Maria Cantoni 2018

GeoGebra: strumento di grandi potenzialità.

Sintesi del lavoro proposto nel primo nucleo del corso di aggiornamento COMUNITÀ DI PRATICA CON IL SOFTWARE GEOGEBRA per esemplificarne le potenzialità.

Poiché quest'anno 2017-18 i corsi 'propedeutico', 'avanzato' e 3D sono frequentati quasi dalle stesse persone, abbiamo privilegiato la pagina grafica con l'introduzione della geometria elementare trattata nella scuola media (e speriamo di aver davvero condiviso spunti e idee utili al lavoro in classe): un percorso per costruire nuove figure a partire dai punti, dalle rette, dalle circonferenze ed evidenziare nuove proprietà delle figure stesse e nuove relazioni tra di esse; conquistare nuove conoscenze geometriche operativamente, con manipolazioni dirette. Un'introduzione di questo tipo permette di evidenziare le grandi potenzialità di un software tecnologicamente avanzato come GeoGebra (che noi consideriamo "in mano" agli allievi soprattutto!).

Ogni insegnante potrebbe cercare, con la propria cultura e personalità, la strada da intraprendere per integrare gli strumenti tradizionali con l'uso di uno strumento come GG che aiuta a far prendere coscienza di manipolazioni concrete sugli oggetti della geometria, organizzando per quanto possibile i risultati in termini di "trasporti rigidi" di particolari caratteristiche adatte a facilitare una prima astrazione verso le forme. Il percorso che esemplifichiamo apre inoltre con naturalezza la prospettiva della geometria dal punto di vista delle Trasformazioni.

Una costruzione GG è qualcosa di più di un disegno: ci obbliga a partire da alcuni oggetti geometrici e a collegarli tra loro secondo modalità ad essi pertinenti per ottenere oggetti geometrici complessi; non rispettare le proprietà geometriche degli oggetti in gioco fa decadere la costruzione desiderata. Mentre un disegno su carta ci mostra una situazione geometrica 'statica', una costruzione di GG può essere modificata in tutti i modi che non violino le relazioni stabilite tra gli oggetti che la compongono; dinamicamente ci mostra tutte le situazioni geometriche permesse dalle relazioni poste. In termini più astratti, possiamo dire che la costruzione mostra la classe di equivalenza delle figure compatibili con le condizioni poste (poste esplicitamente o sottintese nelle proprietà degli oggetti).

La sequenza della costruzione evidenzia gli "oggetti liberi", quelli che non dipendono da oggetti introdotti nei passi precedenti, dagli altri; il trascinamento degli oggetti liberi deforma la figura trasformandola gradualmente in altre equivalenti (cioè compatibili con le relazioni geometriche poste nella costruzione) permettendo agli studenti, nei casi fortunati, di cogliere ciò che rimane invariato (e che non si era intravisto prima): nuove proprietà geometriche scoperte con l'esplorazione. Nei casi sfortunati, la figura perde nel trascinamento quelle proprietà che credevano di averle dato e li costringe a rivedere la costruzione.

Oltre ai vantaggi della dinamicità, la pagina grafica di GeoGebra possiede un'altra caratteristica importante. Man mano che realizziamo una nuova costruzione, che riteniamo utile e della quale abbiamo verificato la correttezza, possiamo aggiungerla come nuovo strumento ed usarla esattamente come fosse uno degli strumenti standard. In questo modo possiamo produrre oggetti sempre più complessi con uno sforzo minimo, senza dover ricostruire ogni volta ciò che ci serve, a partire dagli oggetti semplici: punto, retta, circonferenza; si pensi, per analogia, all'uso dei sottoprogrammi che si fa in informatica quando si vuole realizzare un software complesso.

Durante i nostri incontri, pensiamo che tutti si siano resi conto della facilità dell'uso più immediato della pagina grafica in cui gli oggetti, per esprimere il loro essere tali, devono essere costruiti, ribadiamo, a partire dalle loro proprietà geometriche. Quello che otteniamo è più esattamente una classe di oggetti, alcuni dei quali saranno quelli che ci interessano nel contesto. Ma vediamone gli sviluppi che abbiamo affrontato nel primo modulo.

