DA "NUOVA SECONDARIA" N.5 DEL 15 GENNAIO 1985

Il concetto di media.

Problemi dell'insegnamento della statistica

di Carlo Felice Manara

1. È noto che i nuovi programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole dell'ordine elementare hanno introdotto, tra l'altro, anche i concetti fondamentali del calcolo delle probabilità e della statistica tra i contenuti dell'insegnamento.

Non stiamo a ripetere il nostro parere contrario a questo allargamento di programma, parere che abbiamo ripetuto in diverse sedi e che è confortato anche da opinioni più autorevoli della nostra. Non abbiamo alcuna intenzione di aprire qui una polemica su questo argomento; abbiamo stima per coloro che hanno proposto (ed ottenuto) l'introduzione dei nuovi argomenti nella scuola elementare, anche se non condividiamo le loro idee, e anche se abbiamo una visione meno ottimistica della loro sulle capacità didattiche e sulla cultura matematica dei maestri elementari in questo ordine di questioni; e questa nostra opinione è confortata anche dall'analisi di vari sussidiari, che dovrebbero aiutare il maestro laddove costui avesse delle lacune, e provvedere al suo sostegno intellettuale e forse morale.

2. È noto che, quando si insegna la statistica, si incontra quasi subito il concetto di « media »; analizzando la trattatistica più comune, si direbbe che tale concetto sia quello più importante di tutta la teoria statistica, e forse vi è qualche verità in questa opinione diffusa.

Ma purtroppo non ci pare abbastanza diffusa la chiarezza di idee in relazione a questo concetto.

Pertanto vorremmo dedicare qualche considerazione a questo argomento; a scanso di equivoci, diciamo subito che ciò che diremo non ha nulla di originale, perché riporteremo le opinioni di ricercatori insigni, che hanno meditato sull'argomento prima e certamente meglio di noi. Ma la ispezione di diversi volumi e libri di testo ci convince del fatto che qualche precisazione in proposito non sia del tutto inutile.

Invero capita spesso di incontrare delle frasi che forse vorrebbero essere la definizione del concetto di « media » e che suonano pressappoco come la seguente: « ...dati n numeri reali, si dice " media " di essi un numero compreso tra il massimo ed il minimo ». Molti trattati fanno risalire questa frase ad A. Cauchy e gli autori dei trattati stessi sembrano voler anche scusarsi della mancata precisione della frase, ricorrendo alla autorità del matematico francese.

Non conosciamo a sufficienza le opere di Cauchy per poter dire in quali circostanze egli abbia scritto la frase sopra riportata; pertanto ci limitiamo ad esprimere qui il sospetto che la frase stessa sia stata scritta da Cauchy in un contesto del tutto diverso da quello in cui viene solitamente citata; ci viene anche il sospetto che l'aver preso questa frase come definizione di « media » sia dovuto semplicemente ad un fatto linguistico: invero, poiché in francese il vocabolo « *valeur* » è di genere femminile, abbiamo il sospetto che il Cauchy volesse semplicemente indicare un valore intermedio, compreso tra il massimo ed il minimo dei numeri dati, e non una « media » nel senso che gli statistici danno a questo termine.

Ma non intendiamo continuare in questa direzione, anche perché — ripetiamo — non abbiamo conoscenza diretta del testo del grande francese, e la critica filologica non entra negli scopi di questo scritto.

3. La precisazione del concetto statistico di media è stata fatta da Oscar Chisini in un breve articolo del « Periodico di Matematiche » del 1929 (cfr. O. Chisini, *Sul concetto di media*, in « Periodico di Matematiche » (IV), IX, n. 2, 1929).

