Conf. alla Università di Milano

CARLO FELICE MANARA

Probabilità e mondo reale.

1.- Il concetto di 'probabilità' è oggetto di analisi e di discussioni da quasi due secoli, cioè, si potrebbe dire, dall'epoca nella quale ha avuto per la prima volta una trattazione matematica che voleva essere rigorosa.

A ben guardare, non si tratta di un fenomeno raro nella storia della scienza, anzi, vorremmo dire che si tratta di un fenomeno abbastanza consueto, che avviene spesso quando si incomincia a voler rendere rigoroso un concetto che è preso dalla vita quotidiana e che viene designato da un termine del linguaggio comune.

Infatti ben raramente un termine cosiffatto ha un significato assolutamente univoco; di conseguenza nascono frequentemente delle discussioni (spesso molto lunghe e quasi sempre inconcludenti) a proposito del 'vero' significato del termine. Infine, dopo un periodo di analisi critica, si giunge ad una assiomatizzazione rigorosa, che precisa un significato del termine e permette una formalizzazione matematica e la conseguente costruzione di una teoria.

Questa risulta essere coerente e rigorosa, ma viene abitualmente giudicata come 'astratta' da quegli scienziati che vorrebbero utilizzarla per la conoscenza del mondo reale; rinasce quindi il problema a proposito della adeguatezza della teoria per la descriziona del mondo reale, e della sua fecondità per fornire dei modelli plausibili della realtà.

E' questo un cammino che è stato percorso press'a poco da molte teorie fisico - matematiche; si potrebbe addirittura dire che un cammino cosiffatto è stato percorso nei secoli anche dalla Geometria, che oggi, come è noto, ha acquisito un duplice assetto : l'uno è quello di una teoria puramente astratta, un sistema ipotetico-deduttivo; l'altro è quello di una teoria fisica che si occupa dei corpi estesi, per quanto attiene alle proprietà della mutua posizione, della forma e della grandezza dei corpi stessi.

Si potrebbe dire che le discussioni a proposito del concetto di probabilità hanno seguito press'a poco lo schema che abbiamo or ora riportato. Dall'inizio degli studi si è passati alla formalizzazione matematica che risale sostanzialmente all'epoca di Laplace; in seguito si è giunti all'assetto attuale che si potrebbe descrivere nel modo seguente : dal punto di vista astratto la teoria della probabilità di presenta come un capitolo particolare della teoria della misura, teoria che può essere assiomatizzata in vari modi, ma che non presenta altri problemi oltre a quelli classici, che riguardano la coerenza delle teorie astratte della Matematica. Ma da un altro punto di vista sussistono ancora i problemi che si riferiscono alla possibilità di descrivere certi aspetti della realtà con una teoria che possa essere chiamata, con un minimo di attendibilità, una teoria della probabilità. In questo ordine di idee si pone pure il problema della assiomatizzazione, ma in modo del tutto diverso da quello che si riferisce all'aspetto precedente.

In questo caso infatti la assiomatizzazione consiste nella enunciazione di certe ipotesi che vanno intese questa volta come delle proposizioni che abbiano le seguenti qualità : anzitutto rendano abbastanza bene gli aspetti della realtà che vengono ritenuti 'evidenti'; in secondo luogo siano atte a fare da fondamento per certe deduzioni le quali servano per dare un modello attendibile della realtà.

Per quanto riguarda l'aspetto puramente astratto della teoria della probabilità, è chiaro che si possono dare molte assiomatizzazioni, le quali sono legate soltanto dalle clausola della assenza di contradditorietà; ci dispensiamo dal presentare una assiomatizzazione di questo tipo (Si veda per es. in (7) quella dovuta a Kolmogoroff).(1)

(1) I numeri tra parentesi quadre rimandano alla bibliografia che è in fondo al presente articolo.

Per quanto riguarda il secondo aspetto della teoria della probabilità vorremmo dire, schematicamente, che due tendenze nettamente diverse sono attualmente presenti e si dividono il favore degli studiosi; volendo designare in modo approssimativo queste due tendenze, potremmo utilizzare i vocaboli che sono abbastanza diffusi e che classificano i due atteggiamenti come 'teoria della probabilità oggettiva' e teoria della 'probabilità soggettiva'. Il lettore che voglia farsi un'idea delle argomentazioni che sono portate avanti dai sostenitori dei due atteggiamenti può far riferimento per es. agli 'Atti' della Tavola rotonda (pubblicati dalla Scuola di Statistiva della Università di Firenze) che si è tenuta a Poppi nei giorni 11 e 12 giugno 1966 (5).