1 Nel file "Premessa" abbiamo delineato un nostro approccio didattico: siamo partiti dall'osservazione della realtà concreta, l'abbiamo "portata in testa" prima come immagine e poi, poco per volta, come insiemi di "oggetti" della geometria su cui ragionare. Il disegno diviene allora modello concreto in aiuto e supporto alle relazioni che mettiamo in atto nella situazione problematica a cui siamo di fronte e che vanno chiarite facendo evolvere tutto il complesso degli strumenti con cui elaboriamo.

<u>Il punto</u> sulla pagina grafica è come quello che faremmo su di un foglio con la matita, ma ha già in sé la variabilità del suo "essere un punto generico" manipolabile nella relazione con l'ambiente.

Anche il "segmento" (la retta, la semiretta) si esprime con due punti come sulla carta con la matita, ma evidenzia subito che i due punti rimangono indipendenti l'uno dall'altro. Il segmento che li lega consente inoltre *la rotazione* di uno di essi rispetto all'altro oppure, manipolato come oggetto "segmento", può esprimere nella pagina grafica tutta una classe di segmenti. Il movimento "virtuale" che possiamo apportare non è però casuale, ma è una traslazione (che per ora lasciamo nel significato del parlare comune come per la rotazione). Vedremo l'importanza didattica di questa scelta degli elaboratori del software.

La circonferenza è determinata da due punti, quindi da un segmento, e il software consente di usarla anche per riprodurre tale segmento a distanza, come facciamo con un compasso quando riportiamo la lunghezza di un segmento.

Già con i pochissimi strumenti a cui abbiamo accennato, con GG possiamo cominciare a "trasportare" sulla pagina grafica quella realtà che manipoliamo concretamente e per fare ciò "stilizziamo" gli oggetti dell'esperienza sensoriale in oggetti geometrici astratti, liberandoli dalle caratteristiche eterogenee del mondo reale e dotandoli della generalità dei modelli (qualche anno fa si sarebbe detto "archetipi").

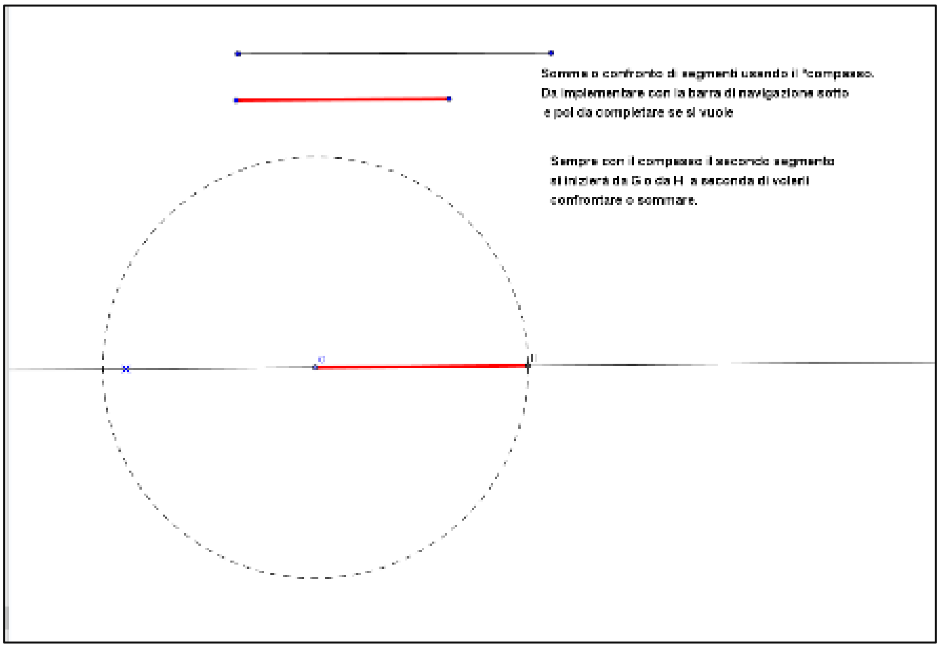

Figura 1

L'abbiamo visto nei primi due file sul confronto di segmenti e sul confronto di angoli (considerato come un dato acquisito poiché non abbiamo avuto il tempo di "costruire", (Figure 1, 2)).

