(Maria Cantoni, gennaio 2013**) Sulla soluzione di alcuni problemi "assistita" dai moderni software per la didattica.**

L'invenzione del software Cabri-Géomètre, ideato e realizzato alla fine degli anni Ottanta da Franck Bellemain e Jean-Marie Labord presso l'Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées, Laboratorio di ricerca dell'Università Joseph Fourier di Grenoble, ha certamente dato un valido supporto al nostro lavoro matematico in classe che, quando lo si è ritenuto opportuno, si è avvalso di una variabilità grafica straordinaria (e non solo) come suggestivo modello della situazione problematica da studiare. L'impostazione didattica della geometria delle "trasformazioni" ha favorito ed esaltato il ruolo del disegno che, nella sua adattabilità, ha saputo dare suggerimenti nell'ampliamento continuo del quadro teorico iniziale.

Nell'intento di mostrare in atto una "geometria" costruita giorno per giorno, portiamo ad esempio il cammino risolutivo di alcuni problemi impostati negli anni novanta con Cabri-Géomètre e oggi con il supporto di *GeoGebra* (il software matematico sviluppato dal prof. Markus Hohenwarter all'Università Johannes Kepler di Linz (Austria) e dai suoi collaboratori).

Il primo problema presentato è divenuto anche esempio di percorso logico, analizzato con Carlo Felice Manara nell'intervento: "C. F. M. e Maria Cantoni. *Logica e realtà virtuale in geometria.* Nuova Secondaria, La Scuola, Brescia, dicembre 1999". Esso inizia così: "*Si intende qui dare un contributo di riflessione al problema della utilizzazione ragionevole dei sussidi didattici che compaiono sempre più numerosi sul mercato.….*"

I problemi.

1 Sono date in un piano due rette *r* e *s* parallele tra loro, ed un punto P interno alla striscia determinata dalle rette stesse. Determinare una circonferenza *k* che passi per P e sia tangente ad entrambe le rette date.

Data la semplicità del problema, ma anche la possibilità di sfruttare Cabri in modi diversi, vorremmo lasciare agli insegnanti la ricerca dei possibili comportamenti, sollecitando tuttavia una riflessione sui riferimenti culturali che si mettono in atto nei diversi approcci alla macchina. Ciò ha permesso di fare alcune riflessioni del tutto imprevedibili sulla didattica della matematica che forse vale la pena di considerare. Si vuole qui evidenziare proprio l'apporto generale di idee che ne è derivato.
Disegnate le due rette, gli allievi individuano con facilità la circonferenza tangente dopo aver tracciato una generica perpendicolare alle stesse con i necessari riferimenti alle conoscenze. Permettendo CABRI di "muovere" la circonferenza con un movimento "virtuale" lungo la striscia formata dalle due rette parallele, gli operatori "vedono" facilmente che il centro *O* di tale circonferenza percorre una ben particolare retta parallela alle precedenti e che, ad un certo punto, la circonferenza va a passare per il punto *P* (figura 1). Il raggio della circonferenza è determinato, il problema è allora di trovare il centro *O'* sulla retta, compatibile col punto *P*. La soluzione nasce nel modo seguente.
Dopo una breve riflessione ritornano al punto di partenza, tracciano una circonferenza tangente, la retta dei centri e la retta parallela per *P*, segnando "il" punto *P'*, una delle due intersezioni della retta con la circonferenza (quello che sarebbe andato in *P* con la traslazione vista precedentemente).