L'articolo è passato abbastanza inosservato, e si direbbe che neppure gli « addetti ai lavori » abbiano ben compreso lo scopo che il Chisini si prefiggeva; questo nostro pensiero è confortato dal fatto che ci è capitato di scorrere alcuni trattati, nei quali una presunta « media di Chisini » era elencata insieme con tutte le altre medie che di solito vengono presentate: l'aritmetica, la geometrica, l'armonica e così via. Invece Chisini aveva voluto dare delle precisazioni sul concetto generale di media, e non inventare un nuovo esemplare della flora già lussureggiante di medie che gli statistici coltivano.

D'altra parte, il fatto che sia utile ritornare su qualche precisazione dei concetti anche elementari può anche essere confermato dalla lettura degli scritti di coloro che dovrebbero essere i tecnici della statistica: per esempio, in una pubblicazione ufficiale di una istituzione statale, che si chiama appunto « Istituto Centrale di Statistica », pubblicazione edita nel 1984 con il titolo *Le Regioni in cifre*, in nota alla pag. 22 si può leggere la frase seguente: « *La vita media alla nascita indica il numero di anni di vita che spettano mediamente ad un nato vivo* ».

La qualifica più benevola che si potrebbe dare di questa frase è « sibillina »: infatti essa inizia come una definizione (La vita media alla nascita indica...) del concetto di « vita media », ma poi prosegue utilizzando il termine « mediamente » che, come minimo, è altrettanto chiaro (o meglio oscuro) della espressione che si vorrebbe definire; per non parlare del seguito della frase, che farebbe pensare che vi sia un certo numero di anni che « spettano » ad ogni nato vivo.

Per rendersi conto del significato dell'analisi svolta da Chisini vale forse la pena di meditare un poco sul significato e sugli scopi della statistica; questi richiami ci permetteranno di capire il significato e anche l'acume della analisi del Chisini e forse potranno risparmiare a molti discenti la fatica di imparare tante formule e tante parole tecniche che, pur avendo molta importanza e grande utilità, spesso sono occasione di confusioni abbastanza dannose.

Non intendiamo qui gettarci nell'impresa di definire la statistica; per i fini che abbiamo in vista ci basta illustrare alcuni aspetti sotto i quali questa scienza si presenta, aspetti che forse sono meglio illustrati quando si mettano in evidenza alcuni suoi scopi. Pare a noi che tali scopi (ovviamente non tutti e forse neppure i più importanti) si possano descrivere dicendo che la statistica si propone di raccogliere le informazioni sui fenomeni collettivi, e di criticarle ed elaborarle in modo che possano servire ai fini della conoscenza teorica e della pratica.

Pare a noi chiaro che con la elaborazione si perdano delle informazioni; ma nella maggior parte dei casi questa perdita è compensata dalla sintesi che ne viene fatta e dalla possibilità di utilizzare comodamente le informazioni così sintetizzate.

Da questo punto di vista, quindi, la costruzione di medie di un gruppo di numeri è una delle procedure che la statistica segue per elaborare le informazioni raccolte, e per sintetizzarle in vista di determinati fini.

Pertanto, in questo ordine di idee, non ha senso pensare che una media sia più « naturale » oppure sia più atta a fornire informazioni di un'altra: la scelta della media che si costruisce può essere dettata soltanto dalle informazioni che scegliamo di perdere e da quelle invece che vogliamo sintetizzare, e quindi in definitiva dagli scopi che vogliamo raggiungere con la costruzione della media stessa.

Per spiegare meglio il nostro pensiero, riportiamo qui l'esempio svolto dal Chisini nell'articolo citato e ripreso da G. Landenna in una recente opera (cfr. Giampiero Landenna, *Fondamenti di statistica descrittiva*, Bologna, 1984).

Supponiamo che un Tizio abbia fatto un viaggio in automobile percorrendo una distanza di a km; tale distanza sia stata percorsa in due tratti, l'uno di lunghezza a^* e l'altro di lunghezza a^{**}, in modo che si abbia ovviamente:

$$a = a^* + a^{**}. \tag{1}$$

I due tratti di percorso siano stati fatti a velocità rispettive v^* e v^{**}. Si chiede di dare la velocità media alla quale il tratto intero è stato percorso.