Volutamente abbiamo “tenuto vicini” la retta e l’angolo come base del discorso anche nel considerare poligoni come intersezione di angoli.

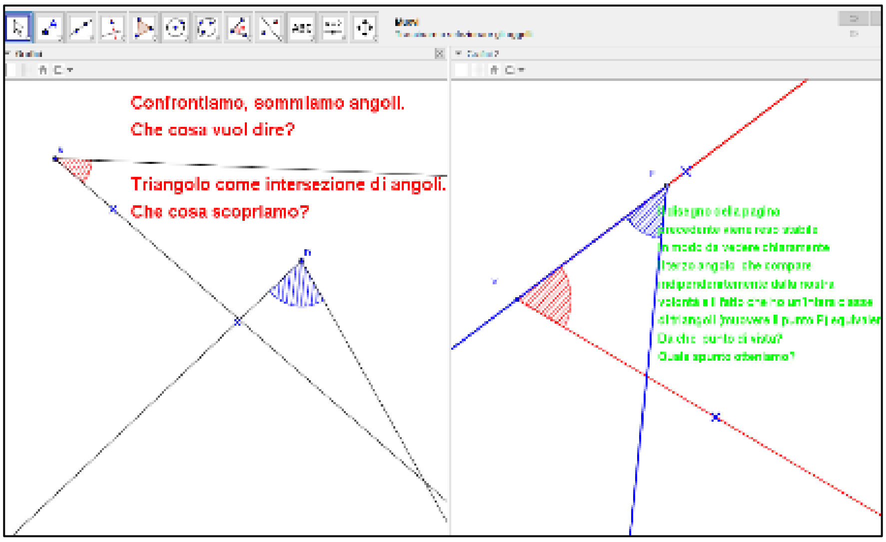

Figura 2

2 Il confronto tra forme, <u>i criteri di uguaglianza dei triangoli</u>, la disuguaglianza triangolare, **il triangolo equilatero** come immediata costruzione a partire dalla circonferenza e dalle rette e nuovo “strumento” concettuale che abbiamo raggiunto.

- Il riferimento alla realtà.
  Il gioco con la carta. Pensando ad un vero gioco della simmetria con la carta, dall’analisi dei risultati di relazioni particolari tra gli oggetti che la piegatura (asse) concreta realizza, abbiamo tratto: un’<u>uguaglianza come sovrapposizione</u> e per lo stesso motivo l’**angolo retto** che diviene un oggetto fondamentale, <u>le rette perpendicolari</u>. A questo punto la parola simmetria perde la sua genericità e assume il significato di particolare **legame** tra oggetti. Essa è uno **strumento nuovo** che potremmo sfruttare e che ritroviamo come modello di tante situazioni concrete ……
- La sua espressione virtuale sulla pagina grafica.
  Lavorando graficamente con segmenti, circonferenze e punti (abbiamo iniziato semplicemente a manipolare un “oggetto molto semplice”, un triangolo) riportiamo graficamente sulla pagina il risultato della manipolazione. Sottolineiamo nuovamente la variabilità della situazione (nella manipolazione virtuale) che mantiene necessariamente le relazioni tra gli oggetti in gioco perché l’abbiamo costruita mettendole in atto (Figura 3). Vale la pena di notare la particolarità dei risultati se l’oggetto iniziale ha dei punti o meno sull’asse di simmetria.
- Se tutto ciò è stato da noi stessi “costruito” e quindi frutto di un processo intenzionale compreso come tale, esso diviene patrimonio di esperienza e possiamo automatizzare la procedura per andare oltre. Essa ci permetterà di proseguire in esplorazioni più complesse.