Nel seguito ci limiteremo a fare qualche cenno a proposito del primo di questi atteggiamenti (quello che si potrebbe designare come di una teoria 'oggettivistica' della probabilità), e dedicheremo una maggiore attenzione alla esposizione della teoria 'soggettiva'. Vorremmo concludere che queste discussioni possono essere ritenute a prima vista anche troppo accese ed appassionate; ma l'impegno che gli studiosi mettono a sostenere i rispettivi punti di vista si giustifica presto quando si consideri che alla base delle discussioni stesse sta il fondamento in sede teorica e gnoseologica della Statistica e dei suoi metodi. Pertanto chi consideri anche in modo molto superficiale la importanza che la Statistica ha nella struttura della scienza di oggi arriverà facilmente a giustificare l'atteggiamento degli studiosi di entrambe le parti.

2.- Per quanto riguarda la definizione che si potrebbe chiamare 'oggettiva' della probabilità, ci limitiamo a dire che essa risale alla celebre trattazione di Laplace (1) che definiva la probabilità di un evento, possibile tra tanti altri, come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, purchè (e la clausola é fondamentale) questi ultimi siano tutti ugualmente possibili.

---

(1) P. (Marquis) DE LAPLACE - Essai philosophique sur les probabilités, Paris, 1819.

Abbiamo detto che la clausola della uguale possibilità degli eventi è fondamentale; è noto che su questa clausola si sono appuntate le critiche rivolte a questa definizione di probabilità; infatti è anche troppo facile osservare che la verifica del fatto che certi eventi siano tutti ugualmente possibili non può essere fatta "a priori"; quindi tale circostanza può essere soltanto affermata sulla base di una convinzione fideistica o sulla base di informazioni più o meno attendibili che si posseggono sulla realtà esteriore.

Ma, a parte queste osservazioni, il problema più importante è quello di collegare questa definizione di probabilità (che viene spesso anche chiamata definizione "a priori" della probabilità) con i risultati dalle statistiche effettuate sui fenomeni del mondo reale.

Infatti si osserva che per quanto riguarda le osservazioni che si eseguiscono sul mondo reale, ciò che è possibile rilevare si riduce ad una frequenza o ad un insieme di frequenze di un certo fenomeno la cui probabilità a priori è stata valutata. Nessuna certezza vi può essere infatti sulla aderenza della realtà alle leggi che sono date dalla probabilità a priori calcolata secondo la definizione da noi esposta. La difficoltà viene superata enunciando la cosiddetta "legge empirica del caso"; secondo questa legge si ha che quasi sempre, su un grande numero di eventi osservati, la frequenza oggettiva della presentazione è molto vicina alla probabilità toerica a priori, calcolata seconda la definizione classica. Questa legge, che giustamente viene chiamata 'empirica', ha un enunciato che è molto vago, perchè non si sa precisare quale sia il significato della espressione 'grande numero', della espressione 'quasi sempre' e della espressione 'molto vicina'.

Moltissime sono state le ricerche dirette a precisare questa legge, e ad introdurre vari concetti di 'convergenza' e di 'tendenza al limite' che fossero adatti al calcolo delle probabilità, pur essendo ovviamente diversi dalla convergenza e dalla tendenza al limite della analisi matematica classica. Per una chiara ed esauriente esposizione di questi argomenti, si veda il volume di L. DABONI, citato in (3).

Non staremo qui ad esporre queste ricerche, ma ci limiteremo a riportare alcune conseguenze della definizione classica della probabilità di un evento.

Si ha anzitutto che i casi favorevoli all'avverarsi di un evento E non possono essere più numerosi dei casi possibili : pertanto indicando con p(E) la probabilità dell'evento E, si ha chiaramente che il numero p è un numero reale non negativo che non supera 1. In formule si ha quindi

$$0 \leq p \leq 1 \quad .$$

Ovviamente se nessuno dei casi possibili è favorevole l'evento può essere detto impossibile; invece se tutti i casi possibili sono favorevoli, l'evento può essere detto certo. Pertanto si ha che l'evento impossibile ha probabilità zero, l'evento certo ha probabilità 1.

