che io possa farlo, perche' il numero delle molecole puo' essere dispari; pero' macroscopicamente la capacita' ci si presenta come una grandezza indefinitamente divisibile. Cio' che noi diciamo si riferisce ad un'immagine che ci costruiamo in base alle esperienze concrete, ma non possiamo pretendere che ci dia la realta' assoluta definitiva di tutto cio' che stiamo manipolando.
Questa e' una lezione che abbiamo imparato da secoli, da Galileo in poi, ma si ripresenta perche' la gente prende troppo sul serio le leggi della matematica e della fisica; dicono: e' matematica; si', e' matematico il linguaggio con cui cerchiamo di riprodurre la realta', ma non e' matematica la realta'. E' come scambiare la pelle con il vestito; il vestito da' informazioni sulla taglia della persona, ma non dice tutto.
La divisibilita' e' una proprieta' che ci serve per schematizzare molte operazioni sulle grandezze che noi manipoliamo, che non ne rende mai tutta la realta' fisica concreta, ma e' adeguata per gli usi non solo della pratica, ma anche della tecnica (salvo la tecnica molto fine, in cui talvolta la discontinuita' della materia si impone in un modo pesante).
La continuita' e' un discorso che non si esaurisce con la divisibilita', va un po' piu' avanti, pero' per trattarlo in modo un po' rigoroso occorrono operazioni di carattere logico che per il momento vorrei rimandare. Vorrei avvertire del significato e della necessita' dell'operazione di carattere logico.
Una volta in una scuola elementare una maestra mi ha presentato una difficolta' in cui inciampava: dato un quadrato, come si fa a trovare il lato di un quadrato di area doppia? Il ragionamento che si trova fatto anche nel Rinascimento, anche dal De Morgan nel secolo scorso, e' questo: vai avanti, se arrivi al lato 2 l'area e' 4 volte; qui era 1, quindi gira e gira l'area passa per tutti i

valori; ci sara' un punto in cui incontri il numero 2. Qual e'? E' il discorso di Socrate nel famoso dialogo di Platone, il Menone.
Se vogliamo prendiamo il compasso, lo puntiamo nel primo estremo del lato, con apertura pari alla diagonale, e troviamo quel punto che costituisce il secondo estremo del lato del quadrato di area 2. E' chiaro pero' che se non mi metto nel piano non ci riesco.
Rimane il problema: che senso ha il dire che se io parto dal lato del quadrato di area 1 e arrivo al lato del quadrato di area 4 devo necessariamente passare attraverso tutti i valori del lato? Questo e' il sugo della problematica della continuita', perche' ancora due secoli fa presso i grandi matematici come Gauss ed altri si chiamava funzione continua quella che prende tutti i valori compresi tra due valori dati.
Li passa tutti i punti? La nostra immaginazione, l'immagine che ci formiamo, suggerisce che si', che passa per tutti i punti. Ma il problema e' un altro, non e' di immaginazione, e' di codificazione logica, cioe' con strumenti concettuali e di calcolo concreto per manovrare quella lunghezza. Qual e' il senso che dobbiamo dare alla lunghezza di quel segmento che e' la diagonale? Io faccio la figura, immagino che abbia senso trasportare con il compasso, allora quel punto esiste, perche' lo costruisco. Questo e' un discorso che soddisfaceva i Greci, si trova in Euclide, soddisfaceva anche i matematici di due secoli fa. Se immagino di poter fare queste operazioni, che esse abbiano un senso, lo posso fare anch'io. Solo una critica successiva ci ha portati a porre la domanda: <u>ma come lo rappresento</u>? Questa immagine della operazione concreta del trasporto rigido che risultati mi da' poi sulla rappresentazione con strumenti concettuali e con parole, con simboli, con concetti rappresentati linguisticamente?
Ecco che allora sono stati fatti gli esempi: se prendo tutti i punti del segmento tra zero e due che hanno per coordinata un numero razionale, cioe' una frazione, io trovo che quei punti sono infiniti, sono ovunque densi, cioe' in ogni pezzettino ce ne sono infiniti, ma non esauricono i punti della retta, anzi in particolare se prendo i punti a coordinata razionale quel punto li' che mi da' il lato del quadrato di area due non c'e'. Ma lo vedo! Che cosa vuol dire vedere? Vuol dire che ti fai un'immagine dell'operazione, la elabori fantasticamente, e dai consistenza al risultato di questa operazione. Ma se invece di fare il discorso col compasso ci mettessimo a contare le molecole, il punto che mi da' l'area 2 non c'e', perche' non e' un punto a coordinate razionali. Questo e' un discorso che gia' conosceva Pitagora, cioe' a dire: il lato e la diagonale non sono commensurabili tra di loro, non posso dividere il lato in parti uguali comunque piccole e poi ricostruire la diagonale; non hanno un sottomultiplo comune. Si tratta di una proprieta' non della materia, che e' formata da un numero finito di atomi, ma di quell'ente che noi ci costruiamo con la fantasia e chiamiamo spazio geometrico e che si presenta non solo come infinitamente divisibile ma anche come possedente la proprieta' di non avere un elemento costitutivo. Lo spazio geometrico cosi' come lo immaginiamo noi non ha un atomo, lo si puo' dividere in pezzi comunque piccoli ma neanche quelli esauriscono lo spazio. Questo discorso ha fatto sudare Newton, Leibnitz, Boscovich ecc, niente di strano che anche a noi appaia difficile, discende ripeto dall'epoca di Pitagora: che il lato e la diagonale non siano divisibili in parti tali che comunque piccole esse siano io possa ricostruire il lato coi pezzi della

diagonale; e' una dimostrazione classica che ci porta alla continuita' dello spazio geometrico.
Ho fatto questi discorsi non perche' vadano fatti ai ragazzini, ma perche' a volte sotto le cose che ci pare di vedere ci sono difficolta' logiche che noi non avvertiamo subito, e che invece sono state avvertite da persone che si sono messe a meditare su queste cose. Se ci capitasse di trovare questi discorsi nell'insegnamento possiamo dire: facciamo questa operazione e troviamo questo punto; l'ha fatto Euclide e possiamo farlo anche noi; ma dobbiamo sapere che questi discorsi non sono la dimostrazione logica: sono discorsi che si riferiscono a quell'immagine "grossolana" di cui ci serviamo per rappresentare quella realta' materiale che cerchiamo di conoscere.
Non e' un'immagine cervellotica o arbitraria, non e' una favola: e' suggerita dalle nostre esperienze e infatti in qualche modo rappresenta non tutta la realta', ma una buona parte di essa tanto che ci serve per fare dei calcoli approssimati quanto ci basta. Come l'immagine della circonferenza: e' chiaro che tra tutte le ruote che girano in questo mondo nessuna e' una circonferenza perfetta, pero' questo ci serve come schema per fare una quantita' di operazioni di carattere tecnico o se vogliamo anche teorico ; e cosi' per tutte le figure geometriche, lo diceva gia' Platone, non contano le figure che disegnamo, ma i concetti che costruiamo sulle immagini.
Immagine non cervellotica non contradditoria non arbitraria: a questi tre aggettivi tengo particolarmente perche' ci danno il significato della conoscenza matematica della realta'; uno potrebbe dire: allora se la matematica e' tutta sbagliata non credo piu' a niente. No, non bisogna ne' dare una fiducia eccessiva ne' buttarsi nello scetticismo definitivo. E' vero che l'applicazione nei casi concreti ammette dei limiti; l'immagine non da' tutta la realta'. Quando arrivo agli atomi ai quark ecc. quest'immagine cade. Non devo farne una tragedia: e' stata in piedi tanto tempo, pazienza se ora cade.
Il discorso del continuo geometrico si riattacca in modo necessario durante tutta la storia della matematica col significato delle procedure infinite, cioe' col significato della ripetizione indefinita di procedure sempre uguali ma che non arrivano mai alla situazione definitiva. E' il discorso classico della filosofia eleatica di Achille e della tartaruga e del moto: il pieveloce Achille non riesce mai a raggiungere la tartaruga perche' mentre lui si muove in tempo finito la tartaruga si e' spostata, quindi quando lui e' arrivato al punto in cui la tartaruga era quando e' partito, la tartaruga non c'e' gia' piu'; dopo il primo passo si ripropone la situazione di prima, e non ci arriva mai. E' chiaro che se la tartaruga si portasse per conto suo a spasso un atomo di spazio, una isoletta, a un certo punto Achille riuscirebbe a mettere i piedi su quella isoletta; ma se invece la tartaruga e' un punto, con la ripetizione di un numero qualunque di quelle operazioni non ci arriva mai, cioe' non esiste una ripetizione di un numero finito di operazioni di quel tipo che ci conduca a far coincidere i due punti. I due punti Achille e tartaruga sono sempre distinti tra di loro.
Il discorso e' che siamo di fronte ad una questione che ci porta ad indagare nell'infinito, cioe' al significato della continua ripetizione di certe operazioni delle quali non si puo' mai dire: questa e' l'ultima. Non si puo' mai dire che Achille prende la

tartaruga, perche' di poco ma sono sempre distaccati tra di loro. Cosi' per la diagonale e il lato del quadrato: comunque tu divida uno in pezzi uguali tra di loro, piccoli quanto vuoi, non riesci mai a ricostruire l'altro. La logica, cioe' la nostra capacita' di dedurre, supera qualunque esperimento, qualunque conferma sperimentale in pro o in contro; questi sono i momenti in cui si vede che il ragionare e' qualcosa di non completamente materiale. Noi dobbiamo condurre pian pianino i clienti a ragionare, cioe' a dire: deve essere cosi', la conclusione nasce necessariamente dalle premesse.

DISCUSSIONE SUL PERICOLO DI CERTE PROPOSTE DIDATTICHE

Ins. A.: Io ho trovato delle schede didattiche che vi riassumo.
Il personaggio Zero dice allo scolaro di guardare il disegno di una retta con una lente di ingrandimento e cosi' lo scolaro vede la retta "composta da una serie di piccoli punti allineati uno accanto all'altro e tutti uguali fra loro, proprio come le stellette di un fiocco di neve".
Nel disegno i punti sono rappresentati da cerchietti neri accostati.
Poi lo Zero continua: "Guarda, fra me e Uno si possono vedere con la mia lente 10 piccoli punti... quello piu' vicino a me si chiama 0,1 e quello che lo segue si chiama 0,2; il terzo sulla strada tra me e Uno si chiama 0,3".
Questo suggerimento mi sembra in una direzione diversa rispetto a quella che ci viene indicata dal Prof. Manara.
Per esempio trattare i punti come se fossero le perle di una collana...

Ins. B.: A dire il vero l'idea di fare un ingrandimento potrebbe essere utile, ma temo che l'immagine fantastica possa bloccare il concetto: perche' se un punto individua una posizione e' fuorviante pensarlo come un pallino.

Ins. C.: Anche dire che i punti hanno un nome mi sembra sbagliato, perche' quel nome dipende dall'unita' di misura scelta. E occupare l'immaginazione dei bambini con un solo modello di tipo fisico, nel quale tra tra zero e uno ci siano 10 punti fissi, aventi la forma di un cerchietto, puo' limitare la loro capacita' di fare passi ulteriori.

Ins. A.: Il modello che secondo me evita queste difficolta' e' ancora quello del segmento diviso in un numero fissato di segmentini, ciascuno dei quali puo' essere ancora suddiviso e cosi' via.

5. I NUMERI RAZIONALI

5.1 Terzo passo.
Multipli e sottomultipli di una grandezza. Le frazioni.

PER COSTRUIRE QUEGLI STRUMENTI LINGUISTICI, CONCETTUALI E SIMBOLICI CHE SONO LE FRAZIONI, E' ESSENZIALE PENSARE DI POTER DIVIDERE UNA GRANDEZZA IN PARTI UGUALI.

Come posso dividere una grandezza in n parti uguali? Mi pongo il problema non tanto da un punto di vista concreto per dividere un oggetto concreto (nella manipolazione reale ci si aggiusta sempre), ma da un punto di vista concettuale.

L'operazione di dividere una grandezza in n parti uguali e' un'operazione di cui non si possono dare regole generali.
(Ad esempio usando in modo classico riga e compasso, non si puo' dividere in tre parti uguali un angolo).
A differenza dei Greci, noi possiamo parlare di frazioni, perche' diamo senso alla divisione in parti uguali delle grandezze. Ma per dimostrare l'esistenza della n-esima parte di una grandezza qualunque, occorre far ricorso all'ipotesi di continuita', non solo di divisibilita'.

Nota Bene. Concentrare tutta l'attenzione sulla frazione e' fuorviante, dobbiamo considerare invece LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI FRAZIONI, CHE CORRISPONDONO AI NUMERI RAZIONALI.

Dobbiamo imparare a vedere che cosa vuol dire rappresentare le grandezze con le frazioni, che cosa vuol dire misurare, cioe' rappresentare le grandezze con questi strumenti che sono nuovi rispetto agli interi; in particolare dobbiamo imparare a decodificare le informazioni che ci vengono dall'abitudine dell'uso delle frazioni decimali.