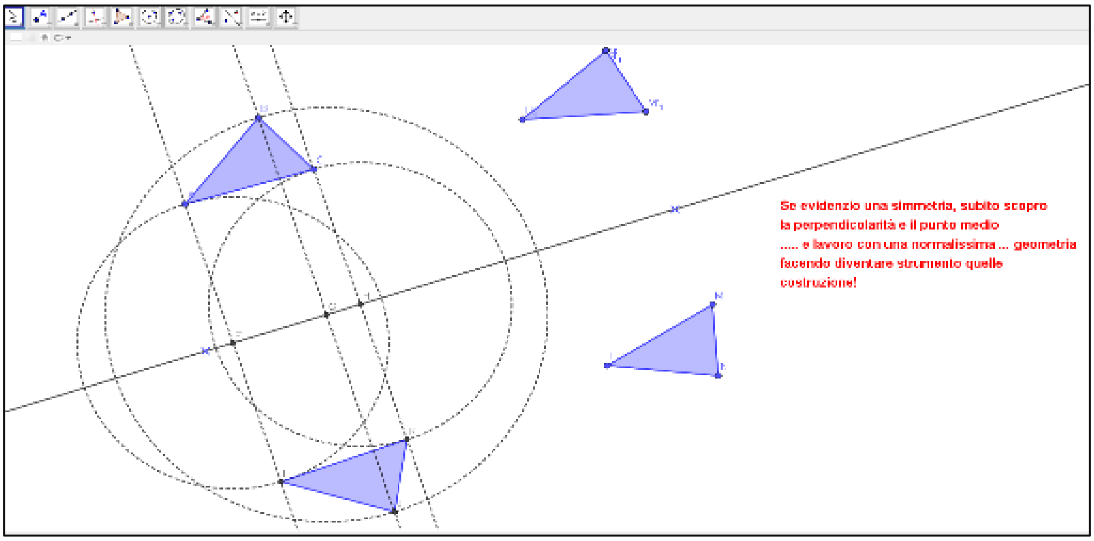

Figura 3

- **Automatizziamo allora la simmetria assiale**, la relazione di cui siamo divenuti consapevoli.
- Ritorniamo alla costruzione del triangolo equilatero e ritroviamo in esso le stesse relazioni della manipolazione precedente, lo completiamo descrivendo anche il secondo triangolo. Sottolineiamo la simmetria della situazione e da essa ricaviamo "il punto medio" di un

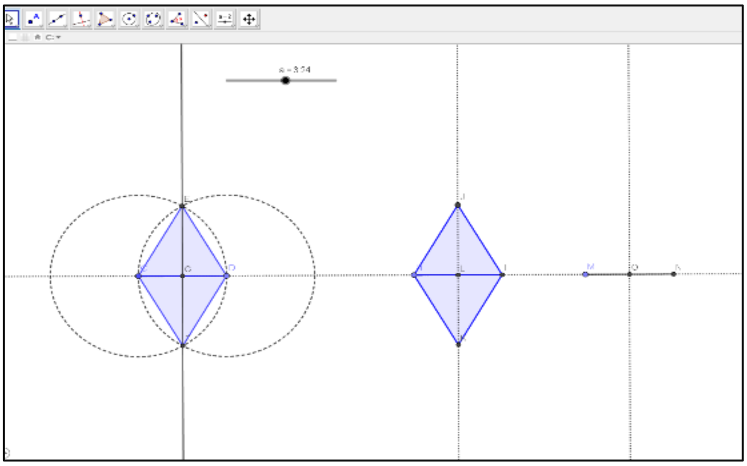

Figura 4

segmento e il suo" asse" (retta perpendicolare passante per il suo punto medio) come costruzioni che si avvalgono di tutto ciò di cui ci siamo appropriati sopra (Figura 4).
- **Il triangolo equilatero si impone come strumento fondamentale. Possiamo automatizzare il punto medio di un segmento e il suo asse.**
- Abbiamo lavorato con GG con pochi "oggetti": punti, circonferenze, rette, ma abbiamo elaborato nuove costruzioni fondamentali che pongono in relazioni tali oggetti in modo ricco ed originale. Noi e GG abbiamo ampliato le nostre possibilità di indagine e riflessione.
- In un suo menu a tendina per esempio, con pochi passaggi, <u>il simmetrico di un oggetto</u> compare automaticamente e dopo l'operazione siamo sicuri che tra i due esisteranno le relazioni che li caratterizzano, che possiamo far emergere se necessario.
- Di nuovo con GG possiamo scoprire e generalizzare una caratteristica fondamentale dell'asse di un segmento (e la "dimostriamo"): ogni punto dell'asse di un segmento è

equidistante dai suoi estremi (Figura 5). Allora questo punto genera con gli estremi un triangolo isoscele! **Il triangolo isoscele** diviene allora **un nuovo strumento** di elaborazione in tanti problemi in cui l'uguale distanza con due punti permette di scoprire un punto particolare di una situazione problematica (l'abbiamo visto in un problema, sono infiniti i problemi che con tale osservazione ci possono portare lontano!). Mettiamo in evidenza anche che due punti di una circonferenza e il suo centro generano sempre un triangolo isoscele.