Ma dalla definizione della probabilità si traggono anche altre conseguenze, che sono fondamentali per l'applicazione di questi concetti alla vita reale ed alla Statistica. Ci limiteremo qui ad enunciare le proprietà che si riferiscono alle cosiddette 'probabilità totali' ed alle 'probabilità composte'. Tali proprietà, secondo la impostazione che stiamo ora esponendo, risultano essere delle conseguenze della definizione e quindi le proposizioni che le enunciano vengono abitualmente chiamate 'teoremi'. Enunceremo questi teoremi nei casi più semplici, in relazione a due eventi, che indicheremo con E_1 ed E_2. Orbene, indicate con p_1 e p_2 rispettivamente le probabilità associate ai due eventi si ha :

I. Se i due eventi si escludono a vicenda (cioè sono di tal natura che se l'uno accade non può accadere l'altro), allora la probabilità che accada uno o l'altro dei due è la somma delle due probabilità p_1 e p_2 .

Si può concepire un terzo evento E, che consiste nell'avverarsi dell'uno oppure dell'altro dei due; tale evento viene spesso chiamato "evento somma (logica)" dei due eventi dati. Pertanto il teorema or ora enunciato può essere espresso più brevemente dicendo che la probabilità dell'evento somma di due eventi incompatibili è la somma delle probabilità degli eventi addendi.

II. Se i due eventi sono indipendenti tra loro, così che l'avverarsi dell'uno non influisca in alcuna maniera sull'avverarsi o non avverarsi dell'altro, allora si ha che la probabilità dell'avverarsi contemporaneo dei due è il prodotto delle probabilità dei due; anche in questo caso si può concepire un evento che consiste nell'avverarsi contemporaneo dei due e che può essere chiamato "evento prodotto (logico)" dei due. Allora il teorema ora enunciato può essere espresso dicendo che la probabilità dell'evento prodotto logico di due eventi indipendenti è il prodotto delle due probabilità degli eventi fattori.

In particolare si ha che, preso in considerazione un evento E avente la probabilità p, si può considerare anche l'evento "non-E", che consiste nel non avverarsi di E. Poichè questi due eventi sono incompatibili, la probabilità dell'evento somma è la somma delle due probabilità. Ma l'evento somma è chiaramente l'evento "E oppure non-E" che è certo e quindi ha probabilità 1. Quindi, indicando con q la probabilità dell'evento non-E si ha la formula fondamentale

$$p + q = 1 .$$

Abbiamo esposto le conseguenze più elementari ma anche più importanti della definizione classica della probabilità "oggettiva". Ripetiamo che, dal punto di vista della costruzione di una teoria che valga per rappresentare qualche aspetto della realtà, il punto più delicato è dato dal collegamento tra la teoria astratta e la realtà delle osservazioni statistiche; questo collegamento nel caso della teoria classica è dato dalla legge empirica del caso. La validità di una legge come questa può essere garantita soltanto da considerazioni di carattere quasi filosofico, che riguardano la validità del procedimento di induzione in generale e della induzione statistica in particolare; è spiegabile quindi che si sia cercata una impostazione del tutto diversa della teoria della probabilità, per evitare di cadere nelle difficoltà che abbiamo cercato di esporre brevemente, salvando nello stesso tempo le conseguenze fondamentali della impostazione classica, conseguenze che sono contenute sostanzialmente nei teoremi che abbiamo presentato e nelle loro numerosissime deduzioni, che formano ormai un intero corpo di dottrina ed una branca importante della Matematica di oggi .

Presenteremo pertanto la teoria della probabilità soggettiva, così come il matematico italiano De Finetti abitualmente la espone e difende, insieme con un gruppo molto numeroso di matematici e statistici, tra i quali il più noto forse è L.J. Savage (Si veda, p.es. il volume citato in (8)).

3. Si potrebbe dire che la teoria di De Finetti è sostanzialmente una teoria astratta del comportamento umano in condizioni di intertezza, oppure se si vuole, di informazione incompleta. Il fatto che la realtà smentisca costantemente in molti casi questa teoria (si pensi al numero enorme di persone che giocano al Totocalcio, oppure al Lotto, o frequentano i casinò) nulla toglie alla coerenze interna della teoria stessa, nè al fatto che essa si presenta come molto adeguata a precisare regole di comportamento in moltissimi altri fenomeni economici.