LETTURA

Torniamo al discorso della divisibilita' (v. Parte I/III,1) che a mio parere e' piu' immaginabile e costituisce una rampa di scale per andare da un pianerottolo al successivo, cioe' per la costruzione delle frazioni, che sono gli strumenti linguistici, concettuali e simbolici per dominare la nuova realta'.
Nella lingua si trovano espressioni come la terza parte, o la quarta parte. Che cosa significa "quarta" parte? Significa che io ho diviso in parti uguali, e quando ho contato la prima, la seconda, la terza e la quarta ho esaurito la grandezza. Come quando si pagava la decima: si facevano 10 parti uguali, e quando arrivava il padrone contava: uno due tre ...., la decima la porto via io. Questo e' il discorso che ci e' insegnato dalla lingua. Esso implica che ci sia la possibilita' di dividere in parti uguali, quindi l'operazione fondamentale che distingue nettamente l'aritmetica da quello che stiamo facendo e' che stiamo lavorando con degli enti che sono le grandezze che hanno delle parti

potenziali: io potrei dividere in tre parti uguali invece che in 10. Ecco il momento in cui la divisibilita' si presenta come un carattere distintivo delle difficolta' logiche e concettuali che distinguono il nuovo pianerottolo dal precedente.
Adesso c'e' il discorso che si rifa' alla matematica greca: come costruisco questa decima parte? Come divido una grandezza in n parti uguali? Questo discorso critico lo facciamo tra noi, perche' ai ragazzini diamo esempi in cui questa divisione e' immediata: il filo lo piego, o prendo il metro. Ma concettualmente come faccio?
E' il discorso che ha fatto inciampare i Greci, ed anche molti matematici dal Rinascimento in poi. In Euclide la teoria delle proporzioni e' fatta senza mai parlare di sottomultipli, cioe' senza mai dividere le grandezze in parti uguali, parlando invece di multipli, cioe' sommando le grandezze. Perche'? Non siamo nella testa di Euclide, ma l'operazione di sommare e' messa addirittura alla base del concetto di grandezza, mentre l'operazione di dividere una grandezza in n parti uguali e' un'operazione di cui non si possono dare regole generali. Il segmento si puo' dividere in n parti uguali con operazioni elementari, ma per le aree e i volumi come faccio (dico in teoria, in pratica poi ci si arrangia sempre)? I Greci avevano provato a dividere l'angolo, ma con costruzioni geometriche non ci si riesce. Il problema e' stato capito a fondo solo 20 secoli dopo, ma ecco che allora Euclide (o Eudosso) fa la teoria delle proporzioni solo sommando, mai dividendo in parti uguali. Dividere una grandezza in parti si', ma in parti uguali e' un altro discorso. Le grandezze sono quindi divisibili, ma l'operazione di dividerle in parti tutte uguali tra di loro da' un'ulteriore difficolta' logica e teorica, che i Greci hanno evitato abilissimamente parlando sempre di multipli. Noi invece parliamo di frazioni perche' diamo senso alla divisione in parti uguali delle grandezze, ma per dimostrare l'esistenza della n-esima parte di una grandezza qualunque occorre far ricorso all'ipotesi di continuita', non solo di divisibilita'.
E' una dimostrazione un po' sottile, che e' stata fatta in modo soddisfacente solo nella seconda meta' del secolo scorso, niente di male quindi se noi non la facciamo qui, sarebbe immorale presentare ai ragazzini queste cose troppo complicate: perderebbero la fiducia nell'operazione logica, perche' le dimostrazioni troppo complicate non le seguono, i concetti troppo astratti non li vedono lavorare e se li dimenticano, non fanno presa sulla realta'. Noi dovremmo far nascere la razionalita' dalla realta' concreta in cui ci muoviamo, via via generalizzando. Riusciamo quindi a costruirci la teoria delle frazioni parlando di sottomultipli, ma per costruirla con rigore occorre enunciare, stabilire questa ulteriore proprieta' che non e' la divisibilita' pura, che e' la continuita' delle grandezze.
Cosi' facendo abbiamo camminato sulla rampa di scale che ci porta dalla teoria degli insiemi finiti, in cui le parti sono distinte di fatto, alla teoria delle grandezze, in cui le parti sono distinte solo in potenza. Sappiamo che esistono difficolta' logiche teoriche, che tuttavia non sono solo teoriche: esistono perche' ci si e' scontrati con problemi tecnici e scientifici che hanno richiesto certe precisazioni, la pratica della scienza ha richiesto certi passi. Quasi ogni capitolo della matematica ha le sue origini in necessita' teoriche e pratiche, nella ricerca del dominio rigoroso di una realta' che si vuole conoscere dal di dentro. Per questi scopi dobbiamo costruirci nuovi strumenti

matematici, che sono i numeri razionali.
Abbiamo gia' detto, concentrare l'attenzione sulla frazione e' un chiudersi sulla realta' delle cose; dobbiamo considerare le classi di equivalenza di frazioni, cioe' dobbiamo muoverci con tutta liberta' attraverso la classe delle frazioni equivalenti in modo da scegliere quella che ci va bene. La situazione e' ulteriormante complicata (e qui il discorso si fa interessante anche nella pratica) dalle necessita' di rappresentazione e di comunicazione. Se andiamo a leggere i libri classici, come quello di Leonardo Pisano detto il Fibonacci, o quello di Fra Luca Pacioli, quando erano entusiasti della scoperta delle possibilita' enormi dovute alla rappresentazione con le cifre arabe (perche' prima i conti si facevano con i numeri romani), si vede che facevano dei calcoli spaventosi, e non avevano nessuna preclusione nell'uso delle frazioni. Veramente non parlavano di frazioni, ma dicevano che 3 di questo mi da' 4 di quest'altro, 17 di questo qui da' 32 di quell'altro, ma sostanzialmente usavano le frazioni. Noi invece oggi con gli usi invalsi con le tabelle, con le calcolatrici ecc. scegliamo una rappresentazione particolare, che e' quella con le frazioni decimali: quelli che nei programmi vengono chiamati numeri decimali, ed io preferirei chiamare frazioni decimali, o addirittura rappresentazioni decimali dei numeri razionali (v. Parte I/II,4).
Ormai infatti nei discorsi di Borsa, nelle misure della fisica ecc. non si usano piu' le frazioni. Se dessi ai chimici la legge del Flos di Leonardo Pisano avrebbero difficolta' a fare i conti in questo modo: noi usiamo dunque le frazioni decimali, che ci pongono pero' ulteriori difficolta'. Allora dobbiamo imparare a vedere che cosa vuol dire rappresentare le grandezze con le frazioni, che cosa vuol dire misurare, cioe' rappresentare con questi nuovi strumenti che sono qualcosa di piu' degli interi, e poi imparare a decodificare le informazioni che ci sono date con questa particolare abitudine, che e' diventata comune, dell'uso delle frazioni decimali. Tutte queste cose sono molto importanti perche' da una parte bisogna smitizzare certe operazioni, cioe' non farne una regola complicatissima, ma dall'altra bisogna imparare a leggere le informazioni che ci vengono date da questi strumenti di comunicazione.
Alfabetizzare vuol dire dare il senso della presa concreta che gli strumenti linguistici hanno sulla realta' che si manovra. Il momento veramente efficace della scuola e' nel mettere ordine in una razionalita' che gia' esiste, cioe' nel rendere metodico quello che e' intuitivo, cosciente quello che e' un risultato inconsapevole, coerente un'operazione che porta giustamente a raggiungere un fine, ma non in forma riflessa. Non e' insegnare tante cose nuove il compito della scuola, pur essendoci anche questo, ma permettere di appropriarsi delle strutture logiche e linguistiche. La capacita' di intuire il comportamento materiale delle cose e' pure estremamente importante: i Romani, Brunelleschi, costruivano senza conoscere la scienza delle costruzioni, perche' vedevano come il materiale lavorava, e come andava messo perche' lavorasse in un certo modo, avevano questa intuizione pratica. Unum facere et alterum non omittere: cercare di utilizzare questa capacita' di intuizione che spesso hanno i ragazzini per renderla esplicita, metodica, cosciente; se uno arriva da se' al risultato, il compito della scuola e' spiegargli il perche', in modo che sappia per conto proprio

muoversi e utilizzare gli strumenti concettuali, altrimenti la riuscita e' episodica e casuale.

DISCUSSIONE E CONTRIBUTI

Ins. A.: Avevo parlato delle frazioni equivalenti, senza dire come si possono trovare, ma i bambini ci sono arrivati da soli: moltiplico o divido e va sempre bene! (Si erano resi conto dell'equivalenza). Allora io ho chiesto: andando avanti, quale scegliamo come rappresentante della classe di equivalenza? Io non ho dato la definizione di frazione ridotta ai minimi termini, pero' c'e' stato qualcuno che e' arrivato a dirmi: ad un certo punto non puoi piu' dividere, 2/3 e' il capo famiglia. Si sono organizzati in gruppi, ciascun gruppo si e' costruito tante frazioni equivalenti, poi doveva scegliere il capo famiglia: mi hanno portato esattamente la frazione ridotta ai minimi termini.

Ins. B.: Anche gli esempi di scienze, storia ecc. portano una quantita' di spunti. Guardavamo uno spaccato della sfera terrestre in cui mancava un pezzetto. -Maestra quanto ci manca? -Dimmi tu. -Manca un ottavo. -Come fai a saperlo? -Immagina una mela: se la dividi in 4 parti, sono quarti; questa e' la meta' di un quarto, quindi e' un ottavo.
A questo punto, una bambina che studia pianoforte: -Ma allora e' come le mie note musicali, posso suonare un suono solo che e' un quarto, o posso suonarne due che sono un ottavo ciascuno.
Cosi' si e' lanciato il discorso sulle frazioni equivalenti. Sono arrivati loro prima che io lo progettassi.

Ins. A.: In III elementare ho portato una fettuccia bianca (lunga un metro, ma i bambini non lo sapevano) che era il nostro campione, lo chiamavamo f.b., con cui abbiamo fatto molte esperienze. E' uscito poi verso carnevale un discorso molto simpatico, perche' io ho proposto loro di misurare le nostre altezze, e abbiamo visto che tutte le loro altezze stavano tra 1 e 2 f.b. Quando hanno pensato di misurare anche la mia altezza e hanno visto che anche la mia stava tra 1 e 2, come le loro, hanno capito che il campione era inadeguato, perche' io sono molto piu' alta di loro; hanno capito cioe' che occorreva un campione piu' piccolo, in modo che la misura fosse meno approssimata; sono venuti fuori anche molti discorsi interessanti sulle approssimazioni. Allora ho dato loro un altro campioncino, che era un decimetro, e abbiamo visto come si potesse misurare descrivendo meglio la realta'. Poi un bambino ha proposto di misurare il primo campione con il secondo, e da li' e' venuto fuori che si potevano contare 10 corti in quello lungo.
Io percio' ho introdotto, prima dei multipli, i sottomultipli del metro. D'altra parte mi pare di aver capito che le difficolta' relative ai sottomultipli siano superate e che noi oggi possiamo parlare sia di multipli che di sottomultipli indifferentemente.

Ins. B.: Nella didattica, partire dai multipli o dai sottomultipli dipende esclusivamente dal tipo di esperienze che proponiamo. Ad esempio se usiamo il decimetro per misurare un corridoio, ci accorgiamo che sarebbe piu' comodo un suo multiplo.

Ins. C.: Bisognerebbe provare a dividere il campione a meta' o in tre parti, oltre che in dieci, per contrastare l'idea che la scelta piu' naturale sia lavorare in base 10. Spesso noi insegnanti utilizziamo piu' volentieri i sottomultipli di ordine 10, perche' vogliamo rapidamente arrivare a scrivere i numeri con virgola in base dieci e per introdurre le quattro operazioni tra decimali.

5.2 Alcune questioni didattiche relative ai numeri razionali e alla loro rappresentazione (scrittura decimale).

LA DIVISIBILITA' E' UNA PROPRIETA' DELLA GRANDEZZA PERCEPITA COME CONTINUA: ESSA COSTITUISCE LA DISTINZIONE FONDAMENTALE TRA LA TEORIA DEI RAZIONALI CHE STIAMO COSTRUENDO E L'ARITMETICA DEGLI INTERI.

Attenzione, si tratta di schemi teorici che hanno un proprio ordine di approssimazione rispetto alla realta'; non solo, in teoria la divisione e' eseguibile all'infinito (e dunque l'informazione e' sempre migliorabile); nella pratica invece cio' non e' possibile. Infatti esistono limiti al di la' dei quali un certo schema non e' piu' applicabile, in quanto le previsioni che fornisce non sono piu' aderenti alla verifica della realta' come via via ci si presenta. Pertanto e' importante non dare un significato assoluto ad un determinato schema teorico.

In risposta ad una domanda si precisa il fatto che il numero decimale, o meglio la RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEL NUMERO RAZIONALE, corrisponde alla convenzione di rappresentare il numero razionale scegliendo delle frazioni con un denominatore fisso come il 10 e le sue potenze.
Questa scelta della base fissa porta necessariamente a rappresentare certi numeri razionali in modo approssimato, perdendo quella precisione che si aveva con frazioni aventi una base che dava origine ad una rappresentazione in forma finita.
Si tratta di una scelta convenzionale per rappresentare sempre le stesse cose.

LETTURA

RICAPITOLANDO, abbiamo presentato un certo insieme di assiomi che identificano dal punto di vista didattico certe osservazioni elementari da cui storicamente si e' sempre partiti per fare una teoria delle grandezze, osservazioni elementari che sono alla base della teoria delle grandezze gia' sviluppata dai Greci, da Archimede, ecc. e che la critica di secoli ha identificato ed enunciato con precisione.
Non si tratta di presentare queste cose ai ragazzini, ma fanno parte dell'esperienza quotidiana, che la critica matematica ha sistemato con precisione e chiarezza. L'interesse che hanno per noi queste cose, la conoscenza di questo scheletro, e' paragonabile alla differenza tra guardare una persona che cammina, e sapere come sono distribuiti gli sforzi muscolari ecc. : ne puo' risultare un diverso modo di presentare il concetto, e soprattutto una diversa valutazione della gravita' eventuale degli errori, valutazione che dipende dalla nostra conoscenza della struttura logica della teoria. Anche in matematica come in italiano si possono avere errori di ortografia e di sintassi, oppure errori di logica. "Non capisce": ma non capisce perche' non utilizza l'ortografia, o non utilizza la sintassi, o e' allergico al

simbolismo, o addirittura al ragionamento coerente? E come si puo' rimediare?
Eravamo arrivati alla divisibilita' e alla continuita': la prima e' una proprieta' della grandezza percepita come continua, costituisce la distinzione fondamentale tra la teoria dei razionali che stiamo costruendo e l'aritmetica degli interi; questa qualita' di divisibilita' la accettiamo come percepita anche se nella realta' non puo' essere spinta all'infinito. L'aritmetica si presenta come la teoria degli insiemi finiti i cui elementi sono determinati e indivisibili. Io posso contare i ragazzini, ma non posso dividerli a meta', ecc.
Quello che stiamo costruendo -aritmetica, teoria dei numeri razionali ecc.- e' uno schema astratto. In teoria con queste grandezze astratte io posso continuare ad eseguire la divisione. Pero' questi schemi li applichiamo ad una realta' concreta reale che ha i suoi limiti di conoscibilita' al loro interno. Come se io pretendessi in campagna di dire quando finisce il prato e comincia il bosco: sono schemi teorici, ognuno dei quali nasce con il proprio ordine di approssimazione. Rispetto ad una certa realta' questo schema teorico che noi usiamo non puo' essere utilizzato in tutta la sua potenzialita'. O come chi dichiara di non poter individuare la differenza tra la morte e la vita perche' non si puo' determinare l'istante esatto in cui l'organismo muore: un conto e' la differenza tra la morte e la vita, che mi pare abbastanza chiara, un altro e' possedere una tecnica precisa per rilevare l'istante in cui ha senso una certa affermazione: sono cose del tutto diverse.
Esistono limiti al di la' dei quali un certo schema non e' piu' applicabile, perche' la realta' segue certe altre sue leggi. La cosa importante e' non dare significato assoluto ad un determinato schema teorico che ce l'ha in teoria ma non come presa sulla realta'.