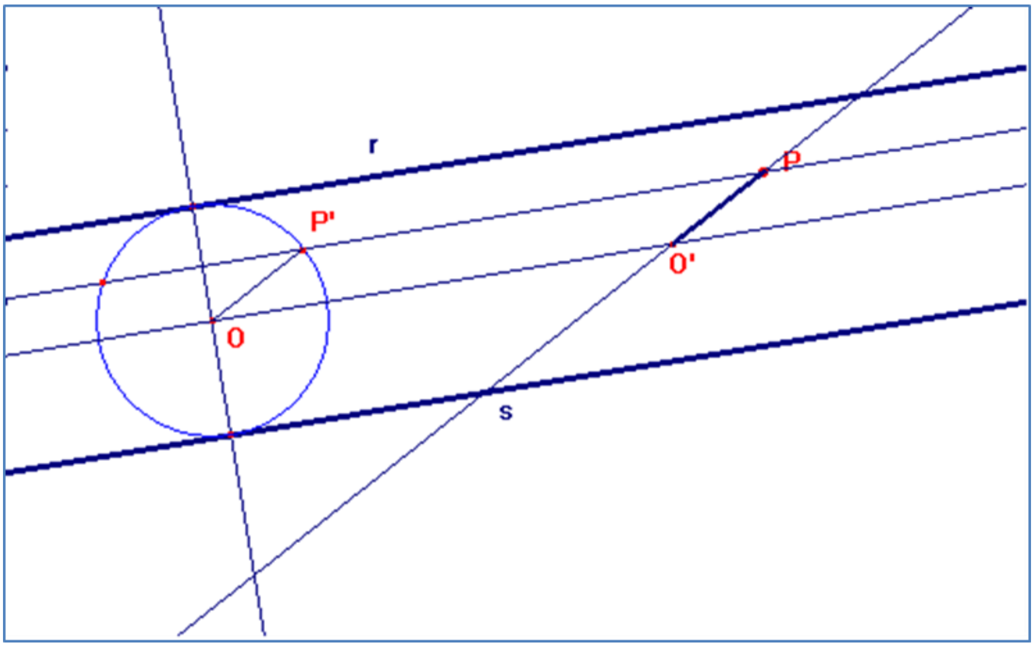

Figura 1

Tracciato il segmento *OP'*, mandano per *P* una parallela ad *OP'*. L'intersezione della stessa con la retta contenente *O*, fornisce *O'*. Sul momento non rilevano la seconda soluzione, ma (cosa interessante) non sentono il bisogno di tracciare la circonferenza avendone individuato il raggio e il centro.

Alcuni pensieri di allora.

A questo punto non è possibile far a meno di domandarsi come CABRI abbia influito nel portare suggerimenti e quale sia stato effettivamente il percorso logico messo in atto. Da un certo punto di vista pare che i discenti, quasi spontaneamente, siano stati sollecitati logicamente ad usare il procedimento classico di analisi il quale parte dalla soluzione come già acquisita. Tuttavia non si può pensare che, di fatto, questo sia un comportamento spontaneo; infatti si direbbe che a questa età si procede piuttosto per tentativi ed errori. Qui il tutto pare sia stato indotto da **un procedimento grafico** che porta alla soluzione prima di aver permesso <u>troppi passi erronei facilmente devianti</u> e che comunque non si sostituisce al discente nei riferimenti concettuali. Pensiamo, infatti, che il comportamento logico ricordato solitamente venga indotto dall'insegnante nella scuola superiore e non con facilità: lo si offre ai discenti nella dimostrazione di teoremi o nella soluzione di problemi elementari, e si ritiene che essi sappiano ragionare quando sono in grado di riprodurlo senza particolari difficoltà. Tuttavia in tal modo non ci si può rendere conto se e quando questi itinerari predeterminati portino ad un vero possesso dello strumento logico che vi soggiace. Nella situazione precedente, l'atto dinamico, che ha sollecitato i discenti alla ricerca della soluzione, permette di rendere cosciente il processo. Sarebbe infatti molto facile innescare una discussione motivata su di un comportamento che l'allievo ha messo in atto autonomamente. Può forse essere questa una strada per migliorarne la possibilità di appropriazione.
Da un secondo punto di vista pare però che gli allievi abbiano palesemente fatto ricorso ad uno spostamento rigido ben visibile, ad una **traslazione.**
Qui nasce il problema della didattica della geometria, in particolare della "geometria delle trasformazioni". Quando si inizia già alle elementari a far fare concretamente al bambino esperienze di traslazioni, rotazioni, simmetrie ecc., azioni utilissime ai fini della presa di coscienza di una realtà dinamica con cui fare i conti, lo si induce poi a modellizzare su di un foglio, con gli oggetti della geometria, i risultati delle azioni eseguite; ciò è forse necessario a tale livello di

apprendimento. Ma la mente di colui che usa tali strumenti non è mai portata a riflettere sulla reale concettualizzazione della sistemazione logica della “Geometria delle trasformazioni”.
Il CABRI, come di solito viene sfruttato, potrebbe accentuare tale confusione, non solo, potrebbe introdurne una ulteriore tra spostamento e movimento. Pensiamo invece che proprio sfruttando CABRI e la sua possibilità di azione “virtuale”, tanto efficace da suggerire soluzioni originali e sollecitare percorsi logici imprevedibili, si possa introdurre la geometria come strumento di lettura della realtà, passando dalla realtà delle cose alla realtà delle idee.

Una riflessione attuale.

Dopo aver lavorato per tanti anni con i software didattici che hanno introdotto la possibilità di una variabilità praticamente infinita di disegno relativamente alla configurazione su cui ragionare, mi sono resa conto che, a partire da una didattica che permetta agli allievi di costruirsi i propri percorsi di conoscenza, i nuovi strumenti possono dare un grandissimo aiuto alla costruzione del sapere. Come già detto altrove continuo a sostenere la non validità di vedere lo strumento come una lavagna dinamica di effetti semplificati. Proprio per questo motivo è con molto piacere che riporto una riflessione di tempi antichi (che oggi forse non potrebbe neppure più essere fatta, ma che era piaciuta molto a CFM) derivante dall’uso di uno strumento convenzionale ed antichissimo come il compasso, ma conseguente alla didattica di cui sopra. Spero che oggi gli allievi di allora vivano pienamente, ma criticamente nell’attualità e ne siano i protagonisti.