In altre parole si potrebbe dire che nella impostazione della probabilità soggettiva, il problema fondamentale può essere ricondotto ad un problema di informazione : lo scopo di questa informazione é sostanzialmente quello di poter razionalizzare il comportamento dell'operatore in modo tale che dalle ipotesi enunciate e dalle informazioni di cui era in possesso o di cui puo' entrare in possesso in seguito non scaturisca alcuna contraddizione. Da questo punto di vista quindi la assiomatizzazione della probabilità di riduce ad una assiomatizzazione della razionale utilizzazione della informazione da parte del soggetto umano .

Per vedere come si possa giungere ad analizzare il problema da questo punto di vista ricordiamo che accanto alla determinazione della probabilità di un evento non conosciuto sta di solito un comportamento umano che si traduce in un contratto aleatorio o scommessa. E' questo un comportamento frequentissimo, che trova il suo posto non soltanto nel divertimento o nella ricerca (ahimè sempre vana) di facili guadagni, come nel gioco a denaro, ma trova anche il suo posto in moltissime operazioni economiche e finanziarie : al limite si potrebbe dire che ogni operazione di credito, di investimento di capitali è anche una scommessa, nel senso che è una operazione di esito incerto; in particolare il campo principale nel quale la incertezza è - per così dire - la norma e la sostanza del contratto è quello delle assicurazioni.

In questi campi della Economia è quindi un fatto assolutamente elementare quello di associare la valutazione della probabilità di un evento ad una operazione finanziaria di esito non certo, e quindi non vi è nulla di strano che lo schema della scommessa, insieme con la mentalità strettamente concreta ed operativa che è caratteristica di De Finetti, abbia condotto questo studioso alla sua trattazione della probabilità.

Nel suo modo di esprimersi, De Finetti distingue in modo preciso e puntiglioso tra previsione e predizione; quest'ultima è lasciata (nel suo modo di vedere) ai maghi, agli astrologi e magari anche ai politici. La previsione invece viene fatta tenendo conto di tutte le informazioni e di tutte le incertezze che il soggetto ha, con la massima accuratezza, ma senza nascondere la propria ignoranza e tenendo conto di certe regole di coerenza logica alle quali il soggetto è tenuto ad obbedire, sotto pena di perdite sicure, di fronte ad altri soggetti che si comportano in modo tale da rispettare le regole di coerenza.

Possiamo considerare come situazione fondamentale quella in cui si ha una operazione concreta che un sogetto umano deve svolgere quando deve assegnare una probabilità ad un evento non completamente conosciuto.

Precisamente supponiamo di avere un soggetto che non conosce esattamente le circostanze o addirittura la esistenza di un evento. Ciò può avvenire di un evento futuro, che dipende da cause che non sono tutte sotto il controllo del soggetto, oppure in relazione ad un evento di cui si sa che è avvenuto, ma che non si conosce ancora in tutti i suoi particolari : per es. si puo pensare ad una partita di calcio della quale si sa che è in corso di svolgimento ma della quale non si conosce ancora il risultato, perché esso non è stato ancora telefonato o communicato dalla radio e dalla TV.

In questi casi ed in altri analoghi numerosissimi, il soggetto è condotto a collegare all'evento un numero che si puo chiamare 'probabilità soggettiva' dell'evento stesso; come vedremo, tale numero p è compreso tra zero ed 1. Precisamente possiamo dire che la frase : il soggetto attribuisce all'evento la probabilità p significa che il soggetto è disposto a scommettere la somma di pM lire (in vista di una vincite di M lire).

Occorre aggiungere che la somma M non deve essere né troppo piccola né troppo grande : cioè la somma non deve essere talmente trascurabile che al soggetto non importi affatto il risultato del suo impegno e che faccia tutto per puro divertimento, ma non deve essere talmente grossa, rispetto al patrimonio che il soggetto possiede od al volume dei suoi affari, che la sua perdita implichi una rivoluzione radicale nel suo modo di vita. In altre parole il soggetto deve essere effettivamente interessato, ma non drammaticamente interessato, nella scommessa, in tal guisa che gli faccia piacere vincere, ma che non sia per lui un disastro irrimediabile la perdita della scommessa. Se questa ultima circostanza si verificasse, ovviamente il soggetto sarebbe portato a dare un valore molto piccolo a p, al limite a non porre neppure la scommessa : d'altro lato se la somma M fosse irrisoria di fronte alle sue possibilità, il soggetto potrebbe giudicare con troppa leggerezza le circostanze che lo conducono ad arrischiare la somma pM.