Tornando alla continuita', la si traduce di fatto nel dar senso a procedure infinite di approssimazione: nei libri si trovano vari enunciati del postulato di continuita', c'e' quello di Cantor, c'e' quello di Dedekind, c'e' quello di Hilbert, formulazione che io ho adottato nell'assiomatica della retta; noi non ne abbiamo bisogno perche' ci basta la matematizzazione della realta' che ci e' fornita dalla divisibilita', la quale e' una proprieta' percepita ed elaborata dalla nostra fantasia, e che non richiede molte acrobazie di carattere logico ne' algoritmico. Ripeto ancora, questi discorsi sono fatti per noi, sono il risultato di una critica logica che e' partita dai Greci ed e' arrivata a maturazione alla fine del secolo scorso, non sono cose molto facili; le immagini pero' sono molto semplici e a voi bastano queste per poter insegnare cose ragionevoli.
Se noi vogliamo costruire la teoria dei numeri razionali (non delle frazioni! le frazioni stanno ai numeri razionali come le lettere dell'alfabeto stanno alle parole) la possibilita' importante del calcolo con i numeri razionali e' la possibilita' di cambiare rappresentazione.

-Domanda: Noi vogliamo insegnare il concetto di numero razionale come classe di equivalenza di frazioni. Ma sui programmi si parla di numeri decimali.

-Prof.Manara: Si puo' insistere sul concetto anziche' sull'esattezza dell'espressione, cioe' insistere sul fatto che si tratta di un altro modo di rappresentare le stesse cose. La mia preoccupazione e' dettata dai testi scolastici e dai programmi. La cosa che a mio parere e' piu' intrigante non e' tanto la molteplicita' delle rappresentazioni, ma il fatto che con la rappresentazione decimale si perde la precisione che si puo' avere con le frazioni; necessariamente certi numeri razionali con la rappresentazione decimale vengono rappresentati in modo approssimato. E necessariamente perche', se cambio base, il numero che in una base era rappresentato in forma finita, nell'altra e' rappresentato in forma infinita, e viceversa. Quindi quella convenzione (perche' di convenzione si tratta) di scegliere delle frazioni con un denominatore fisso, come il 10 e le sue potenze, porta a delle perdite di informazione, che possono anche dar luogo a fenomeni curiosi (come la frazione 2/3, se si fa 2 diviso 3 puo' venire o 0,6666 o 0,6667; se poi moltiplico per 3, uno mi da' 1,9998, l'altro 2,0001: le informazioni date con la rappresentazione decimale sono migliorabili ma imprecise). E' un unico concetto (il numero razionale) rappresentabile in diversi modi.

DISCUSSIONE E CONTRIBUTI

Ins. A.: Una bambina di sua iniziativa ha posto una domanda sui decimali, perche' aveva ottenuto sulla macchinetta il numero periodico 1,3333... Io mi accorgevo che la sua domanda corrispondeva a questo problema: come puo' questa cosa che e' intera e che divisa in tre parti da' ancora una cosa finita, invece dare luogo ad un procedimento che non finisce mai?
La bambina era quasi angosciata: c'e' qualcosa che non torna, poi si puo' dividere ancora? e ancora?
Allora le ho detto che i problemi sorgono quando noi vogliamo rappresentare il risultato della divisione per tre con le frazioni decimali, ad un certo punto quello che non si puo' piu' fare tu puoi andare avanti a immaginarlo con la mente.
E' stata contenta e andava a cercare cose analoghe: la scatola di una medicina, con il disegno di un bambino che aveva in mano la scatola di una medicina, e ha detto: anche qui si puo' andare avanti ad immaginare che su quella scatola ci sia ancora un bambino con una scatola in mano e cosi' via.

Ins. B.: Ho notato che l'uso della frazione complementare e' difficile per alcuni bambini.
C'era un problema di questo tipo: un tale ha 1000 lire, ne spende 2/5 per le figurine, quanto gli rimane?
Alcuni bambini non hanno usato la frazione complementare, altri secondo me l'hanno usata meccanicamente senza vera comprensione, altri ancora l'hanno usata, conviti che si tratti della strada piu' bella.
Io ho precisato loro che i due modi risolutivi sono ugualmente validi. Comunque secondo me anche i bambini in difficolta' hanno una gran voglia di capire, ad esempio hanno voluto copiare la risoluzione fatta da altri, pur senza riuscire a giustificare i conti.

Ins. C: Forse pero' non e' importante che i bambini facciano questo passo quando vogliamo noi, possono farlo anche in seguito, l'importante e' che in un modo o nell'altro arrivino ad una risoluzione.

Ins. D: Secondo me e' importante che il bambino si appropri di quello che affronta, anche del piu' piccolo dei passettini, affinche' si appassioni.
Una bambina in difficolta', con cui stavo lavorando poche ore fa, aveva un problemino da risolvere: un bambino ha un certo numero di pagine da leggere e ne ha lette 3/5, quante gliene mancano?
Io ho preteso che lei mi spiegasse il risultato ottenuto, aveva calcolato i 3/5 e aveva sottratto dal totale. Altri avevano calcolato direttamente i 2/5. Mi sono chiesta di che cosa avesse bisogno quella bambina per fare quel passettino in piu'.
Ho disegnato uno schemino da cui si vedeva dove terminavano i 3/5 e dove iniziava l'altra parte. Alla bambina e' scattata la molla e ha detto che cosi' poteva fare solo due operazioni anziche' tre.
Io ho cercato di farle vedere che il numero di operazioni era sempre uguale, perche' per conoscere la frazione complementare bisogna fare 5/5 - 3/5=2/5.

6. LA PROPORZIONALITA'

6.1 Il numero razionale come operatore su grandezze. Definizione del rapporto di due grandezze. La misura.

DATE 4 GRANDEZZE A,B,C,D A DUE A DUE OMOGENEE, EUCLIDE DEFINISCE COSI' LA PROPORZIONALITA':
IN QUALUNQUE MODO SI PRENDANO DUE EQUIMULTIPLI nA ED nC E DUE EQUIMULTIPLI mB ED mD,
SE OGNI VOLTA CHE $nA > mB$, ANCHE $nC > mD$,
OGNI VOLTA CHE $nA = mB$, ANCHE $nC = mD$,
OGNI VOLTA CHE $nA < mB$, ANCHE $nC < mD$,
ALLORA SI DICE CHE LE DUE GRANDEZZE A, B SONO NELLO STESSO RAPPORTO DI C, D.

Questo discorso, pur essendo estremamente semplice, coinvolge operazioni da ripetere infinite volte. Infatti in teoria dovrei poter verificare che maggiore corrisponde a maggiore, uguale corrisponde ad uguale, minore a minore per ogni coppia di numeri interi m ed n.

NOI NON PRESENTIAMO PIU' LE COSE IN QUESTO MODO, PERCHE' DICIAMO:

$$A = m/n\ B$$

PRENDENDO m/n COME IL SIMBOLO DI UN OPERATORE CHE, A PARTIRE DALLA GRANDEZZA B PRODUCE LA GRANDEZZA A.
Possiamo fare questo perche' abbiamo a disposizione il concetto di continuita' che ci permette di parlare del sottomultiplo di una grandezza secondo un numero intero n.

Allora se avviene che $A = m/n\ B$, noi diciamo che: A sta a B come m sta ad n, ed il numero razionale m/n lo chiamiamo RAPPORTO DELLE DUE GRANDEZZE A e B, o anche MISURA DELLA GRANDEZZA A RISPETTO ALLA GRANDEZZA B.
Con questo procedimento logico abbiamo definito il simbolo A/B (rapporto di due grandezze omogenee) con un simbolo noto: m/n (rapporto tra due numeri).

LETTURA

Il discorso sulla proporzionalita' e' molto importante e vale la pena di impostarlo dall'inizio, cioe' da quella che e' una cosa naturale, e che poi storicamente si presenta come la piu' naturale. La proporzionalita' viene presentata in vari modi nei vari libri, io la presentero'come Euclide con le grandezze, poi vedremo di presentarla in maniera piu' moderna con gli operatori sulle grandezze per andare a vedere quale e' il significato e quale l'uso che possiamo farne.
In Euclide si trovano dedicati alla proporzionalita' due libri: uno e' quello della proporzionalita' tra numeri, l'altro tra grandezze. Parlero' solo di quest'ultima, perche' quella tra numeri e' inclusa in essa.
Date quattro grandezze A, B ,C , D , che siano omogenee a due a

due (non e' detto che debbano appartenere tutte e quattro alla medesima classe di grandezze omogenee) scriviamo con notazione moderna A:B=C:D. Qual e' la definizione che da' Euclide? Come ho gia' detto, Euclide la da' sempre con i multipli: se ogni volta che nA >mB, anche nC >mD, ogni volta che nA=mB, anche nC=mD, ogni volta che nA <mB, anche nC <mD, allora le quattro grandezze si dicono proporzionali.
La geometria greca lavora sempre sui multipli e non sui sottomultipli. Questa e' una finezza critica, perche' il multiplo io lo so sempre costruire, il sottomultiplo per una grandezza generica non e' detto che io lo sappia costruire; per esempio per l'angolo non riesco a dividerlo in tre parti uguali con un'operazione di quelle eseguibili con la geometria elementare.
Questo discorso, pur essendo estremamente semplice, coinvolge l'infinito. Infatti si dice "per tutte le coppie di numeri interi ...": in teoria io dovrei poter verificare che maggiore corrisponde a maggiore, uguale corrisponde ad uguale, minore corrisponde a minore per ogni coppia di numeri interi m,n. Frajese dice giustamente che in questo modo Euclide ha imbrigliato l'infinito, pero' in teoria dovrei fare infinite operazioni.
Noi non presentiamo piu' le cose in questo modo, perche' diciamo: A=m/n B, prendendo m/n come il simbolo di un operatore che a partire dalla grandezza B produce la grandezza A. Facciamo questo perche' abbiamo a disposizione il concetto di continuita', che dai matematici greci era evitato perche' non l'avevano precisato in modo rigoroso teorico, e che permette di parlare del sottomultiplo di una grandezza secondo un numero intero n.
Allora se avviene che (**) A=m/n B, diciamo che A sta a B come m sta ad n ((*) A/B=m/n), e il numero razionale m/n lo chiamiamo rapporto delle due grandezze A e B , o anche misura della grandezza A rispetto alla grandezza B.
Si noti, e questo e' un passaggio logico che val la pena di sottolineare, m/n e' un operatore, significa prendere il multiplo secondo m del sottomultiplo secondo n , e questa e' un'operazione, che fa passare da B alla grandezza A. Qui e' una notazione nuova, perche' io so che cosa vuol dire il simbolo m/n, numero razionale, ma non so che cosa vuol dire A/B, se A e B sono due grandezze. Il simbolo che sta a sinistra dell'uguale in (*) e' un simbolo che non abbiamo ancora definito (e il segno di uguale non ha lo stesso significato che in (**)), lo definiamo adesso chiamando rapporto tra due grandezze quel numero razionale che messo come operatore davanti alla seconda mi da' la prima. Questo discorso e' fondamentale per la teoria della misura.

DISCUSSIONE

RAPPORTO TRA GRANDEZZE OMOGENEE

Ins. A: Io sono stata incuriosita dal problema del rapporto, dal fatto che bisogna trovare un sottomultiplo comune tra due grandezze, allora ho tentato, cosa mai fatta, di impostare questo discorso con i bambini, cioe' di non introdurre le frazioni solo come operatori, ma di insistere anche sull'operazione di confronto tra due grandezze. I miei ragazzi sono gia' in quinta, ed io ho dato loro i regoli colorati, chiedendo di prenderne liberamente due e di confrontarli. Volevo che mi dicessero che frazione era

l'uno dell'altro, prendendo a piacere uno dei due come unita'. Loro sono stati molto furbi, perche' all'inizio li prendevano sempre uno doppio dell'altro, li accostavano e dicevano: questo e' 1/2 di quello, oppure: questo e' due volte l'altro. Pero' quando ho chiesto di passare a regoli che non fossero contenuti esattamente l'uno nell'altro, sono andati in crisi ed io ho pensato che non fosse ben chiaro il concetto di frazione.
Infatti hanno fatto una grande fatica ad arrivare al multiplo comune usando il regolo bianco. Una bambina dopo qualche giorno mi ha detto: guarda che io ho capito come si scrivono le frazioni, ma non ho capito bene perche' funziona cosi'.
A quel punto io ho pensato che si fosse creata una certa fissita', mi sembrava che i bambini fossero legati al concetto che si ha un intero e si spezza, ma se ci sono due cose diverse, una non puo' essere vista come frazione dell'altra: questo foglio ad esempio come meta' di un altro foglio.

Prof. Manara: La difficolta' era il rapporto tra due grandezze omogenee: vedere una grandezza come unita' di misura con la quale rappresentare l'altra.

Ins. A: Ho preso allora due strisce colorate, una meta' dell'altra, e ho chiesto loro che cosa avrebbe potuto dire la figura blu alla figura rossa. Ho avuto delle risposte abbastanza originali: una e' meta' dell'altra, l'altra e' il doppio della prima, qualcuno ha parlato del 50%. Poi ho dato altre due strisce, una 2/3 dell'altra, da confrontare senza l'aiuto del righello.

Prof. Manara: Questa idea di vietare l'uso del righello mi interessa.

Ins. A: Dopo lunghe discussioni, qualcuno e' arrivato a capire che se piegava una striscia a meta' e l'altra in 3 parti, si poteva fare un confronto. Io ho lasciato scrivere loro quello che volevano come spiegazione. Uno mi ha scritto: se pieghi la striscia azzurra a meta' e quella verde in 3 parti, scopri che la striscia azzurra e' 2/3 di quella verde, e quella verde e' 3/2 di quella azzurra, perche' meta' della striscia azzurra equivale ad 1/3 della striscia verde. Una bambina ha scritto: la figura A non ci stava nella figura B, allora l'ho divisa in 2 parti e ci sta 3 volte, ecco dov'e' nata la frazione.

Prof. Manara: Queste cose si leggono sul libro di Leonardo Pisano. Questo lavoro a mio parere e' esemplare, perche' in quelle testoline c'erano delle nozioni un po' bloccanti: erano legate a certe procedure; il lavoro e' stato evidentemente liberatorio nel collegare due cose che a loro sembravano distaccate. Il passo ulteriore sarebbe tornare al righello. Non sempre quando ho due grandezze riesco a fare un'operazione cosi' semplice da dire che una e' 2/3 dell'altra, ad esempio se avessi 2/7 dell'una uguale a 1/29 dell'altra (ho preso due numeri primi).
Allora il momento del ritorno al righello e' il momento della cifrazione con simboli numerici: viene compresa la rappresentazione simbolica di un concetto che gia' si possiede. E' il discorso che fa Leonardo Pisano, che non parla mai di sottomultipli, e in quel libro, il Flos, ci sono cose complicatissime con le monete: ma non si parla mai ad esempio di

4/5, bensi': 4 di questo e' 5 di quell'altro, ecc.
Noi abbiamo lo strumento delle frazioni che non ci danno di piu', pero' se partiamo dalla divisibilita', ecco che allora viene immediata la possibilita' di dividere in parti uguali. Questa cosa e' concettualmente molto complicata, ma noi accettiamo che si possa fare, dopodiche' la ragazzina diceva: 3 di questo qui e' meta' di quello la', e cosi' e' nata la frazione! Poi la misura col righello, i centimetri e con gli strumenti decimali non e' altro che un modo particolare di rappresentare questa cosa. Allora si unifica e si semplifica tutto. Talvolta non viene avvertita l'identita' concettuale di due cose e il ragazzino si spaventa di doverle imparare tutte e due. Invece aiutare ad unificare per riconoscere che si tratta di una cosa sola, questo e' il discorso veramente importante.