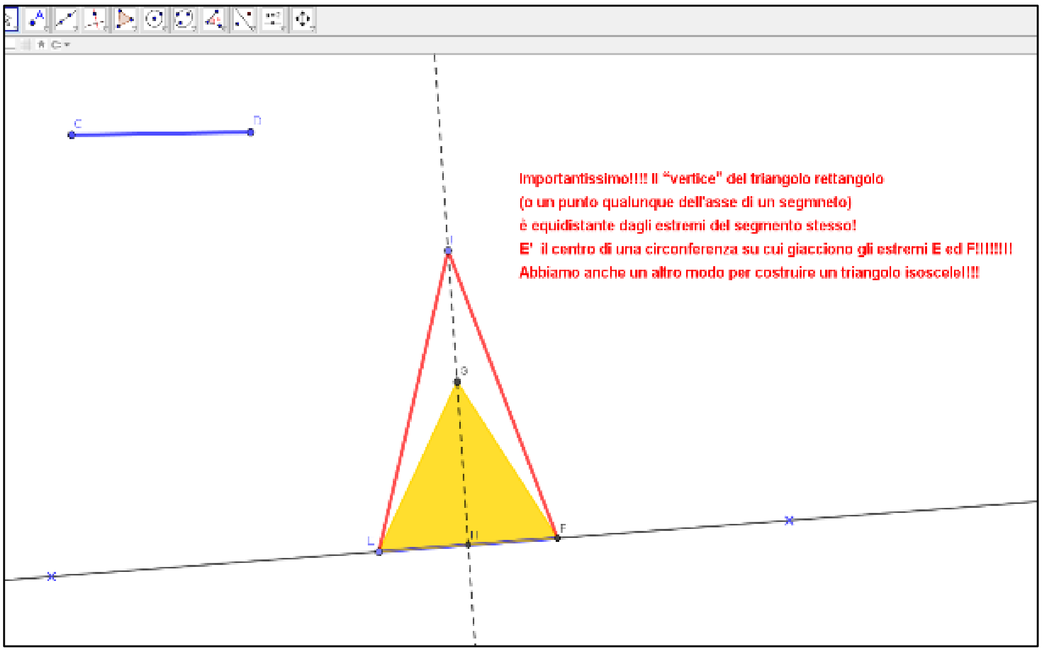

Figura 5

3 Le rette si incontrano o non si incontrano. Guardiamo da vicino gli angoli che esse determinano quando si incontrano. GG permette di evidenziare e generalizzare la situazione (Figura 6) in modo da renderla **"una visione stabile".**

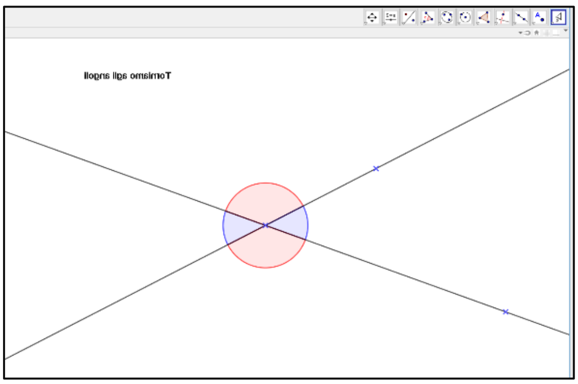

Figura 6

- Portiamo sulla pagina grafica e generalizziamo con le nostre manipolazioni anche ciò che succede se poniamo una simmetria tra un punto e il suo corrispondente rispetto ad un