Nelle sue opere (si veda per es. il volume (4)) De Finetti presenta varii accorgimenti che si potrebbero mettere in opera per stimolare il soggetto a fare una valutazione accurata e seria della probabilità, così come sono anche presentati degli accorgimenti per aiutare il soggetto a rendersi conto del valore di probabilità molto piccole o molto grandi, cioè quelle probabilità che qualche autore confonde con quelle di eventi "praticamente impossibili" o "praticamente certi".

E' del tutto naturale pensare che queste consideràzioni si prestino ad essere criticate, perché ovviamente le clausole restrittive che abbiamo enunciato non sono rigorosamente precisabili, nè è possibile distaccarsi dall'aspetto strettamente psicologico della valutazione del soggetto nell'attribuire un valore p alla probabilità dell'evento considerato.

Per tali ragioni appunto la teoria che stiamo per esporre viene chiamata 'teoria soggettiva' della probabilità, cercando così di distinguerla dalle altre teorie, che si danno da sole il nome di 'teorie oggettive' della probabilità. Ma occorre osservare che anche chi volesse adottare la definizione 'oggettiva' della probabilità non può ignorare la esistenza di un aspetto soggettivo di giudizio che può essere più o meno coscientemente "a priori" : ho detto più o meno coscientemente, perchè chi presumesse di negare qualunque aspetto soggettivo alla impostazione di Laplace sarebbe ovviamente vittima di una autoillusione clamorosa, oppure andrebbe incontro alle critiche sulla coerenza logica della definizione stessa.

La defenizione della probabilità soggettiva é stata direttamente collegata con il comportamento del soggetto che si potrebbe chiamare a giusta ragione "economico", perchè tiene conto dell'interesse che il soggetto ha alle conseguenze dei propri giudizi (assegnazione della probabilità) e delle sue azioni (scommessa); essa è accompagnata da una certa <u>regola di coerenza,</u> che sostituisce gli assiomi della teoria assiomatica e che permette di ritrovare, nel quadro della definizione data, tutte le proprietà della probabilità classicamente definita.

4. La <u>regola di coerenza</u> a cui abbiamo fatto cenno potrebbe essere enunciata nel seguente modo : Una valutazione di probabilità si dice <u>coerente</u> se nessuna combinazione di scommesse, nelle quali si può tradurre la considerazione di più eventi, consente di realizzare un guadagno non negativo (oppure non positivo) in ognuno dei casi possibili e positivo (oppure, corrispondentemente negativo) in almeno uno di essi.

In altre parole si potrebbe dire che una persona che faccia una valutazione di probabilità che è coerente, secondo questa definizione, non deve poter essere sicura di vincere (oppure di perdere) quali che siano le scommesse che essa offre oppure accetta.

Si può far vedere che da questa regola di coerenza discendono quelle che nella teoria classica della probabilità si chiamavano teoremi delle "probabilità totali" e delle "probabilità composte" come casi particolari.

Intanto si fa vedere subito che la probabilità che una persona annette ad un evento deve essere un numero non maggiore di 1. Infatti se la persona scommettesse pM lire (con $p > 1$) in vista di una possibili vincita di M lire, avrebbe certamente la perdita (guadagno negativo) di almeno

$$-pM + M = M(1-p)$$

lire, che è un numero negativo se si ha $p > 1$.

Analogamente si può osservare che se un soggetto attribuisce ad un evento E la probabilità p, allora la coerenza lo obbliga ad attribuire all'evento "non-E" la probabilità q tale che sia

$$p+q = 1 .$$

Supponiamo infatti che il soggetto attribuisca all'evento "non-E" une probabilità q tale che sia

$$p+q > 1.$$

Allora ci sarebbe chi scommette contro di lui, tanto sull'evento E che sull'evento "non-E"; scommettendo la somma S sull'uno e sull'altro caso, il bilancio del soggetto porterebbe, in uscita, la somma

$$pS + qS = S\ (p+q)$$

ed in entrata la somma S (perchè uno dei due aventi : E oppure non-E si verificherà di certo); quindi il soggetto avrebbe una perdita sicura; analogo ragionamento, con il solo cambiamento della vincita sicura, si può fare nel caso in cui la valutazione sia

$$p+q < 1 .$$

In modo analogo, sempre tenendo conto della regola di coerenza, che obbliga l'operatore (o coloro che formano la sua contro-parte) a valutare le probabilità in modo da evitare le perdite sicure, si giunge a dimostrare che debbono valere le formule classiche del calcolo delle probabilità. In particolare, presi in considerazione due eventi E_1 ed E_2 si può considerare, come abbiamo visto già, l'evento "somma logica" che avviene quando uno almeno dei due si verifica, e l'evento "prodotto logico" che avviene quando entrambi si verificano.