UNITA' DI MISURA

Ins. B: A me sembra importante indicare sempre l'unita' di riferimento, quando parliamo di frazioni.
A questo proposito ho sentito un discorso in cui si sosteneva che noi siamo abituati a fare l'addizione tra frazioni in un certo modo, ma se per esempio prendiamo le partite di baseball, e se alla prima partita su 5 mete un giocatore ne fa 3 e in un'altra partita su 4 mete ne fa 3, non si puo' fare l'addizione 3/5+3/4=27/20, bisogna fare la somma dei numeratori tra di loro e dei denominatori tra di loro.
E' vero, ma cerchiamo di capire perche'. Quando noi facciamo l'addizione 3/5+3/4 ci riferiamo all'addizione di due grandezze misurate la prima in quinti di una certa unita' di misura, la seconda in quarti della stessa unita' di misura. Per forza dobbiamo trovare un denominatore comune, perche' dobbiamo suddividere l'unita' di misura in un sottomultiplo che stia esattamente un numero finito di volte nella prima e nella seconda grandezza. Allora per fare la somma ho bisogno di sapere quanti ventesimi (5 per 4 fa 20) ci sono in tutto.
Nel caso del baseball, prima considero una partita con le sue 5 mete di cui 3 aggiudicate dalla mia squadra, poi un'altra partita con 4 mete di cui 3 per la mia squadra; quando voglio sapere quante mete in tutto sono state fatte nelle due partite dalla mia squadra, devo riferirmi alle 9 mete totali.

Ins. C: Sono d'accordo sulla necessita' di richiamare sempre l'attenzione sulla grandezza che prendiamo come unita' di riferimento, mentre in tutte quelle figurine suddivise in parti l'unita' rimane nascosta.
Mi ricordo di un bambino che doveva colorare delle frazioni proprie decimali di vari righelli, ad esempio doveva colorare 3 quadretti su 10 e scrivere 3/10 = 0,3. Un giorno aveva 2 striscette ciascuna divisa in 10 parti, e doveva colorarne 13, allora ne ha colorate prima 10 di una striscetta, poi 3 dell'altra, e ha scritto a fianco: 13/20 = 1,3.
Nel libro di testo era sottinteso che l'unita' di riferimento dovesse essere la striscetta da 10, mentre il bambino, coerentemente con gli esercizi fatti fino a quel momento, ha inteso che l'unita' di riferimento fosse il disegno completo.

Ins. D: Mi viene in mente che sui libri spesso vengono presentate figure poligonali da suddividere in parti in vari modi: ora con righe orizzontali, ora con righe verticali, ecc. Questa preoccupazione corrisponde al tentativo di togliere una fissita' nell'esecuzione di un compito, tuttavia tutto cio' non mi sembra molto importante per il concetto di frazione.

FRAZIONE COME OPERATORE

Ins. E: Nelle prime classi elementari introduciamo l'intero come operatore, e percio' diciamo non solo 4, ma ad esempio 4 mele, cosi' quando introduciamo la frazione dobbiamo dire non solo ad esempio 3/5, ma 3/5 di ... Spesso sui libri questo non e' chiaro. Inoltre nell'introdurre le frazioni ci fissiamo troppo spesso sulle lunghezze e sulle superfici, mentre si potrebbe operare su pesi, capacita', ecc.

Ins. F: Mettere in evidenza la grandezza su cui si opera e' importante, ad esempio 1/2 di una torta puo' essere meno di 1/3 di un'altra.

Ins. G: Non vorrei che i bambini arrivassero a pensare che i mezzi (1/2) sono tutti diversi. Un bambino mi ha fatto notare che 1/2 di una certa quantita' rappresenta una parte ben precisa . Ad esempio abbiamo visto in geografia le percentuali, 1/2 e' il 50% , se la regione cambia, la proporzione e' pero' sempre quella.

Ins. F: I discorsi mi sembrano entrambi validi, in un caso mettiamo a confronto le quantita', nell'altro ci interessa la relazione di equivalenza relativa alla proporzionalita'.

6.2 Grandezze incommensurabili e loro rappresentazione: l'operazione di misura.

IN GEOMETRIA ESISTONO DELLE GRANDEZZE INCOMMENSURABILI, PERO' E' SEMPRE POSSIBILE DARE DEI NUMERI RAZIONALI CHE RAPPRESENTANO NON LA GRANDEZZA A, MA UNA GRANDEZZA VICINA QUANTO SI VUOLE ALLA GRANDEZZA A.

Cioe' questi numeri razionali ci danno una valutazione approssimata del rapporto tra la grandezza A e la grandezza B, che sono incommensurabili, ma noi possiamo spingere il nostro desiderio di precisione al livello desiderato.
QUESTO E' L'ASPETTO VERAMENTE PIU' IMPORTANTE DI TUTTA LA MATEMATICA,perche' abbiamo stabilito un modo di rappresentare con il linguaggio dei numeri anche questa realta' non facilmente dominabile.

Allora, se in un dato insieme di grandezze omogenee teniamo fissa la grandezza B (che chiamiamo UNITA' DI MISURA), ogni altra grandezza A e' rappresentata da un insieme di numeri razionali e viceversa.

In questo modo, invece della grandezza (o di un suo campione concreto), a certi fini possiamo usare dei numeri razionali, cioe' la misura della grandezza, anche quando la grandezza fosse incommensurabile rispetto all'unita' di misura.

Da questi discorsi discende l'operazione di misura:
DIRE RAPPORTO TRA DUE GRANDEZZE, O DIRE MISURA DI UNA GRANDEZZA RISPETTO AD UN'ALTRA, E' LA STESSA COSA, SI TRATTA SEMPRE DI UN NUMERO RAZIONALE VISTO DA DUE DIFFERENTI PUNTI DI VISTA.

LETTURA

GRANDEZZE INCOMMENSURABILI. L'OPERAZIONE DI MISURA

Prima osservazione: era gia' noto alla geometria greca, ed e' noto anche oggi, che date due grandezze qualsiasi non e' detto che si trovi un numero razionale m/n tale che mettendo m/n come operatore davanti alla grandezza B si ottenga la grandezza A. Se questo avviene diciamo che le due grandezze A e B sono commensurabili tra di loro, diciamo anche che A sta ad m come B sta ad n, oppure come dicevano i Greci n volte A uguale m volte B. Tutti i conti li facevano cosi' e non solo i Greci, ma anche in tutta la matematica del primo Rinascimento: se andiamo a vedere ad esempio il Flos di Leonardo Pisano, non si usano mai le frazioni; dicevano: 17 di questo da' 13 di quest'altro, ecc. Noi invece abbiamo dato un insieme di regole per lavorare su questi simboli, sugli operatori numeri razionali. Anzi addirittura a volte presentiamo in forma di frazione decimale i numeri razionali, cioe' prendiamo quelli che vengono chiamati i numeri decimali, e lavoriamo su quelli con regole ben determinate.

Allora, se avviene che A=m/n B, diciamo che le due grandezze sono commensurabili tra di loro, cioe' una parte aliquota di una e' uguale ad una parte aliquota dell'altra, oppure che un multiplo di una secondo un certo numero e' uguale ad un multiplo dell'altra secondo un altro numero.
Purtroppo questo discorso non e' vero in generale, cioe' a dire esistono in geometria coppie di grandezze incommensurabili: una delle conseguenze del teorema di Pitagora e' che il lato e la diagonale del medesimo quadrato sono tra loro incommensurabili: non si puo' trovare un multiplo secondo un intero del lato che sia uguale ad un multiplo secondo un intero (diverso, beninteso) della diagonale. Allora ci lasciamo cadere le braccia? No, l'osservazione che facciamo e' che proprio in base a quella proprieta' di continuita' di cui abbiamo parlato piu' volte, che noi supponiamo vera per le grandezze, puo' avvenire che esistano coppie di grandezze incommensurabili, pero' e' possibile sempre dare dei numeri razionali che rappresentano non la grandezza A, ma una grandezza molto vicina alla grandezza A, cioe' come suol dirsi che ci danno una valutazione approssimata di quel rapporto, e la cosa veramente importante di tutta la matematica e' che noi possiamo spingere questo desiderio di informazioni precise al livello che desideriamo.
Questa e' una delle chiavi per farci entrare nella lettura della realta' attraverso la matematica, perche' se noi in un dato insieme di grandezze omogenee teniamo fissa la grandezza B, chiamiamola unita' di misura, allora ogni altra grandezza A e' rappresentata da un numero razionale e viceversa. Abbiamo trovato la chiave per cifrare (scrivere in cifre) e codificare la realta', nel senso che invece della grandezza, che puo' essere una lunghezza, un peso, un voltaggio, una velocita', di cui non possiamo esibire un campione concreto, noi esibiamo quel numero, cioe' la sua misura: ecco il punto veramente centrale della matematizzazione della realta'. Come diceva Galileo nel Saggiatore, l'universo e' scritto in caratteri matematici, e chi non conosce questi caratteri non arrivera' mai a leggerlo; il modo per leggere, cioe' la chiave per decifrare, e' questo discorso che abbiamo fatto: noi misuriamo le grandezze, e rappresentiamo ogni grandezza, mediante certe convenzioni beninteso, mediante questi simboli, simboli di un linguaggio; li chiamo simboli linguistici, sono parole di una certa lingua; invece dell'italiano e' il linguaggio della matematica, ma sono sempre simboli, rappresentano le cose: non c'e' bisogno di dare in mano la cosa, basta il simbolo. Diventano quelli che chiamiamo numeri concreti: 3/4 di metro, di chilo, ecc.
L'operazione di misura, passo importantissimo, discende dal discorso precedente: perche' dire rapporto tra due grandezze, o dire misura di una grandezza rispetto ad un'altra, e' la stessa cosa: sempre di un numero razionale si tratta, visto da due punti di vista diversi. I Greci lo vedevano come rapporto di due grandezze, noi come misura di una grandezza rispetto ad un'altra.
Facciamo un altro passo che i Greci per la mancanza di desiderio di dominare tecnicamente la realta' non hanno fatto: noi abbiamo quindi un modo per rappresentare coi numeri tutta una realta' purche' si tratti di grandezze e quindi si possa in qualche modo operare con la misura. Non e' l'unico modo, abbiamo parlato di calibri dei fucili da caccia ....

DISCUSSIONE

MISURA E SISTEMA DECIMALE DI MISURA

Ins. A: C'e' una grande difficolta' nei bambini a tenere sotto controllo due visioni distinte, che 3 dm siano 30 cm per loro e' difficile.

Ins. B: Quando uso i centimetri, io dico che confronto i segmenti con la centesima parte di un campione che si trova a Parigi ecc. Se prendo un altro campione, lo divido in sottomultipli, posso utilizzare questo sottomultiplo allo stesso modo dei centimetri. I bambini fanno proprio fatica, come osservavi tu, a tenere presenti contemporaneamente due cose, cioe' a ricordare che lo stesso segmento lo possono pensare sia suddiviso in centimetri che ad esempio in quarti di una unita' di misura non convenzionale.
Pero' devono essere abituati a considerare operazione di misura anche l'attivita' di prendere una unita' arbitraria, dividerla in 7 parti, prendere come riferimento una di queste, e misurare delle grandezze ad essa omogenee.

Ins. C: Io non ho mai fatto come dici tu. Abbiamo si' usato unita' arbitrarie, poi pero' venivano sempre suddivise in 10 parti, e alla fine si scopriva che erano il metro e il decimetro. Mi piacerebbe adesso invece dividere un segmento ad esempio in 5 parti, e fare un lavoro di questo tipo.

Ins. D: C'e' un discorso che si trova frequentemente sulla valutazione delle lunghezze e sugli strumenti piu' adatti per misurarle. Per esempio un corridoio potra' essere lungo un decametro o due, per misurarlo puo' essere comodo usare la "rotella del decametro", se devo misurare un segmento sul quaderno uso il doppio decimetro ed esprimo la misura in centimetri. Non viene mai sottolineato invece che anche nella scelta della marca c'e' una certa convenzionalita'. Ad esempio l'altezza dei monti si esprime in metri e mai in ettometri o in chilometri.

Ins. E: Nella mia classe sono state fatte delle osservazioni interessanti leggendo il diario di Colombo. Infatti li' si parlava di miglia marine ed i bambini si sono subito chiesti: quanti chilometri sono? Mi sono accorta che, non potendo piu' utilizzare i meccanismi di aggiungere zeri, spostare la virgola, ecc. i bambini si sono trovati in difficolta'. Penso che per aiutarli sarebbe utile il lavoro che avete proposto.

Ins. F: Nell'esperienza comune dei bambini ci sono anche altri esempi di convenzioni differenti da quella decimale: ad esempio i miei scolari mi hanno chiesto se si possono fare le equivalenze con le misure di tempo e se 3 ore equivalgono a 300 minuti.

MISURA DELLE AREE

Ins. A: Io sono arrivata molto tardi con i bambini a introdurre la misura dell'area come prodotto delle misure dei lati. Per molto tempo i miei scolari sceglievano una unita', ad esempio un centimetro quadrato, poi ricoprivano la figura con tanti quadratini ritagliati, poi li disegnavano e, contando, scrivevano il numero di centimetri quadrati serviti per una fila ripetuto per il numero delle file. Solo dopo aver fatto molte volte questo lavoro, sono stati loro stessi a dire: basta, tre per due e' sei, ma quel sei non sono centimetri di lunghezza, sono i sei quardatini serviti per ricoprire la figura. Io faccio scrivere: "3x2=6, area in centimetri quadrati". Ho fatto cosi' di proposito, per evitare che si confondano. Anche quando ero io scolara facevo i calcoli con i numeri, poi alla fine specificavo che cosa avevo ottenuto. Io mi ero trovata comoda e la mia insegnante l'aveva ritenuto un buon metodo. Adesso io stessa l'ho proposto ai bambini, perche' dominare la situazione con calcoli un po' complicati controllando che tornino le marche non e' facile.