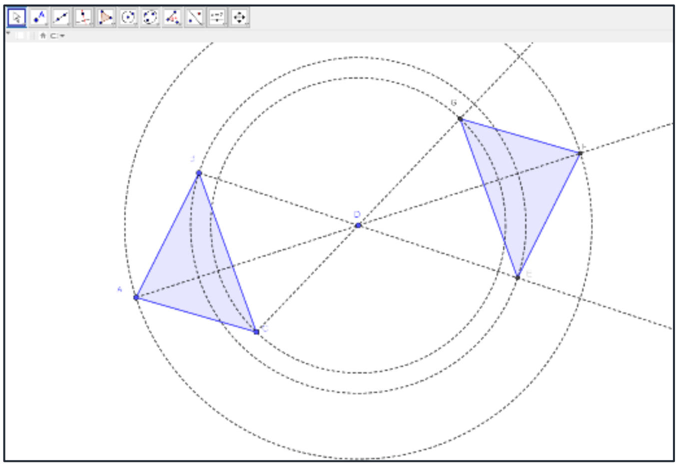

Figura 7

punto dato. L'abbiamo visto in particolare con un triangolo (Figura 7). La posizione del punto dato genera situazioni interessanti e quando il punto giace su di un lato del triangolo la "trasformazione" genera un quadrilatero con gli angoli opposti e i lati opposti uguali! Tutto ciò con carta e matita non sarebbe un'esperienza possibile e per noi sarà invece la base di molte concettualizzazioni!

- **Automatizziamo anche questa situazione** che chiameremo simmetria centrale (Figura 8).

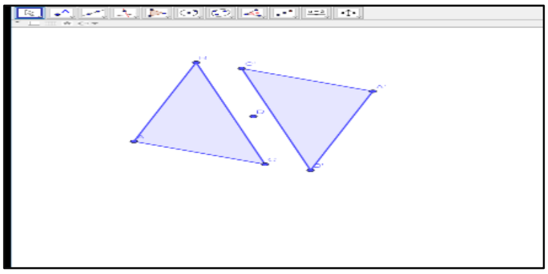

Figura 8

- Portiamo sulla pagina grafica un'altra manipolazione concreta molto comune prendendo come campione di situazione concreta ciò che anche a scuola facciamo con due squadrette che "scivolano" l'una sull'altra, manipolazione di cui vediamo il risultato, senza essere molto coscienti di ciò che realmente succede (Figura 9).

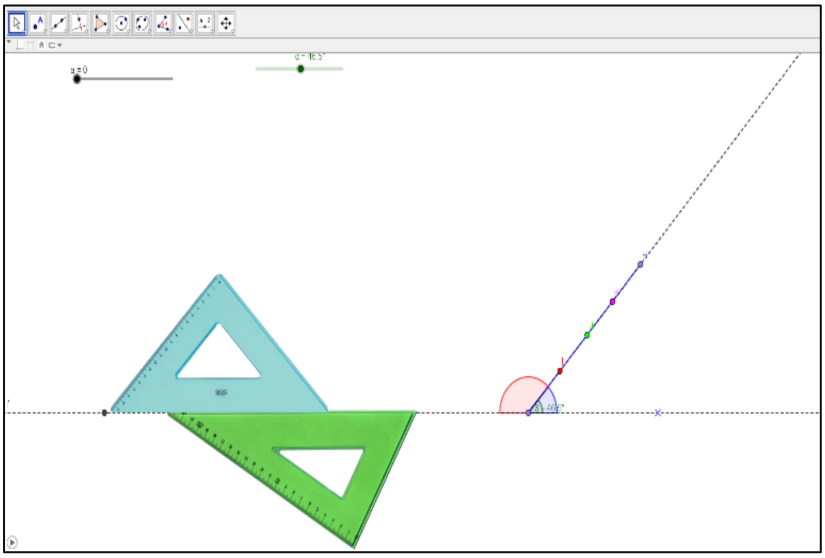

Figura 9

Se ne prendiamo coscienza osserviamo che intenzionalmente facciamo sì che tutti i punti di una squadretta si muovono facendo un cammino comune che mantiene la reciproca distanza degli stessi e che ciò è determinato dalla squadretta "ferma come una rotaia" di supporto. Ma ciò che è sostanziale è **l'angolo** che le due squadrette formano l'una rispetto all'altra essendo un movimento tra due oggetti rigidi. Traduciamo con GeoGebra la situazione sostituendo alle squadrette punti e rette e "denunciamo" la successiva posizione reciproca degli stessi, che alla fine ci porta a considerare le successive posizioni della retta che si muove mantenendo gli angoli.