Tale somma logica e prodotto logico sono indicati spesso con i simboli insiemistici

$$E_1 \cup E_2 \qquad \text{e} \qquad e_1 \cap E_2$$

rispettivamente.

Indichiamo ora con $p(E_1)$ e rispettivamente con $p(E_2)$ le probabilità che il soggetto attribuisce a ciascuno degli eventi E_1 ed E_2. Supponiamo che i due eventi siano incompatibili, cioè che se accade l'uno non possa accadere l'altro. Indichiamo per brevità con π la probabilità che non avvenga nessuno dei due eventi, cioè la negazione dell'evento "somma logica". Come conseguenza della coerenza si ha

$$p(E_1) + p(E_2) + \pi = 1 \quad .$$

Da quanto è stato detto si ha, come conseguenza della coerenza, che il soggetto deve attribuire all'evento somma logica di due eventi incompatibili la probabilità data da

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

5. Prendiamo ora in considerazione il problema delle probabilità subordinate; a tal fine indichiamo con

$$p(E/H)$$

la probabilità che un soggetto attribuisce al verificarsi dell'evento E, nella ipotesi che l'evento H si verifichi; tale probabilità beninteso viene valutata ora, cioè prima di sapere che l'evento H sia verificato oppure no. Sia $p(H)$ la probabilità che il soggetto attribuisce all'evento H e sia $p(E \cap H)$ la probabilità che il soggetto attribuisce all'evento "prodotto logico" di E ed H.

Orbene si ha che, in seguito alla regola di coerenza, il soggetto deve attribuire all'evento prodotto logico $E \cap H$ la probabilità data da

$$p(E \cap H) = p(E/H) \cdot p(H) \quad .$$

Prendiamo infatti in consideratione i tre eventi seguenti $H \cap E$, $H \cap$ non E, non H .

Indichiamo ora per brevità con p la probabilità che il soggetto attribuisce all'evento E, subordinato ad H, sia p' la probabilità che egli attribuisce ad H e sia p" quella che egli attribuisce all'evento non-H.

Supponiamo che egli scommetta le somme S, S', S" rispettivamente sui tre eventi. Allora il bilancio dello scommettitore sarà il seguente nei tre casi che abbiamo sopra considerato :

1. Se si verificano H ed E, egli ha speso

$$pS + p'S' + p''S'' \text{ e guadagna } S + S' + S'' \quad ;$$

quindi il guadagno totale è

$$g_1 = S(1-p) + S'(1-p') + S''(1-p'')$$

2. Se si verifica H ma non E, la spesa è sempre come prima, ma egli incassa soltanto S'. Quindi il guadagno è

$$g_2 = -pS + S'(1-p') - S''p'' \quad .$$

3. Se non si verifica H, la spesa iniziale è sempre quella di prima, ma lo scommettitore ricupera la somma pS, perchè non essendosi verificato H la scommessa su E risulta caduta. Quindi il guadagno è

$$g_3 = -p'S' - p''S''$$.

Si faccia ora la combinazione lineare a coefficienti positivi dei tre guadagni g_1, g_2, g_3 che è data dalle formula seguente :

$$p\,p'\,g_1 + p'(1-p)\,g_2 + (1-p')\,g_3 = S''\,(p\,p' - p'')$$.

Si deve avere allora :

$$p'' = p\,p'$$

perchè sia salvo il principio della coerenza.

In particolare se i due eventi E ed H sono indipendenti, cioè se si ha

$$p(E/H) = p(E)$$

la formula esprime quello che nella trattazione classica veniva chiamato il "teorema delle probabilità composte"; secondo, questo teorema quindi la probabilità dell'evento prodotto di due eventi indipendenti tra loro è data dal prodotto delle probabilità dei due eventi; in formule, si ha che se E_1 ed E_2 sono indipendenti è

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$.

Pertanto nel quadro della impostazione soggettiva della probabilità vengono ritrovate tutte le proposizioni che vengono dimostrate secondo la impostazione classica. Va detto tuttavia dello sviluppo ulteriore che De Finetti dà alla sua teoria, utilizzandola, come abbiamo detto, come una sistemazione razionale della condotta umana di fronte a situazioni nelle quali non esiste informazione perfetta.