Ins. B: Anche a me sembra delicato il momento in cui, per dare la misura di una superficie, al posto di prendere una unita' di misura ad essa omogenea e vedere quante volte e' contenuta, si danno delle misure lineari e si procede a fare dei calcoli. Io temo che alla lunga il bambino si dimentichi che le linee e le superfici sono grandezze differenti, e che percio' sia tentato di estendere anche alle seconde le proprieta' delle prime.
A volte anche gli adulti, se presi alla sprovvista, mostrano di pensare che raddoppiando le lunghezze dei lati di un rettangolo, si ottenga un'area doppia anziche' quattro volte piu' grande.

Ins. C: Quando abbiamo fatto le equivalenze, non ho mai dato le classiche serie di esercizi per rendere automatico il procedimento. Invece abbiamo cercato di fare dei ragionamenti, spesso usando il disegno. Un giorno discutevamo: in un metro ci sono 10 decimetri ... e se fosse un metro quadrato e quadrati i decimetri?
In fondo alla classe teniamo appeso un metro quadrato che abbiamo costruito con tanti decimetri quadrati.
Tutti si sono girati a guardare la figura, e' bastato questo, non si sono soffermati a contare, ma subito sono scoppiati a dire: ce ne sono 100!

Ins. D: Quando abbiamo introdotto l'area del cerchio siamo andati per tentativi. Abbiamo disegnato una circonferenza e l'abbiamo confrontata con il quadrato avente il lato uguale al raggio. Quattro di questi quadrati sono troppi e 2 sono pochi. Qualcuno ha proposto di provare con 3, cosi' abbiamo visto che 3 volte il quadrato del raggio piu' un altro pezzettino poteva andare bene. Allora io ho dato il numero 3,14, dicendo pero' che e' un numero approssimato. Una bambina mi ha chiesto: ma allora preciso non sara' mai?

6.3 Nuovo passo nella matematizzazione della realta': la deduzione.

NELLA MATEMATIZZAZIONE DELLA REALTA' C'E UN ALTRO PASSO ANCORA PIU' IMPORTANTE DELLA POSSIBILITA' DI RAPPRESENTARE LE GRANDEZZE CON NUMERI: POSSIAMO RAPPRESENTARE LE OPERAZIONI CONCRETE CHE FACCIAMO SULLA REALTA' CON OPERAZIONI SUI SIMBOLI.

LETTURA I

Seconda osservazione: il passo ulteriore e' ancora piu' importante, abbiamo visto che sulle grandezze possiamo fare certe operazioni, di somma, di differenza, ecc. Non basta che io rappresenti le cose, invece di darti materialmente le cose in mano ti do' un elenco di numeri, ma io ti so anche dire quali operazioni hai fatto e viceversa qual e' il risultato dell'operazione che tu faresti con le grandezze. E qui e' il fondamento della fisica, della tecnica. Non solo rappresentiamo la realta' con un certo linguaggio, ma le operazioni che facciamo sulla realta' le rappresentiamo con operazioni sui simboli. A partire da Galileo, da Newton fino ad oggi, questo e' il punto di partenza di tutta la scienza matematizzata moderna. Non esisterebbe la scienza di oggi se non ci fosse questa matematizzazione. Io scrivo delle equazioni e le risolvo, scrivo delle leggi: ma devo essere sicuro che queste leggi dicono qualche cosa, cioe' che questi simboli linguistici corrispondono a certe operazioni che faccio sulla realta'. Ecco che questo discorso che e' la chiave della conoscenza scientifica della realta' si basa tutto sulla possibilita' di dar senso alla proporzionalita', di interpretare la proporzione come abbiamo appena fatto, di interpretarla come misura, e poi di rappresentare le operazioni. Non solo, ma se noi rappresentiamo le grandezze mediante la loro misura, torniamo al discorso di prima: anche i rapporti tra le grandezze diventano i rapporti tra le loro misure. Qui sta tutta la scienza fisico-matematica di tipo tradizionale macroscopico (non quantistico).
Facciamo un passo ulteriore per dare l'idea di che cosa vuol dire proporzionalita' in base a questi discorsi. Se io ho due classi di grandezze omogenee (tra di loro in ciascuna classe), posso stabilire una corrispondenza tra le grandezze delle due classi. Il modo piu' semplice e' la proporzionalita': dato che ogni grandezza della prima classe e' rappresentata da un numero che e' la sua misura, ogni grandezza della seconda classe e' rappresentata da un altro numero, che e' la sua misura, beninteso nella stessa unita', chiameremo proporzionalita' una corrispondenza tra le grandezze delle due classi tale che il rapporto tra le misure di grandezze corrispondenti sia costante. Questa costante e' detta costante di proporzionalita'.
Questo discorso e' semplice, ma di solito ne viene presentato un altro, che e' piu' limitativo e confonde le idee. Si dice che moltiplicando (o dividendo) per 2, per 3, o per 10 le grandezze della prima classe restano moltiplicate (o divise) per 2, per 3 o per 10 le corrispondenti della seconda. Questa e' una conseguenza, non e' la definizione di proporzionalita'. Se abbiamo stabilito il

concetto di misura, sappiamo che cosa vuole dire corrispondenza, se le misure stanno in un rapporto costante tra di loro viene di conseguenza che se la prima e' moltiplicata per 2, per 3 ecc. anche la seconda e' moltiplicata per 2, per 3 ecc.
Il discorso piu' vecchio come loro sanno e' quello del teorema di Talete, che si trova su tutti i libri di geometria. Se ho un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali ho una corrispondenza tra i segmenti che stanno sull'una e quelli che stanno sull'altra: la corrispondenza e' tipicamente una proporzionalita'. Questo discorso e' la radice di un albero fronzuto e molto esteso che e' quello delle similitudini, cioe' della uguaglianza di forma e non di grandezza, della proporzionalita' tra segmenti, ecc., tutte cose che fanno parte della nostra vita quotidiana, che utilizziamo tutti i giorni: se ho quaderni con quadrettature diverse, se disegno contando i quadretti si vede subito che ho figure simili ma non uguali.
Io dico spesso in forma paradossale che noi siamo ossessionati da Talete, perche' la prima cosa che cerchiamo di utilizzare, il primo schema mentale con cui cerchiamo di rappresentare un fenomeno fisico e' quello della proporzionalita', che invece non e' sempre valido. Ci possono essere piccolissimi incrementi (la goccia che fa traboccare il vaso) da cui nascono effetti molto grossi: se da uno spermatozoo viene fuori una balena comincio a pensare che la proporzionalita' non sia tanto rispettata. Questo che e' lo schema fondamentale che l'umanita' possiede da piu' di 20 secoli e' anche uno schema molto pigro.

Il concetto che deve essere chiaro e' quello di proporzionalita' come corrispondenza biunivoca con conservazione dei rapporti: se uno raddoppia, l'altro raddoppia, e cosi' via. Questa e' la proporzionalita' diretta, poi viene la proporzionalita' inversa. Ci sono poi anche le condizioni, che sono date dal teorema di Talete se vogliamo, cioe': basta che a grandezze uguali corrispondano grandezze uguali, alla somma di due grandezze del primo insieme corrisponda la somma di due grandezze del secondo insieme, che la corrispondenza conservi la continuita', tutte cose complicate che hanno dato luogo a discussioni che sono finite solo nel secolo scorso; al di la' di questo prendiamo per buono che ci sia una corrispondenza biunivoca che conserva i rapporti, e questo concetto lo usiamo quotidianamente. Non c'e' niente di complicato quindi neanche a farlo digerire ai ragazzini. Il discorso piu' semplice e liberatorio da un certo punto di vista e' che invece di lavorare sulle grandezze puoi lavorare sulle misure, cioe' lavori sui simboli: questa e' la matematica chiave di lettura della realta'.
Spesso credendo di far bene presentiamo i concetti con tutto un contorno che dovrebbe facilitare la comprensione, poi ci dimentichiamo di far vedere che il contorno e' il contorno e il concetto il concetto, quindi dovremmo avere il buon senso di demolire pian pianino la cornice per arrivare all'essenziale. Ad esempio che serve insegnare a degli adulti che il minimo comune multiplo si calcola prendendo i fattori comuni e non comuni col massimo esponente? Basterebbe che capissero che per sommare due frazioni bisogna che abbiano uguale denominatore, che e' la stessa cosa che mettere le virgole una sotto l'altra quando facciamo la somma coi numeri decimali. Infatti 1,25 equivale a 125/100, e 4,75 equivale a 475/100, dopodiche' mettere le virgole una sotto

all'altra significa mettere tutto in centesimi. Sono cose semplici che dovrebbero nascere dalla manipolazione delle cose quotidiane: noi non dobbiamo far altro che far riflettere, prendere per mano i bambini, e costruire cosi' una razionalita' globale che nasca dall'interno del loro comportamento: non qualcosa di sovraimposto, in cui il cervello resta ingabbiato.

LETTURA II

Riprendendo il discorso, il mio programma di lavoro e' far nascere la matematizzazione dalla manovra della realta' concreta; e' quello che avviene quando insegnamo il sistema metrico decimale (v. Parte I/I,1): in sostanza noi insegnamo a rappresentare la realta' con certi strumenti, che danno le proprieta' di un linguaggio preciso e codificato. In quest'ordine di idee infatti la matematica si presenta con l'aspetto di un linguaggio in contiguita' e in continuita' con il linguaggio comune, essendo pero' piu' preciso e codificato. Questi tre aspetti danno il valore formativo della matematica, che puo' essere offerto a qualunque eta', a qualunque stadio dello sviluppo mentale. Uno dei valori della conoscenza scientifica e' aver saputo, aver potuto inventare un insieme di strumenti concettuali ed espressivi.
I contemporanei di Galileo non negavano l'importanza dell'osservazione e dell'esperimento, non e' una scoperta di Bacone, gia' in Aristotele e nella filosofia greca troviamo codificata la necessita' di osservare e sperimentare. Cio' che costituiva il punto di polemica di Galileo con i suoi contestatori era l'uso del linguaggio matematico: facciamo i conti, diceva G., mettiamo i numeri. E' cio' che troviamo circa due secoli dopo in quel bellissimo libro sulla moneta dell'abate Ferdinando Galliani (giovane abate suddito del Re di Napoli, tutt'altro che stupido ed ignorante come sostiene tutta una storiografia risorgimentale che ha calunniato i Borboni), libro di economia interessantissimo della fine del '700, in cui si diceva: "... tanto sta la differenza tra il dire una cosa con le parole e il dirla coi numeri... ". Quest'uomo giovanissimo ha scritto un trattato esemplare sulla moneta, poi e' stato mandato alla corte del Re di Francia (quindi prima del 1793) a fare da ambasciatore del Re di Napoli.

DISCUSSIONE

-Domanda: Ma allora anche dal punto di vista didattico questo potrebbe essere una traccia, portare i bambini ad accorgersi del tipo di esperienze che fanno nella vita di tutti i giorni e condurli a constatare che c'e' una grossa differenza tra fare discorsi oppure avere fatto esperienze che hanno condotto a qualche risultato che ha aspetti estemporanei, e utilizzare un linguaggio rigoroso.

-Prof.Manara: Sta all'insegnante cogliere il momento sia per sottolineare la differenza che per far cogliere la contiguita': la matematica come strumento espressivo, non come insieme di giocherelli qualsiasi. Strumento per dire le cose, ma dirle con

particolare precisione. Tutta l'operazione di misura, di cui ci occuperemo nei prossimi incontri, tutto il concetto di proporzionalita' (che sara' uno dei discorsi finali, perche' la legge di proporzionalita' abbiamo detto e' la prima che viene usata per descrivere il comportamento reale delle cose) sono in contiguita' con l'insieme degli strumenti espressivi.
Il ragazzino ha gia' una visione del mondo e degli strumenti espressivi: noi dobbiamo indurlo a riflettere, perche' la sua razionalita' implicita diventi cosciente.

APPENDICE 1

LA RAZIONALITA' GLOBALE

-Ins.A: Quando si insegna la matematica nella scuola dell'obbligo, e' giusto insistere sugli aspetti tecnici (tabelline, calcolo di divisioni ed espressioni, ecc.), oppure su che cosa si deve insistere e con quale obbiettivo?

-Prof.Manara: Io insisto sul discorso della razionalita' globale (visione globale formativa della matematica al ragionamento che non e' solo matematico) e non sulle singole trovatine, ingegnosita' locale che e' necessaria ma non e' l'essenza del problema, cioe' lascerei da parte le piccole minuzie di manovra dei simboli o di manovra algebrica, cosa necessaria ma non sufficiente per la mentalita' matematica.
Ho notato che i nuovi programmi della Commissione Brocca sono molto piu' concettuali e sfrondati dei precedenti. Purtroppo sono chiamati programmi di matematica e informatica ... Non che l'informatica non si possa usare in modo intelligente, anzi bisogna; ma si deve evitare che nella scuola l'informatica venga insegnata come una materia esclusivamente tecnica. Sarebbe come far insegnare la termodinamica da un meccanico di automobile, che sa che ci sono cose che scottano, ma non sa il perche'.
Vorrei arrivare a fare della matematica un fronte unico di razionalita' globale, collegato con il resto delle altre materie, piuttosto che considerarla come un addestramento di dattilografia.

-Ins.B: Questa impostazione mi sembra molto interessante e viene confermata anche dal prof. Emilio Manzotti (ordinario di Linguistica Italiana all'Universita' di Ginevra) che a proposito dell'insegnamento della lingua italiana nella Scuola Media scrive: "Pare indispensabile che il sistema del lessico venga preso in conto nei programmi soprattutto da un punto di vista che ponga in evidenza il rapporto tra lingua e operazioni mentali. Il principio di base, a questo stadio dell'educazione linguistica, mi pare debba consistere nel tenere minuziosamente conto di ogni riflesso semantico delle variazioni formali, anzi nell'occuparsi di variazioni di forma solo in quanto esse hanno conseguenze rilevanti sui significati. La portata di questo principio va molto al di la' del solo studio dell'italiano per inglobare -credo- tutta l'astrazione formale delle matematiche. Nel loro insegnamento l'essenziale risiede nell'abitudine a percepire il peso semantico specifico di simboli e variazioni di simboli." (da: "Attualita' e inattualta' dei programmi di italiano" di E.Manzotti in ITINERARI DIDATTICI - SCUOLA MEDIA - ITALIANO, ed. La Scuola, Brescia, 1992).

-Ins.C: Ritengo fondamentale l'indicazione di non privilegiare i trucchetti didattici, perche' l'educazione matematica e' educazione globale. Pero' non riesco a cogliere il limite entro cui la matematica, pur conservando la sua specificita', contribuisce alla formazione della persona e oltre il quale invece imbocca una sua strada specifica. Il matematico ragiona, ma dire che per ragionare bene devo ragionare matematicamente mi sembra esagerato.