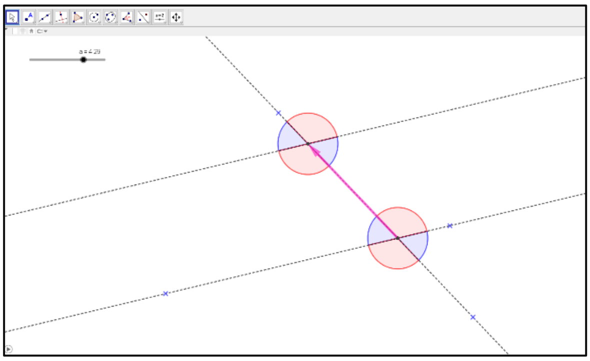

Figura 10

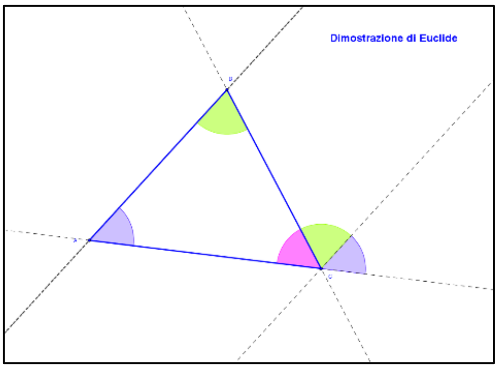

Figura 11

Rispetto alla retta fissa le rette che si vengono a formare costituiscono un insieme di oggetti equivalenti. Possiamo dire che il loro insieme determina la **"direzione"** delle stesse rispetto alla retta fissa. Abbiamo operato mantenendo volutamente l'angolo (la direzione), il verso e la distanza. Parliamo allora convenzionalmente di **traslazione e automatizziamo** la possibilità di tracciare rette della classe all'occorrenza (Figura 10).

Abbiamo sostanzialmente introdotto le rette **parallele** che chiariremo meglio nel seguito. Per ora possiamo intuitivamente accettare che la permanenza di quegli angoli (guardiamo l'insieme nel suo complesso) impedisce che esse si intersechino e che il rilevare quegli angoli ci mette nella condizione di richiamare la stessa direzione. L'analisi di tutta questa situazione è fortemente supportata dal software attraverso le potenzialità di variabilità e manipolazione che abbiamo già abbondantemente usato.

- Da qui diviene semplice arrivare alla **somma degli angoli interni di un triangolo** e proprio, se vogliamo, anche con la dimostrazione di Euclide, soprattutto se ricordiamo ciò che abbiamo messo in evidenza all'inizio e, come dice Euclide, richiamiamo la relazione tra rette e angoli pensando che figure rettilinee sono quelle comprese tra rette, vale a dire (Figura 11): figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro ……
- Queste ultime conquiste ci portano ad accostare le forme, ed in particolare i quadrilateri, prendendo coscienza delle loro caratteristiche poiché le abbiamo raggiunte da situazioni analizzabili e generalizzabili con le manipolazioni virtuali. Dalle manipolazioni virtuali quindi con la variabilità che esse suggeriscono possiamo incominciare <u>a domandarci i perché e a dimostrare.</u>
- **Il parallelogramma.** Intersechiamo due coppie di rette parallele ed evidenziamo il quadrilatero che esse determinano (Figura 12). È formato da due triangoli quindi la somma dei suoi angoli interni vale 360°, il quadrilatero deriva dalla simmetria centrale di un triangolo, ha quindi gli angoli opposti uguali ed ha i lati a due a due uguali (già lo sapevamo), ma ora possiamo aggiungere a due a due paralleli, e ciò nasce come un miraggio dall'aver semplicemente intersecato due coppie di rette parallele: gli angoli a due a due uguali ed il parallelismo sono legati necessariamente!