Si pone infatti il problema di utilizzare ogni ulteriore informazione per modificare eventualmente la valutazione che un soggetto dà della probabilità di un evento, rimanendo fedele alle regole di coerenza che debbono sempre dirigere il suo comportamento.

La riposta è data da una celebre formula, che viene chiamata "formula di Bayes", che è stata spesso utilizzata per risolvere il problema che viene chiamato della "probabilità delle cause".

Per arrivare a presentare tale formula occorre ricordare la impostazione classica del problema, che può essere ripetuta anche qui senza timore di contraddizione.

Supponiamo che un evento E possa essere prodotto da un certo numero di cause : per semplicità supporremo che tale numero sia finito, ma ricordiamo che non vi è alcuna difficoltà a supporre che tali cause siano in numero infinito e che quindi si possa tradurre quello che si dice in termini di integrali.

Siano dunque

$$H_1, H_2, \ldots, H_n$$

le cause e supponiamo inoltre che tali cause siano escludentisi l'una l'altra. In altre parole supponiamo che siano valide le due seguenti ipotesi :

i) l'una almeno delle cause deve operare perché si verifichi l'evento ;

ii) se l'una delle cause ha operato (e quindi l'evento si è verificato) nessuna delle altre può avere operato.

Siano

$$p(H_i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

le probabilità valutate "a priori" che le singole cause abbiano agito e siano anche

$$p(H_i/E)$$

la probabilità che sia stata H_i la causa del verificarsi dell'evento E, che - ricordiamolo - è avvenuto. Allora si ha

(*) $$p(H_i/E) = p(H_i) \cdot p(E/H_i)/Q$$

dove abbiamo indicato con Q il numero

$$Q = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\ p(E/H_i)$$

La formula di Bayes (*) , viene abitualmente richiamata dicendo che le probabilità "a posteriori" della causa H_i , cioè la probabilità che la causa stessa abbia agito (quando beninteso si sappia che l'effetto ha avuto luogo) è proporzionale alla probabilità a priori, attribuita alla causa stessa. La costante di proporzionalità è data dal numero

$$p(E/H_i)/Q$$

e si verifica facilmente che si ha

$$\sum_{i=1}^{n} p(H_i/E) = 1$$

come deve essere, dato che certamente almeno una delle cause ha agito.

Per dare un'idea dalla utilizzazione delle idee che abbiamo cercato di esporre brevemente, svilupperemo i ragionamenti che riguardano un esempio concreto e semplicissimo; ciò ci darà anche la occasione di constatare quale sia la posizione di De Finetti nei riguardi della definizione classica della probabilità.

Siano date due scatole perfettamente uguali tra loro all'esterno : ciascuna di esse contiene due palline e si sa che l'una ne contiene una bianca ed una nera, mentre l'altra ne contiene due entrambe bianche. Si estrae una pallina dalla prima scatola e si trova che essa è bianca; si domanda quale probabilità si debba attribuire alla proposizione seguente : "La scatola da cui la pallina è stata estratta è quella che contiene una pallina bianca ed una nera"; in altre parole, se si dovesse scommettere che, aprendo la scatola, si ritroverà una pallina bianca ed una nera, quali dovrebbero essere le poste ?

Indichiamo convenzionalmente con A l'evento: "La scatola da cui abbiamo estratto contiene una pallina bianca e una nera" e con B l'evento:"La scatola da cui abbiamo estratto contiene due palline bianche"; sia poi E l'evento: "Estrazione di una pallina bianca".

Si ha, in base alla formula delle probabilità subordinate

$$p(E \cap A) = p(E)\ p(A/E)$$

ma è anche

$$p(E \cap A) = p(A)\ p(E/A)$$

e dunque

(**) $$p(A)\ p(E/A) = p(E)\ p(A/E)$$

di conseguenza

(+) $$p(A/E) = p(A)\ p(E/A)/p(E) .$$

In modo analogo si ha

(++) $$p(B/E) = p(B)\ p(E/B)/p(E)$$

Ora, in mancanza di ulteriori informazioni, possiamo adottare lo schema classico e quindi provvisoriamente attribuire la stessa probabilità ai due eventi A e B, ponendo dunque