Rifacendosi a disegni precedentemente eseguiti, si nota che nella traslazione non ci sono punti che non si muovono. Nella rotazione c’è il centro, ma quando vi punto il compasso, la punta dello strumento ruota su se stessa. Devo considerare quindi il centro punto fermo o che ruota su se stesso? La risposta che ho trovato è che quello che dico punto e che rappresento in un certo modo, non è concreto, ma corrisponde ad una mia idea che esce dalle “regole” e dalle “costrizioni” fisiche del reale e dai comportamenti che assumerebbe se fosse la punta del compasso o la parte della lancetta che la dirige. Quindi nella rotazione, il punto *O*, il centro, resta fermo.

2 **Sono date in un piano due rette *r* e *s* che si intersecano in un punto *V*, ed un punto *P* interno all’angolo convesso determinato dalle rette stesse. Determinare una circonferenza *k* che passi per *P* e sia tangente ad entrambe le rette date.**

Se in classe accanto alle isometrie si è parlato di omotetia, il problema viene risolto come il precedente con una certa facilità, ma necessita di richiamare tutto ciò che intorno alle circonferenze è stato introdotto. Passo passo si evidenzia come la conoscenza non può essere episodica e fatta di regole studiate a memoria. Ecco in figura 2 quello che un software permette di esprimere:

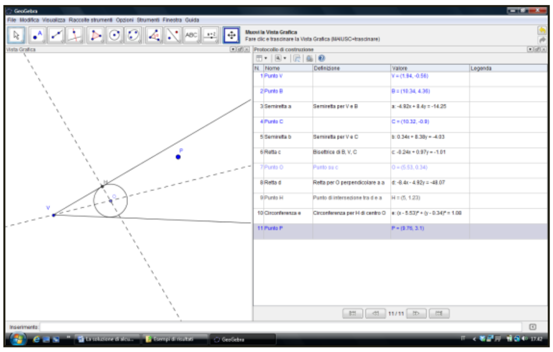

Figura 2

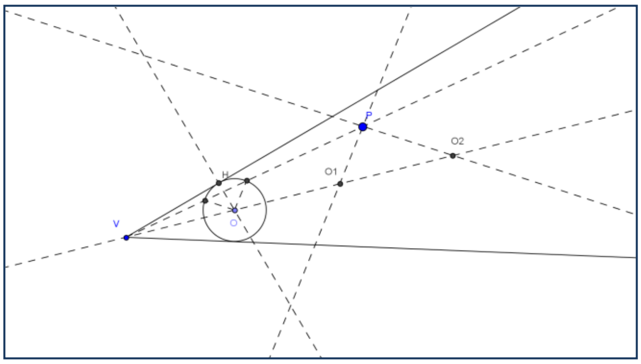

Figura 3

Accanto al disegno iniziale che porta ad <u>una</u> circonferenza tangente (diciamo una falsa posizione che poi aiuterà?) posso esprimere anche la sequenza delle azioni che hanno permesso di raggiungerla. Ma, muovendo il centro *O* della circonferenza, potrò generare le altre possibili e, tra di esse, anche quelle che conterranno il punto *P*. Per risolvere devo entrare, come nel problema precedente, nella "classe di equivalenza" delle circonferenze tangenti alle due rette e sapere come trasformare il punto *O*.

3 Per dividere un campo (che modellizziamo con un rettangolo) in due parti uguali si consiglia: pianta un palo in un punto qualunque del campo e congiungi il palo con i vertici. Le parti di opposto colore sono equivalenti . È un buon suggerimento?

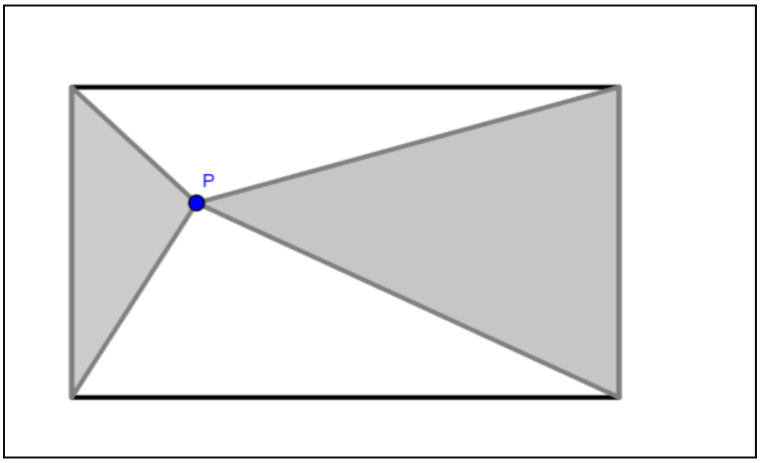

Figura 4

I ragazzi provano a muovere il punto P che si trascina tutta la struttura e lo portano sul lato superiore del rettangolo (figura 5).