-Ins.A: Si e' detto che l'importante e' ragionare bene, e questo vale in qualunque attivita'; a volte, per affrontare una questione ad un certo livello di complessita' e di astrazione e in funzione della domanda che vien posta, ho bisogno di schematizzare la situazione, di simbolizzarla in un modo convenzionale, per essere facilitato a ragionare in modo giusto. Io devo ragionare bene, quando poi sono nell'ambito della matematica ho a disposizione certi particolari strumenti simbolici.

-Ins.C: Mi sorgono questi dubbi. Chi non avesse capito che cosa vuol dire costruire un ragionamento partendo da assiomi, non ragionerebbe bene in assoluto, oltre che in matematica?
Inoltre, ha senso dire che chi fa la matematica della certezza esce dalla matematica come si intende oggi, e che complessivamente quando ragiona ha delle fissita'? Pero' fino a che punto approfondire che cosa sia l'assiomatizzazione mantiene una valenza plurima, generale, e non diventa un lavoro tecnico, specifico, indispensabile solo a chi voglia costruire un capitolo di matematica?

-Prof.Manara: E' stato osservato da vari autori che la comprensione di una assiomatizzazione completa e rigorosa e' un'impresa che richiede maturita' mentale; oso dire che anche in certi corsi universitari gli studenti non riescono a recepire completamente le motivazioni di certe assiomatizzazioni, e quindi non si rendono completamente conto del loro significato. Ne consegue che questi studenti si limitano a memorizzare i sistemi di concetti che vengono presentati, senza capire la necessita' delle loro connessioni logiche. Se questo e' vero per degli studenti universitari e' vero a maggior ragione per altri utenti della scuola che hanno di solito una maturita' minore. Per questa ragione io ho cercato di combattere e contrastare l'introduzione, nella scuola elementare, della logica formale: non perche' il ragazzo non debba ragionare, ma perche' non mi sembra maturo per valutare il vantaggio di una teoria esplicita e formale del ragionamento e della deduzione.
Tuttavia penso che si possa cercare di insegnare quello che io vorrei chiamare lo spirito del metodo assiomatico. Vale la pena di ricordare che questo metodo non consiste affatto nell'imporre, senza alcuna dimostrazione, quelli che vengono considerati i nostri principi della conoscenza, ed i punti di partenza che noi riteniamo chiari, evidenti ed irrinunciabili; io credo invece che lo spirito della assiomatizzazione consista soprattutto nella ricerca del "perche'" delle nostre asserzioni. Mi pare che si possa educare a questa ricerca in ogni eta', beninteso tenendo conto del grado di maturazione degli utenti.
Ho avuto occasione di dire tante volte che la conoscenza scientifica non e' soltanto un accumulo di fatti, e di informazioni, anche se validissime; ma si ha conoscenza scientifica quando le informazioni sono giustificate, spiegate, motivate; cioe' quando i fatti sono organicamente collegati con le loro cause. Ritengo che la formazione alla assiomatizzazione sia non soltanto formazione alla ricerca delle motivazioni, dei "perche'" delle cose che si dicono, ma anche, e soprattutto, della enunciazione esplicita dei punti da cui si parte per concludere con rigore, in modo che nel corso di un ragionamento non si debba mai fare ricorso ad una pretesa "evidenza", ma invece quelle cose

che vengono accettate senza dimostrazione siano esplicitamente riconosciute, enunciate e dichiarate prima di ogni deduzione.
Mi pare ovvio che la profondita' alla quale vengono ricercati i fondamenti ed i principi dipenda dalla maturita' degli utenti, come ho gia' detto. Ma io non vorrei rinunciare ad impostare in questa forma l'educazione alla razionalita'; ritengo infatti che questa sia fondamento di autonomia intellettuale e quindi di liberta', e quindi giovi alla formazione del futuro cittadino.

-Ins.D: Difficilmente i bambini riescono a fare la fatica di scegliere un'ipotesi di lavoro e di provare se puo' essere utile; vorrebbero sempre sentirsi dire: fai cosi' che va bene. Io a volte lascio delle questioni aperte, porto avanti gli argomenti un po' alla volta, favorendo delle esperienze concrete su cui elaborare i concetti. Tuttavia i bambini in difficolta' non utilizzano spontaneamente l'esperienza precedente, anche se a volte hanno delle intuizioni: sembra che nella loro testa non si storicizzi niente.
Ho degli esempi sui segmenti e sui triangoli; per introdurre le frazioni avevo dato dei problemi di questo tipo: ho un segmento doppio di un altro, la loro somma e' di 12 cm, quanto misurano i due segmenti? Oppure: ho un triangolo isoscele, un lato e' triplo dell'altro, ecc. Tutto questo lavoro era stato fatto per favorire la comprensione del testo; io avevo proposto che prima di fare i calcoli costruissero con degli stuzzicadenti quello che serviva. Ad esempio se un segmento e' triplo di un altro comincio da quello piu' corto con uno stuzzicadenti; l'altro sara' fatto con tre stuzzicadenti; li mettevano allineati e vedevano che il segmento somma era fatto con quattro pezzi; per trovare la lunghezza di ogni pezzo in centimetri bastava dividere per quattro. Dopo alcune settimane ho dato come compito per casa dei problemi dello stesso tipo, con il suggerimento di ricordarsi il lavoro fatto in classe. I due bambini che sono piu' in difficolta' hanno fatto tutt'altro lavoro; forse sono stati aiutati dai genitori. Si ha l'impressione che per questi bambini quello che si fa a scuola sia separato dalla concretezza delle esperienze fatte.

-Ins.C: A proposito della razionalita' globale, nel lavoro di lingua classifichiamo le parole: sottolineiamo le caratteristiche che sono uguali o diverse, in modo da sviluppare questa capacita' logica. I discorsi che ho sentito qui mi sono stati utili anche per l'insegnamento dell'italiano. Ad esempio abbiamo analizzato l'espressione "un giro di spago"; c'e' chi dice: per me spago e' il materiale; o chi dice: lo spago e' il mezzo che si usa per fare il giro; e un altro: per me specifica di che cosa e' fatto il giro; ecc. Io prendo nota di tutte le risposte e lascio aperto il problema. Cosi' abbiamo raccolto quelli che chiamiamo campionari: c'e' quello di lingua, quello di geometria, ecc.

-Ins.A: Insegnando la geometria mi e' capitato di dover sottolineare la differenza tra dire "e" e dire "o", anche se non avevo mai fatto il discorso sulle tavole di verita' a proposito della differenza tra "e" e "o".

-Prof.Manara: Mi sembra proprio uno dei modi di insegnare la logica, come dicono anche gli avvertimenti ai nuovi programmi. "Vivo o morto", questo e' l'aut aut; "mangio caramelle o

cioccolatini", questo e' un altro uso della "o"; e cosi' via. Questi discorsi da una parte introducono alla riflessione, dall'altra giustificano nei limiti del possibile la costruzione di simboli che saltando le ambiguita' del linguaggio comune diano esattamente l'operazione logica. In questo modo la logica simbolica, quando l'insegnante decida di farla, non cade dall'alto, ma trova la sua giustificazione nell'evitare questi equivoci. La cosa piu' importante e' la riflessione: uno deve sapere che quando pronuncia una frase essa puo' avere piu' di un significato.
Siccome i ragazzini hanno una fantasia molto viva, trovano una quantita' di esempi. Dobbiamo aiutarli a trovare tutti i possibili significati delle parole che dicono; in quest'ordine di idee gli indovinelli sono molto significativi. La mente si abitua a questa caratteristica del linguaggio e capisce la necessita' assoluta o quasi dell'espressione precisa.
In matematica dunque abbiamo un linguaggio preciso e codificato, cioe' convenzionale. Anche qui insisto sempre nel dire: la logica formale cosi' come si trova sui manuali non e' nata senza ragione; ha avuto una giustificazione storica dalla necessita' di fare l'analisi dei fondamenti della matematica. Si e' capito che per fare un'analisi valida dei fondamenti della matematica non ci si poteva fidare del linguaggio comune. Allora sono nate queste convenzioni di rappresentazione, cosi' come sono nate le convenzioni di rappresentazione dei numeri; infatti le convenzioni arabe che usiamo provengono dalla necessita' di rappresentare numeri comunque grandi e di avere delle regole per operare su di essi.
Quindi univocita' e possibilita' di rappresentare in modo comodo, meccanizzato (mi ricordo ancora le lacrime per imparare le tabelline, soprattutto quella del 7). Che cosa significa questo modo di fare automaticamente delle operazioni che difficilmente uno saprebbe giustificare ? Significa che questo enorme progresso di strumenti espressivi, non concettuali (perche' il concetto di numero l'avevano anche gli Ebrei, c'e' il Libro dei Numeri che inizia con la numerazione delle varie famiglie, dinastie, tribu'), questa possibilita' di dominare con strumenti codificati, con regole che si possono si' giustificare, ma che il bambino applica senza saperlo fare, ha tutto un aspetto formativo che e' l'educazione al linguaggio preciso, all'espressione precisa e al rispetto delle regole.

APPENDICE 2

IL SIMBOLO

Ins.A: Penso che il discorso della simbolizzazione deve continuare per tutto il ciclo, per far vedere che i segni usati sono strumenti per rappresentare non solo dei concetti (ad esempio i numeri) ma anche le operazioni sui simboli (operazioni aritmetiche), che possono sostituire le operazioni concrete sugli oggetti. E' un argomento trasversale, un grande capitolo che dobbiamo sempre tenere presente a partire dal bambino di prima, che comincia a scrivere dei segni per rappresentare le quantita', fino alle rappresentazioni geometriche o al diagramma di Eulero. Stamattina in quinta parlavamo dei quadrilateri. Partendo da una generica figura con 4 lati avevamo seguito la strada di fare richieste via via piu' restrittive, arrivando al quadrato che risponde al massimo delle richieste. Per raccogliere queste considerazioni avevamo usato il diagramma di Venn. Gli anelli che entrano uno nell'altro e si intersecano non erano solo uno specchietto appiccicato li', ma qualcosa che tornava comodo, uno schema che era il simbolo di tutto il lavoro fatto prima, per sintetizzarlo.

-Ins.B: Quando avevo la prima, mentre i bambini imparavano a scrivere, chiedevo loro di scrivere per esteso anche i numeri. Ad esempio facevo scrivere la data in parole. Intanto ogni giorno i bambini staccavano dal blocchetto del calendario un foglietto che veniva incollato fino ad averne tanti in fila in successione, in modo che si vedesse l'ordine dei numeri. Un bel giorno i bambini hanno cominciato a chiedere: possiamo scrivere la data nell'altro modo? e: perche' i numeri si possono scrivere in due modi diversi? Io mi ricordo che in quella circostanza i bambini mi hanno indotta a fare un'intera lezione sul simbolo, usando anche espressamente la parola simbolo, cosa che non avrei osato programmare.

-Ins.C: I bambini hanno proprio bisogno di punti di riferimento concreti, se riescono a fare un lavoro un po' piu' astratto e' perche' hanno la capacita' di far riferimento all'esperienza. Invece incontrano piu' difficolta' i bambini che vorrebbero usare subito i simboli (forse perche' a casa vedono il fratello maggiore) e per questo stentano a riferirsi alla propria esperienza quotidiana. Io faccio una lotta con questi bambini perche' usino stecchini, cannucce, biglie, per cercare delle soluzioni ai problemini, anche molto semplici.

-Ins.D: Certe volte basta anche solo cambiare una parola: al posto di segmento dire stecchino, nella mente del bambino si allaccia qualcosa.

-Ins.A: Non sempre basta la materialita' degli strumenti per aiutare quelli che fanno fatica. I piu' brillanti se in un problema non capiscono qualcosa non si lasciano spaventare dal testo, ma provano, con i disegni, con gli stecchini, ecc., mentre quelli che hanno piu' difficolta', anche se hanno davanti vari materiali, non riescono a tradurre concretamente quello che indica il problema.

-Ins.D: Io mi chiedevo: ha senso insistere che i bambini schematizzino sempre con un disegno un problema, anche quando sono capaci di risolverlo?

-Ins.B: Perche' invece non chiedere che facciano il disegno proprio quando non sanno risolvere il problema, cioe' come strumento di aiuto, non perche' lo vuole la maestra?
Io penso che dipenda dai bambini: ci sono quelli per i quali non c'e' disegno che tenga, se non vedono li' i tre oggettini non riescono, altri usano le mani, altri immaginano gli oggetti; io troverei fruttuoso lasciare loro tante possibilita'. Mi ricordo che in prima alcuni bambini andavano a prendere la tabella che avevamo costruito con i foglietti del calendario e si ponevano delle domande: oggi ne abbiamo 8, vuol dire che dal I del mese sono passati 8 giorni, da domenica che era il 3 quanti giorni sono passati? E prima che arrivi la prossima domenica quanti giorni mancano? E oggi che giorno e' della settimana? Dobbiamo andare a teatro il giorno 23, quanti giorni mancano?
Avevano preso l'abitudine di muoversi sul calendario per fare questi conti, alcuni andavano a prenderselo, altri che avevano disegnato la linea dei numeri per terra preferivano andare a saltellarci sopra e fare i conti cosi'.

-Ins.B: Secondo me schematizzare con un disegno e' utile come passaggio alla simbolizzazione; infatti ad un certo punto il disegno non basta piu', ad esempio per rappresentare quantita' piuttosto grandi, e i bambini si vedono costretti a trovare un nuovo modo simbolico di rappresentarle.

-Ins.E: L'altro giorno un bambino di seconda contava con l'ausilio di scatolette e gettoni, facendo molta fatica. Abbiamo cominciato con i gettoni: 1, 2, 3, ..., 10. Ogni decina veniva inserita in una scatoletta. Poi gli ho chiesto di contare 40 gettoni. Cominciamo: 1, 2, 3, ..., 10: I scatoletta; 11, 12, 13, ... ,20: II scatoletta; 21, 22, 23, ..., 30: III scatoletta. Ad ogni decina gli facevo delle segnalazioni: sembrava che avesse capito. Allora gli ho chiesto di contare 40 gettoni da capo: 10, 20, 30 (tre scatolette), poi ha aggiunto un gettone, dicendo: 40.

-Ins.F: Forse a volte occorre lasciar sedimentare le cose; il bambino diceva 10, 20, 30, ... perche' si era innescato un meccanismo che serviva solo per andare avanti di 10 in 10, qualunque cosa lui toccasse. Invece per dire 41, 42, ecc. bisogna saper controllare la classificazione: queste scatolette le classifico tra le decine, i gettoni tra le unita', quindi non li posso contare insieme; e' un aspetto simbolico molto delicato.
Inoltre a me sorge il dubbio che anche la presenza di strumenti materiali non risulti adeguata per agganciare l'interesse del bambino. A volte basta cambiare lo strumento, oppure fornirne tanti, finche' il bambino trova quello che gli chiarisce tutto. Per esempio gli si poteva chiedere di fare un salto per ogni gettone e di scrivere il numero corrispondente, chissa', forse gli sarebbe risultata piu' evidente la differenza tra contare di uno in uno e contare di dieci in dieci.