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2} .$$

Ancora in mancanza di ulteriori informazioni possiamo adottare provvisariamente lo schema classico, che ci conduce ad attribuire alle probabilità p(E/A) e p(E/B) i valori seguenti :

$$p(E/A) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(E/B) = 1 .$$

Di conseguenza si ha, dalle (+) e (++)

$$p(B/E) = 2p(A/E) .$$

Quindi la scommessa equa potrebbe essere fatta solo con le seguenti attribuzioni di probabilità :

$$p(A/E) = 1/3 \quad ; \quad p(B/E) = 2/3 \quad .$$

Supponiamo ora di reintrodurre la pallina nella scatola, di fare una seconda estrazione e di trovare che la pallina estratta è sempre bianca; possiamo utilizzare ancora le due formule (+) e (++), ma questa volta dobbiamo tener conto del fatto che la probabilità che attribuiamo all'evento A è la metà di quella che attribuiamo all'evento B. Fatti i conti troviamo che si ha

$$p(B/E) = 4\, p(A/E) \quad .$$

Ripetiamo n volte la stessa procedura, cioè introduciamo la pallina nella stessa scatola, e supponiamo che si abbia sempre la pallina bianca; ogni volta per calcolare la probabilità a posteriori dobbiamo tener conto dei risultati precedenti e quindi tener conto del fatto che ognuno di essi modifica le attribuzioni di probabilità degli eventi A e B.

Pertanto dopo n estrazioni siamo condotti ad attribuire ai due eventi A e B due probabilità che stiano tra loro come 1 sta a 2^n, cioè siamo condotti ad attribuire le probabilità

$$1/(2^n+1) \qquad e \qquad 2^n/(2^n+1) \quad .$$

Naturalmente, dato quello che sappiamo sulla costituzione delle scatole, se anche una sola volta la estrazione desse la pallina nera la questione sarebbe giudicata.

6. Non vogliamo spingere ulteriormente la presentazione della impostazione della teoria di De Finetti, che ognuno puo trovare sviluppata nei trattati che citiamo in bibliografia. Ci limitiamo ad osservare che anche la utilizzazione metodica della formula di Bayes ha un carattere tipicamente concreto ed operativo e si ricollega direttamente alla informazione che viene desunta dalla esperienza. Ed in ogni caso si tratta di determinare la probabilità che viene attribuita ad un evento in vista di una operazione concreta che viene fatta o prevista o immaginata, ma sempre una operazione concreta di tipo economico, che viene schematizzata con una scommessa.

Da quanto abbiamo detto si trae anche una ulteriore precisazione della posizione di De Finetti nei riguardi della definizione classica della probabilità : abbiamo infatti detto poco sopra che, in mancanza di ulteriori informazioni, siamo condotti ad attribuire probabilità uguali tra loro agli eventi A e B. Pertanto si ha che la attribuzione di probabilità che viene fornita dalla definizione classica non viene rigettata interamente, ma viene adottata soltanto come uno dei mezzi con i quali colui che deve dare una valutazione di probabilità può orientarsi; quindi la frase che nelle trattazioni classiche veniva considerata come la definizione della probabilità di un evento diviene in questo ordine di idee un criterio per dare una prima valutazione della probabilità dell'evento stesso, quando non si abbiano altre informazioni.

La conclusione che si può trarre dalla considerazione di questa teoria mi pare possa essere che anche la Matematica applicata è ricca di fascino e di problemi che vale la pena di meditare; la considerazione di questi problemi puo aiutare molto - a mio parere - a non staccare l'insegnamento della Matematica dalla realtà e quindi può aiutare tutti gli insegnanti a dare all'insegnamento della Matematica quel valore formativo e quel contenuto culturale che è le scopo fondamentale dell'insegnamento di ogni materia in ogni scuola.

BIBLIOGRAFIA

(1) RUDOLF CARNAP The foundations of probability, Chicago (The University of Chicago Press),1930

(2) DOMENICO COSTANTINI Fondamenti del calcolo delle probabilità, Milano (Feltrinelli), 1970

(3) LUCIANO DABONI Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica, Torino (UTET), 1970

(4) BRUNO DE FINETTI Teoria delle probabilità, Torino (Einaudi), 1970

(5) DARIO FÜRST e GIUSEPPE PARENTI I fondamenti del calcolo delle probabilità, (Atti della Tavola rotonda di Poppi, 11-12 giugno 1966), Firenze 1967

(6) D.V. LINDLEY Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Cambridge (Cambridge University Press), 1969

(7) ENDERS A. ROBINSON An introduction to infinitely many variates, London (Ch. Griffin & Co.), 1959

(8) LEONARD J. SAVAGE The foundations of statistics. London (John Wiley & Sons), 1954