Ecco così è facile! e sentono anche il bisogno di tracciare la perpendicolare per fare vedere perché è facile, ma poi dicono, ma questo è un caso particolare! Muovono allora il punto P e lo trasportano sull'altro lato (figura 6).

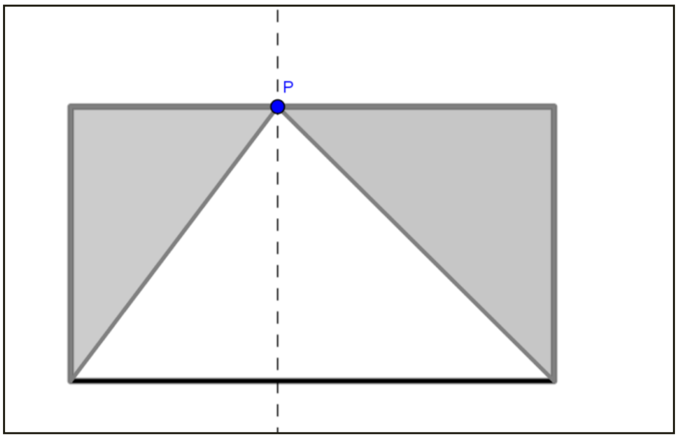

Figura 5

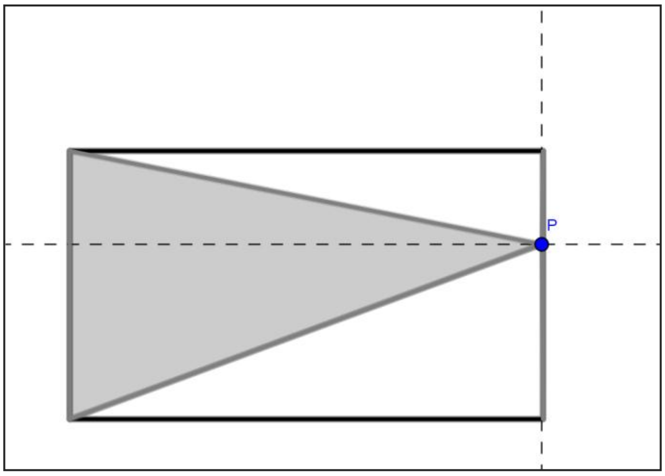

Figura 6

Anche così il caso è semplice, ma è di nuovo particolare! E nuovamente tracciano la seconda perpendicolare per chiarire.
Ritornano allora a portare il punto P all'interno del rettangolo trascinando con sé tutta la struttura costruita fino ad allora (figura 7).
Ma abbiamo così la soluzione in mano! Le rette prime evidenziate offrono la dimostrazione!

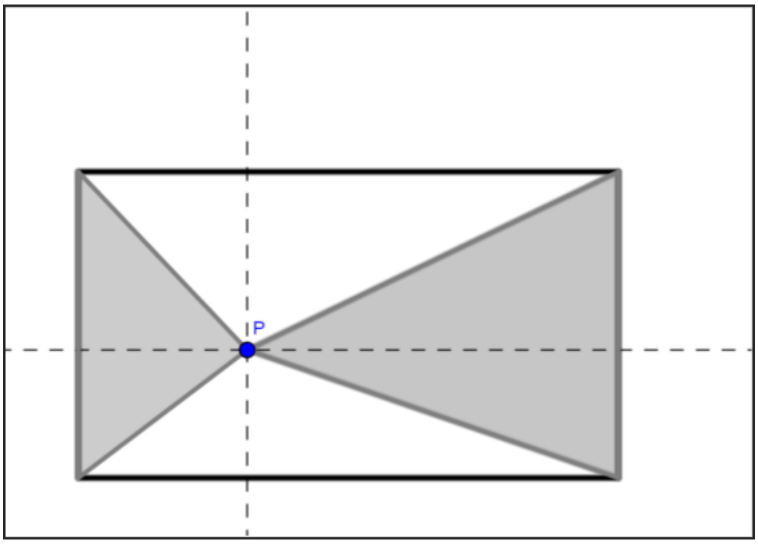

Figura 7

Questo è ciò che è realmente accaduto in classe. Si potrebbero fare mille riflessioni e soprattutto: come avrebbero risolto con carta e matita? Il software ha dato troppi suggerimenti o è un modo nuovo per poter entrare in problematiche anche più complesse?