-Ins.F: In questo ordine di idee, per presentare ai ragazzi

situazioni che siano significative e quindi concrete per loro mi viene in mente che ad Usmate, presso il Centro Polivalente, si propone ai ragazzi con handicap medio-gravi un laboratorio di falegnameria. Ad esempio se un ragazzino deve costruire un attaccapanni, deve cercare un modo per stabilire di che lunghezza farlo. Se prende una corda per misurare il muro a cui si deve appendere l'attaccapanni e se ne serve per misurare il legno, ha utilizzato un simbolo, perche' la lunghezza della corda sta al posto della lunghezza del muro.
Questo e' gia' un primo passo; e' stata fatta un'operazione ad un certo livello simbolico corrispondente ad un confronto tra grandezze, indipendentemente dai simboli numerici, perche' occorre chiedere qualcosa che abbia significato per il ragazzo. Puo' darsi che procedendo nell'intervento qualche soggetto arrivi ad utilizzare anche il numero come un linguaggio, avendolo agganciato ad un lavoro significativo per lui.

APPENDICE 3

MATEMATIZZAZIONE DELLA REALTA'

(Operazione mentale che si realizza con l'astrazione, la simbolizzazione e l'impiego dei simboli per la deduzione)

-Ins.A: Introdurre il numero attraverso la classificazione, didatticamente, costituisce una semplificazione o una complicazione?

-Ins.B: Io non uso introdurre la rappresentazione di operazioni di tipo insiemistico, invece mi riferisco alle operazioni che i bambini fanno concretamente, ad esempio in prima elementare aggiungere e togliere e' una cosa che fanno tranquillamente, quindi simbolizziamo questo tipo di operazioni semplicemente col piu' e col meno. Piu' e meno tra numeri, ma a partire da questioni concrete incontrate tutti i giorni.

-Ins.C: Anch'io in genere non faccio un lavoro specifico sugli insiemi, tranne nel caso in cui si vogliano rappresentare piccole classificazioni, ad esempio e' comodo raggruppare le figurine in vari modi. A me sembra una forzatura introdurre l'insiemistica, infatti un bambino che cosa se ne fa di quei cerchietti? Non e' che in realta' poi li utilizzi.
Mi e' capitato di osservare una bambina figlia di miei conoscenti: le era stato chiesto di fare l'unione di due insiemi, uno costituito da un fiorellino, un dado, un pesciolino, l'altro costituito da una stella e dalla luna; per lei questo compito aveva meno senso che non pensare: qui ci sono tre oggetti, li' ce ne sono due, faccio tre piu' due, e fa cinque oggetti.

-Ins.B: Io trovo che l'operazione di classificare esplicitamente e' difficile in I elementare. Ho visto certi bambini che nei primi giorni di scuola sapevano operare abbastanza bene con i numeri; ad esempio sapevano dirmi che, date sei figurine, quella che viene dopo e' la settima; oppure dicevano: sono sette, se ne metto ancora una fa otto; oppure sapevano contare, sapevano associare la parola giusta al numero di oggetti; tuttavia questi stessi bambini mostravano una difficolta' maggiore a classificare, a trovare criteri diversi per classificare insiemi di oggetti eterogenei, ecc.

-Ins.C: Ho visto in molte classi che si parte con questo lavoro del raggruppare, cercare le caratteristiche, alla fine si tolgono le caratteristiche, resta solo che gli oggetti ad esempio sono tre e si arriva al numero. Io ho notato che e' un po' una forzatura, si annoiano su questa cosa, perche' loro sanno gia' che sono tre.

-Ins.A: Dopo l'introduzione dei numeri naturali bisogna richiamare l'attenzione sulle proprieta' delle operazioni, che sono poi quelle che ci consentono di fare le operazioni in colonna. Nel calcolo orale, su cui sto lavorando molto, queste proprieta' si usano moltissimo nei modi piu' vari, perche' i numeri vanno scomposti, commutati, ricombinati, ecc. Non ho mai dato le definizioni, pero' ho attirato l'attenzione dei bambini sulle modalita' di lavoro utilizzate spontaneamente da loro stessi.

-Ins.B: E' importante raccogliere queste indicazioni senza la pretesa che tutti gli insegnanti debbano fare allo stesso modo; basta sapere che una data modalita' e' stata un riferimento, un punto significativo per i bambini. In sintesi si tratta di mettere a fuoco le proprieta' delle operazioni, che saranno esattamente messe a tema poi nel calcolo letterale nelle medie.

-Ins.C: L'altro grosso scoglio e' l'impatto con le grandezze, che cosa e' grandezza e che cosa no. Quando introduciamo la misura facciamo un passaggio nuovo, il passaggio dalla manipolazione di grandezze all'utilizzo di numeri; si tratta di tradurre la risoluzione di un problema a due differenti livelli. Ad esempio se ho due sferette e se (per qualche motivo) ho bisogno di sceglierne un'altra il cui peso sia equivalente alla somma dei pesi delle prime due, posso disporre su di un piatto di una bilancia le due sferette e cercarne una che messa sull'altro tenga i piatti in equilibrio.
Un'altra modalita' potrebbe essere quella di catalogare tutte le sferette in base al loro peso; allora dalla somma dei pesi delle prime due sferette ottengo l'informazione che mi consente di cercare le sferetta richiesta, senza bisogno di usare la bilancia. In questo modo ho usato il simbolo numerico (ottenuto con l'operazione di misura) insieme con le operazioni sui numeri che consentono di dedurre le informazioni richieste.

-Ins.A: Si possono guidare i bambini a capire che i numeri ci servono in modo diverso a secondo della domanda che poniamo alla realta'.
A proposito delle grandezze mi e' venuta questa idea. Adesso ho una quinta elementare, e il lavoro sulle grandezze era stato preparato in terza e quarta, pero' per fare un gran ripasso avevo detto ai bambini di guardarsi un po' intorno a casa e di fare la raccolta di tutte quelle etichette che si trovano sui prodotti (biscotti, filo, ecc.) dove sono riportate delle misure. Poi abbiamo fatto un elenco dei nomi degli oggetti considerati, incollando a fianco il cartellino ritagliato con la misura. Dopodiche' chiedevo qual era la grandezza considerata in quell'etichetta: ad esempio se c'era scritto 125 mg, voleva dire che era stato misurato il peso; oppure era indicata la lunghezza del filo, la capacita' della bottiglia della Coca Cola, e cosi' via. Poi per richiamare l'attenzione sul fatto che il numero non identificava in modo esauriente l'oggetto in questione, ma serviva ad indicare la misura di un certo tipo di grandezza, ho preso la scatola dei biscotti; se sull'etichetta c'e' scritto 100 g, quel numero indica il peso della sostanza contenuta; ma potrei dire qualcos'altro su questa scatola attraverso dei numeri, potrei misurare qualche altra grandezza relativa a questa scatola?
Sono usciti vari suggerimenti: posso misurare la lunghezza della scatola, per vedere se ci sta nell'armadietto; allora non mi interessano i 100 g, ma mi interessa dire che la scatola e' lunga 40 cm. Oppure mi puo' interessare sapere quanti biscotti la scatola puo' contenere, in pratica valuterei cosi' la sua capacita', non in litri ma in numero di biscotti che posso mettere dentro la scatola (un bambino suggeriva in semi di zucca, perche' noi abbiamo sempre tanti semi di zucca in classe). Di questo oggetto, la scatola di biscotti, potevo valutare tanti tipi di

grandezze, i numeri ottenuti servivano ogni volta per qualcosa di diverso.

-Ins.D: I bambini usano i numeri spontaneamente se sono posti in un contesto favorevole.
Io sono in una terza, alla fine del I trimestre in classe ho disposto un banco per l'esposizione di materiali eterogenei: una tanica da 5 l, delle bottiglie di plastica da 1,5 l, bottigliette varie senza indicazione, brocche graduate per l'acqua di quelle che si usano in mensa, infine delle strisce da 1 m. Per un paio di mesi ho lasciato in mostra questo materiale senza dire niente, in modo che i bambini lo utilizzassero liberamente negli intervalli. Un certo giorno io ho chiesto ai bambini che cosa si potesse fare con quegli oggetti. Sono emersi aspetti vari, che non mi sarei aspettata. Dato che in maggioranza gli oggetti erano contenitori di liquidi, io pensavo che tutti avrebbero parlato di capacita'. Invece ad esempio qualcuno ha detto: io li peserei, pieni e vuoti. Mi sono stupita, perche' non avevo in classe la bilancia.
Ho anche chiesto come avrebbero potuto ordinarli dal piu' grande al piu' piccolo, ho visto che tendevano a prendere in considerazione solo l'altezza.
Altri prendevano due bottiglie da 1 l, e due da un decilitro, per farne due clessidre, infatti volevano vedere in quanto tempo quelle di sopra si svuotavano in quelle di sotto; avevo capito che volevano confrontare i tempi, anche se non si sapevano esprimere. Ero contenta, perche' avevo proposto questo lavoro proprio per evitare fissita' funzionali: ad esempio della tanica si puo' dire non solo che ha una capacita' di 5 l, ma anche che e' alta 30 cm, e anche che piena d'acqua pesa poco piu' di 5 kg. Quel banchetto adesso e' un po' meno misterioso, sopra abbiamo scritto: "Confronto e scopro"; sul tavolo ho disposto dei fogli su cui i bambini possono annotare le loro scoperte.

APPENDICE 4

ALCUNE QUESTIONI DIDATTICHE

- Ins.A: Mi sembra che talvolta, dopo ben 5 anni di scuola, i bambini abbiano appreso soprattutto dei meccanismi; qualche anno fa la situazione era un po' differente.

-prof.Manara: La matematica in se' e' chiara e semplice, ma il vissuto dal quale il bambino e ognuno di noi dovrebbe estrarre il concetto e' complesso. Non e' strano che per certe menti sia difficile l'astrazione, cioe' la costruzione del concetto che inquadra l'esperienza: ci sono temperamenti artistici o magari emotivamente instabili che vedono tutta la sfaccettatura complessa, mentre per altri la semplificazione e' facile e gratificante.
I bambini della Scuola Elementare sono sottoposti a bombardamenti ed appelli di tipo emotivo e visivo, di fantasia e cosi' via, quindi il discorso semplice e luminoso che conduce al concetto diventa molto piu' difficile che per noi quando eravamo bambini. I bambini di oggi sono intossicati dai messaggi che fanno appello alla fantasia e all'emozione. Navigano in un mare di caos in cui e' difficile dare una linea razionale. Pero' si puo' sperare che avvengano queste maturazioni che a volte sono improvvise nei bambini, come talvolta avviene per i piu' piccoli riguardo al parlare.
Paradossalmente spesso dico che noi siamo rovinati da 2000 anni di Talete, cioe' di proporzionalita': abbiamo istintivamente la commisurazione della proporzionalita' quantitativa, cosa che non e' realistica, perche' la natura lavora a salti: la goccia che fa traboccare il vaso, o il sassolino che provoca la valanga; il vero schema secondo me dovrebbe essere questo, ma e' molto piu' comodo lo schema di proporzionalita'.
Tuttavia quasi tutti i giorni ci accorgiamo che avvengono queste organizzazioni nelle testa dei bambini, ma anche nella nostra: libri che mi parevano difficilissimi mesi dopo diventano comprensibili, evidentemente inconsciamente la mia testa lavorava o altre esperienze si collegavano senza che me ne accorgessi; anche il lavoro di tipo addestrativo quindi non e' buttato via.

-Ins.A: Mi e' arrivata in terza una bambina che aveva imparato i numeri con i regoli in colore: ogni volta che io dicevo "7", lei traduceva "rosso". Questa bambina era bloccata nel suo apprendimento dagli strumenti che aveva usato.

-prof.Manara: Queste trovatine di tipo didattico, fatte in buona fede anche da noi, che crediamo di rendere le cose piu' facili, creano fissita' funzionali: finiamo per legare il concetto a quella trovata di carattere didattico che abbiamo escogitato in buona fede per presentarlo, in modo tale che il discorso a noi sembra facile e facilitato dalla nostra trovata, che per loro diventa un legame. La matematica, la geometria e' piena di queste cose: purtroppo le figure vengono fatte sempre allo stesso modo, per cui al ragazzo riesce difficile staccare il concetto dalla figura, legarsi solo alle parole. Se lei va a leggere il libro di Staudt "Geometrie der Lage", tradotto in italiano da Pieri (e' ormai introvabile, ma nella biblioteca di matematica l'abbiamo),

Staudt, dice nella prefazione il traduttore, ha lavorato 10 anni per togliere ogni parola inutile e permettere l'assoluta chiarezza dei concetti, e soprattutto faceva lezione senza lavagna, perche' sosteneva che la figura blocca la generalita' del concetto.
Dobbiamo quindi stare all'erta per verificare che il concetto acquisti la piu' grande generalita' possibile, non legata alla sua realizzazione concreta. Il fatto e' che dobbiamo partire da una concretezza: partiamo col fare contare le caramelle, poi i gettoni, poi i sassolini, ecc. Io stesso mi sono accorto che nel corso di Geometria Differenziale ho stabilito delle fissita' funzionali: i concetti per alcune persone sono rimasti legati al modo in cui li ho presentati.
Bisogna che capiamo quali sono i punti fondamentali di cio' che insegnamo, affinche' la cornice con cui presentiamo il quadro non entri a far parte integrante del quadro. Ad esempio il cerchio goniometrico e le trovatine utilizzate per decenni per insegnare i concetti di Trigonometria, che sono i piu' semplici di tutti, entrano a far parte del quadro; capita che all'Universita' arrivino persone che non sanno definire le funzioni trigonometriche se non facendo un discorso lunghissimo con cose accessorie che non centrano nulla, a cui hanno strettamente legato i concetti fondamentali.
Ho letto in qualche rivista di didattica lo slogan: "se faccio capisco". Si potrebbe rivoltarlo in questo modo: se capisco, faccio bene, ma se non capisco non ci riesco. E' un discorso analogo a quello dell'insegnamento della matematica per problemi: e' chiaro che il fare se e' far bene richiede di capire le cose come stanno; ma allora il lavoro didattico deve mirare alla ricerca della struttura, della gerarchia logica delle cose. Se faccio capisco: ma cosa capisco? Che devo fare prima una cosa dell'altra, ovvero devo stabilire una gerarchia logica, cioe' capire quali sono i concetti portanti e quali sono portati. Se faccio, capendo quello che devo fare, allora capisco. Un po' di anni fa c'era il discorso della geometria sperimentale. Anche qui, se si isola nel lavoro didattico un momento pur necessario, permettendogli di invadere l'orizzonte del lavoro, si deformano le cose.
Il vero problema e' come fare l'altro salto ancora piu' duro di far lavorare i simboli, cioe' ottenere una struttura logica che lavora.