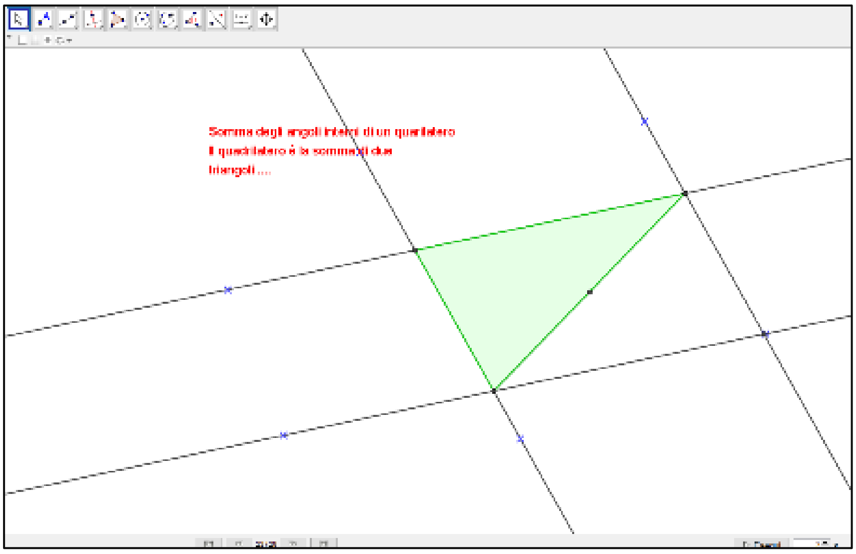

Figura 12

Il parallelogramma generico che abbiamo costruito sarà una situazione iniziale per poi derivarne quelli particolari manipolando virtualmente la configurazione. Esso assume forme che richiamano immagini note: rettangoli, rombi, quadrati.
Rendiamo più intenzionali le manipolazioni aiutandoci con "il compasso".

Esso può permetterci di evidenziare segmenti uguali e di riconsiderare le caratteristiche dei poligoni che ne nascono alla luce di tutti i precedenti strumenti concettuali raggiunti. Potremo notare in particolare, dopo aver espresso le proprietà del quadrilatero che chiameremo rettangolo, che i suoi vertici giacciono su di una circonferenza di cui le diagonali sono diametri. Un triangolo rettangolo è sempre inscrivibile in una semicirconferenza! Il legame tra un triangolo rettangolo e una semicirconferenza non è solitamente sottolineato nella scuola secondaria di primo grado perché non è facile dedurlo da considerazioni più convenzionali, ma è una relazione molto importante ed utile in tante situazioni problematiche (Figure 13, 14, 15).

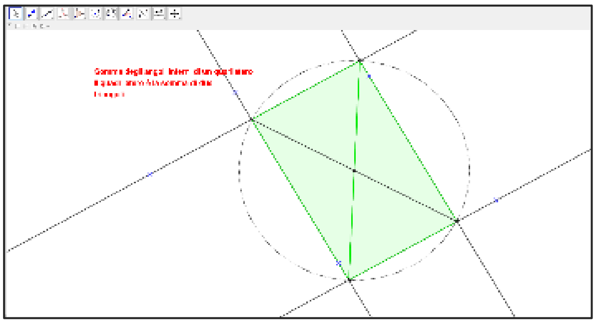

Figura 13

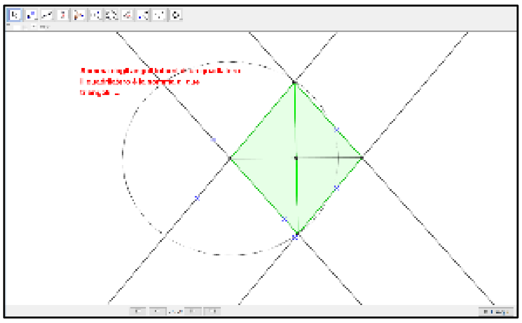

Figura 14

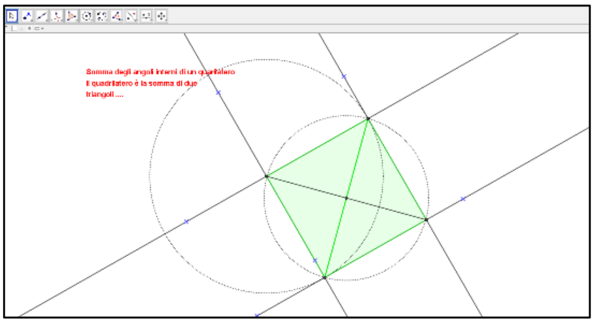

Figura 15