-Ins.B: Le stesse esperienze fatte in una situazione, con certi metodi, hanno dato certi risultati, con altri metodi ed in altre situazioni ne hanno dati altri. Da parte nostra si tratta di farci coraggio e di vedere quali cose sono riuscite meglio e come le abbiamo fatte.

-prof.Manara: Infatti certe cose sono banali per noi perche' le usiamo da tanti anni, ma per i bambini no. Si tratta di vedere come scatta nella mente del discente il concetto, la presa della struttura logica. Io ho captato molte esperienze, poiche' voi mi avete portato molti esempi delle trovate dei ragazzini; si tratta in aggiunta di far loro prendere coscienza delle procedure di deduzione, dominarle in modo cosciente ed esplicito, invece che arrivarci per caso. Questo scavare nella consapevolezza dei propri atti razionali, questo e' il lavoro che dobbiamo far fare: la tua risposta e' giusta, perche'?

-Ins.B: Vorrei raccontare una cosa che e' successa stamattina in classe. Sto insegnando nell'area linguistico-espressiva: mi e' capitato di presentare tre periodi che avevano espressione diversa, ma lo stesso significato, poiche' dalle loro osservazioni speravo che si rendessero conto che il contenuto era identico. Una bambina ha chiamato a il primo periodo, b il secondo, c il terzo, poi ha detto: - a=b, b=c, percio' a=c. -Che cosa hai fatto? -Ti ricordi quando avevi raccontato la storia di Socrate, che tutti gli uomini sono mortali, Carlo e' un uomo, Carlo e' mortale? E' un po' la stessa cosa.

-prof.Manara: Vede, a nostra insaputa certe strutture di carattere logico e linguistico si formano, e addirittura in un aggancio tra la concettualizzazione, la simbolizzazione, e l'uso della sintassi del simbolo. La cosa piu' interessante e' non solo l'esistenza in questa testolina della proprieta' transitiva della relazione di uguaglianza, ma che l'abbia espressa richiamando una proprieta' formale del simbolismo che noi utilizziamo.
Infatti noi dobbiamo arrivare non solo ai concetti, ma alla formulazione precisa dei concetti, e possibilmente alla utilizzazione delle strutture sintattiche dei simboli che abbiamo utilizzato per esprimerci, per arrivare alla conclusione: e' quello che facciamo con la matematica, quando tiriamo le somme facciamo una deduzione, cioe' arriviamo alla conseguenza necessaria attraverso il meccanismo dei simboli che abbiamo usato. Coi numeri romani questo sarebbe piu' difficile, ecco l'influenza del simbolo sulla concettualizzazione e sulla deduzione. I vari livelli si mescolano, ma noi dobbiamo saperli analizzare distinguere ed estrapolare al momento giusto.
Una volta abbiamo litigato con una professoressa che dava giudizi negativi sulla lettura di certi numeri da parte di una ragazzina: la lettura era sbagliata, ma non e' che in quella testolina non ci fossero ragionamenti; le nostre convenzioni di scrittura sono per certi cervelli piu' complicate del giusto, ma e' importante capire qual e' il passo che quella persona non riesce a fare.
Tornando al discorso precedente, il fronte della concettualizzazione e dell'espressione e' unico (come ha ben verificato la dott. Davoli con un certo ragazzino, che e' migliorato anzitutto in italiano in seguito al lavoro svolto con lei in matematica), benche' il linguaggio matematico sia piu' astratto ed esigente e quindi particolarmente difficile per certi soggetti. Cio' non significa che questi soggetti siano totalmente deficitari, perche' gli aspetti di convenzione, di mancanza di ridondanza e di struttura simbolica giustificano la difficolta'. La matematica e' in un certo senso un aspetto esasperato dell'espressivita' precisa e logica.
Per concludere, mi pare che sia emerso ancora una volta che il discorso di concettualizzazione, di espressione, di coerenza espressiva e' unico nella formazione mentale, e' un dato da tenere presente indipendentemente dalla materia che si insegna; anche il discorso del fare deve essere inserito all'interno della razionalita' globale. La matematica ne costituisce un aspetto, con particolari difficolta' e particolari facilita', a seconda del punto di vista. C'e' la facilita' a mio parere evidente della semplicita' assoluta, che tuttavia e' difficile da conquistarsi, c'e' invece la difficolta' della convenzionalita' del simbolismo

che provoca in alcuni soggetti particolari disagi. E' un discorso questo che vorrei approfondire con qualche psicologo. Tutto il lavoro didattico puo' essere utile o puo' costituire un blocco, a seconda che sia mirato al dominio del simbolismo e della concettualizzazione, o che sia un addestramento che finisce per bloccare la possibilita' di uso degli strumenti concettuali.
Naturalmente i fenomeni psicologici sono complicati, non e' quindi escluso che la ragazzina che traduce "sette" con il colore "rosso" fosse gratificata dal compiacimento della maestra che aveva fatto questa trovata didattica, e che la maestra avesse insistito troppo sulla trovata stessa, dimenticando il secondo momento del lavoro, cioe' quello del distaccarsi dalla trovata didattica per arrivare alla generalita' del concetto.
Ecco perche' io dicevo: non voglio buttar via niente delle trovate didattiche che vengono esposte nelle varie riviste, o sui libri, siano frecce, diagrammi di Eulero o diagrammi ad albero od altro; vorrei pero' sottolineare il fatto che queste sono trovate di carattere didattico, che sono state inventate in qualche modo per facilitare i rapporti concettuali, i quali sono in realta' l'oggetto principale dell'insegnamento; l'oggetto principale non deve essere il diagramma ad albero, ma l'analisi logica della "classe"; se poi ci serviamo del diagramma ad albero, benissimo; ma ad un certo punto dobbiamo cercare di indovinare il momento del distacco. Se non teniamo presente questo discorso, noi di questi strumenti didattici facciamo dei legami e dei blocchi invece che degli aiuti. Siamo di fronte a classi che non sono omogenee, quindi trovare il momento mediamente valido non e' semplice.

-Ins.B: Spesso il lavoro e' fatto non solo dall'insegnante ma anche dai ragazzi, che suggeriscono determinate cose. Se il lavoro e' pensato dall'esterno e portato in classe a freddo penso che dia risultati diversi.

-Prof.Manara: Soprattutto se la proposta nasce spontaneamente dai ragazzi (come lei raccontava l'anno scorso dei suoi alunni che facevano il mercato, i conti ecc., cose che interessavano loro, in una realta' che provano gusto a manovrare) noi dobbiamo portarli all'inquadramento di carattere teorico, all'espressivita' convenzionale rigorosa, perche' c'e' anche questo aspetto. Anche Leonardo da Vinci si era fatto il suo privato simbolismo, anzi aveva interesse a non far conoscere le cose che faceva, e inoltre sbagliava i conti con le frazioni, perche' non voleva andare a vedere il lavoro di Luca Pacioli, voleva riinventarlo.
L'insegnante deve stare attento al livello concreto, che e' il piu' gratificante per gli alunni, ma deve portarli a livello logico, che e' riflessione, consapevolezza ed espressione precisa: sono questi i momenti importanti per la formazione. Quando il ragazzo dice: "e' come quando...", ha colto l'analogia, ha colto la struttura logica portante, ha colto il senso logico del discorso.

-Ins. C: Una questione che mi preme molto sorge quando si trovano dei bambini che, per quante esperienze siano condotti a fare, non afferrrano il concetto. In questo senso ho constatato molte volte che non il fare in quanto tale porta al concetto, ma il fare che viene dominato. Quando alla fine della prima e durante la seconda ho fatto un lungo lavoro di insacchettamento di chicchi per

introdurre unita' decine centinaia ecc., ho visto che non basta la manovra di questo materiale sia pure prolungata.
Io ho una sensazione di sconfitta nei confronti di quei bambini con cui non si riesce ad arrivare ad un punto di comprensione sicura, per cui alla fine e' come se apprendessero un meccanismo. Puo' essere utile lasciare decantare la questione per un po' di tempo, o e' meglio puntare su un meccanismo cosi' che non si scoraggino del tutto, e tener sempre viva la questione del ragionare che sta alla base?

-prof.Manara: Questa domanda coinvolge l'aspetto emotivo, che va valutato dall'insegnante riguardo al singolo allievo. Il discorso generale della decantazione e' invece molto importante anche nella mia personale esperienza. Il bambino, come ho detto anche per quanto riguarda il parlare, immagazzina tutta una quantita' di nozioni di relazioni ecc. e non le manifesta; ad un certo momento, quando noi ci siamo addirittura dimenticati le circostanze in cui le ha viste, le manifesta e le collega. Anche Emma Castelnuovo diceva che quando la sua classe non la seguiva su certi argomenti, lei li metteva da parte, ripromettendosi di riprendere quegli argomenti a distanza. Io stesso, quando scrivo i lavori, devo lasciarli nel cassetto qualche settimana, altrimenti mi viene quasi la nausea (quello che gli atleti chiamano superallenamento). Poi a distanza le cose si sono depositate e ci torno sopra. Come i sentieri di montagna, in cui si gira e si rigira e si vedono le cose via via da un punto di vista piu' alto.
Se invece si tratta di far sentire un bambino a suo agio all'interno di un determinato gruppo sociale, si possono buttar via momentaneamente i criteri didattici. Questi sono allora problemi di carattere psicologico.

-Ins. D: Lei ha toccato un tasto molto difficile per noi, quello degli stimoli che intontiscono i bambini di oggi e li rendono incapaci di concentrazione. Io noto anche una disparita' di provenienza sociale fortissima, non tanto materiale quanto culturale. Di anno in anno per me la difficolta' e' sempre maggiore: questi bambini non parlano con nessuno, non sono abituati alla chiarezza di linguaggio, ne' all'ordine.

-prof.Manara: Si parla tanto di inquinamento, ma i bambini di oggi vivono intellettualmente in una discarica di immondizie: devono difendersi dagli stimoli che ricevono.

-Ins. D: I genitori sono come gettonati dai loro bambini; anche a scuola i bambini pretendono di non fare fatica e di ottenere tutto come spingendo un bottone. Io sto molto attenta a non rispondere subito alle loro domande, ma a sollecitarli a cercare loro stessi la risposta. Spesso chiedo loro di scrivere le spiegazioni dei passaggi che hanno fatto, poi le rileggiamo insieme.

-Ins. B: Secondo me spesso i bambini si intendono meglio tra di loro: le spiegazioni che si danno talvolta sono meglio comprese di quelle degli adulti.

-prof.Manara: Io non volevo fare piccoli maestri succedanei del maestro vero: il fatto di scrivere, e poi si legge e discute quello che e' stato scritto, mi sembra un'altra cosa. Vogliamo arrivare all'educazione attraverso il possesso dei concetti e degli strumenti espressivi, quindi l'insegnante deve sempre tenere le redini della situazione: la spiegazione fatta da un bambino dovrebbe diventare un'ulteriore educazione di colui che spiega. Il discorso didattico che io sto portando avanti da molti anni e' questo, che l'insegnamento deve essere tale che porti ad una appropriazione dei concetti, tanto che uno potrebbe pensare quasi di avere inventato lui le cose che ha capito. Ovviamente ci sono modi personali di ciascuno, e approfondimenti che vengono nel tempo. Anch'io ho imparato a livello addestrativo cose che ho capito e approfondito solo in seguito, il giudizio e' doppiamente difficile sia per questa evoluzione mentale nel tempo, sia per queste modalita' che ciascuno ha di appropriarsi delle strutture concettuali. Questo itinerario puo' essere spiegato anche alle famiglie, i genitori piu' di buon senso potrebbero accettarlo.

-Ins. C: Io (ho una prima) in tutte le assemblee spiego questo itinerario, e incontro due difficolta': la prima e' che io non posso preventivare con certezza i tempi che ogni bambino o la classe intera impieghera' per un certo percorso; la seconda, che i genitori hanno una paura folle dell'errore del bambino: tu non hai capito niente; mentre per me l'errore e' una possibilita' di esercitare quella razionalita' di cui si parlava prima. Per me e' stato molto utile in questi anni imparare una modalita' di correzione per cui ritiro il compito e non scrivo: e' sbagliato, si fa cosi', ma ad esempio: li' c'e' un errore, trovalo. Accettare questa modalita' presuppone che anche nel genitore ci sia sempre la speranza che il bambino possa arrivarci, che se ha fatto un passo questo sia totalmente suo.

-prof.Manara: Riemerge ancora la necessita' di spiegare agli adulti l'itinerario didattico, di fare un lavoro educativo nei riguardi degli adulti. Ora che abbiamo raccolto un certo numero di osservazioni scritte che presentano le vostre esperienze e critiche, un adulto di buona volonta' che voglia collaborare potrebbe capire le idee che sono emerse qui per spiegare questa linea didattica.

-Ins. B: Durante la prima e seconda elementare gli adulti sono abbastanza fiduciosi, poi interviene la paura della scuola media, delle prove d'ingresso, delle segnalazioni speciali ecc.

-prof.Manara: Io penso che una strada per tranquillizzare i genitori esista. Il materiale che puo' emergere dalle nostre discussioni puo' essere molto interessante.

Ins. D: Il discorso fondamentale secondo me e' quello del linguaggio. Noi alle volte su una storiella letta insieme passiamo un pomeriggio: possibile che i genitori non possano dedicare un po' di tempo a parlare coi loro figli? Ricostruire la logica di un film visto insieme, il significato delle parole, e' un lavoro sulle strutture del pensiero.

-prof.Manara: Una mamma protestava con la maestra perche' non insegnava la logica; "ma io insegno a ragionare", rispondeva l'insegnante... La vostra testimonianza e' fondamentale: ho bisogno che il mio discorso sia convalidato dalle persone che lavorano nella scuola. Da vent'anni combatto contro il formalismo, contro l'insiemistica, contro la logica formale, non perche' siano sbagliate, ma perche' sono a un livello che i bambini non possono apprendere con un'appropriazione razionale. Questo problema non si pone solo alle elementari, ma in tutti gli ordini di scuola. Da 30 anni sono contrario ai semestri: come si puo' fare analisi matematica sei giorni alla settimana e dopo tre mesi fare l'esame? Occorre un tempo per assimilare i concetti. A tutti i livelli ho una concezione del modo di capire le cose, della struttura della nostra mente e del modo di insegnare che non e' condivisa; tuttavia le vostre testimonianze mi confermano su questa mia linea di pensiero: per questo e' fondamentale l'aiuto di chi puo' testimoniare un'esperienza viva di lavoro in classe.