In base a quanto è stato detto finora la domanda così formulata non ha senso, fino a quando non si sia scelto e determinato il fine a cui deve servire l'unica informazione che vogliamo costruire in base a quelle che abbiamo.

Invero, per esempio, possiamo dare al termine « velocità media » il seguente significato: « quella velocità che, se mantenuta costante durante l'intero percorso, permette di impiegare lo stesso tempo che è stato impiegato nel viaggio realmente avvenuto ».

In base a questa scelta, indicando con v la velocità media così definita, si dovrà avere:

$$a/v = a^*/v^* + a^{**}/v^{**} \tag{2}$$

e quindi v sarà radice della equazione lineare (2).

Ma la scelta di questa definizione di velocità media non è per nulla obbligata: invero possiamo prendere in considerazione altri aspetti del viaggio, che ci interessa rappresentare con un unico numero, per scopi diversi da quelli che ci hanno portato alla (2) e che ovviamente mirano solo alla valutazione del tempo di percorrenza.

Per esempio, supponiamo che il consumo di un'automobile sia direttamente proporzionale alla lunghezza del percorso (come è ovvio) e ad una funzione quadratica della velocità che ha il suo minimo per 60 km/h. Per esempio, supponiamo che il consumo C sia dato dalla formula seguente, nella quale s rappresenta la lunghezza del percorso, ed u e k sono delle costanti positive, che qui non ci interessa precisare:

$$C = s\,[u + k\,(v - 60)^2]. \tag{3}$$

Nulla vieta che, in questo ordine di idee, si definisca velocità media quella velocità x che, se tenuta durante tutto il percorso, dia luogo al consumo che è stato fatto realmente. Siamo allora condotti a scrivere l'equazione:

$$\begin{aligned} &a\,[u + k\,(x - 60)^2] = \\ &= a^*\,[u + k\,(v^* - 60)^2] + \\ &+ a^{**}\,[u + k\,(v^{**} - 60)^2]. \end{aligned} \tag{4}$$

La radice reale e positiva di questa equazione di II grado in x ci fornisce

la velocità media che è atta a sintetizzare il fenomeno considerato ai fini del calcolo del consumo.
Gli esempi si potrebbero moltiplicare, utilizzando anche concetti che si incontrano nella vita quotidiana del cittadino. Per esempio, supponiamo che in un determinato anno del recente passato, il tasso di inflazione trimestrale abbia avuto i seguenti valori:

13%, 14%, 16%, 17%;

possiamo allora domandarci di definire il *tasso medio* di inflazione durante l'anno citato. Il primo procedimento che potrebbe essere adottato è quello di costruirci la media aritmetica dei valori dati, media che condurrebbe quindi ad un tasso di inflazione del 15%.
Appare chiaro che, riassumendo le informazioni avute con quest'unico dato, si perdono delle informazioni, anche se si ottiene una unica informazione che può essere considerata sufficiente per determinati fini. Tuttavia si può anche osservare che la procedura seguita non è l'unica possibile; invero si potrebbe domandarsi quale sia il tasso di inflazione trimestrale il quale, se mantenuto costante durante l'anno, dà alla fine di questo lo stesso tasso di inflazione che si è avuto cumulando gli effetti dei quattro trimestri.
Se si adotta questo modo di vedere, il tasso medio incognito di inflazione sarà la soluzione della equazione:

$$(1+x)^4 = 1 \cdot 13 \times 1 \cdot 14 \times 1 \cdot 16 \times 1 \cdot 17. \quad (5)$$

La soluzione reale positiva della equazione (5) dà

$$x = 14{,}9891295\%$$

per difetto.
Qualcuno potrebbe osservare che, nel caso in esame, il valore trovato è sufficientemente vicino al 15% da giustificare la prima procedura, in vista delle informazioni che si vogliono ottenere. Ma ciò non toglie che, dal punto di vista concettuale, la seconda procedura sia fondata su uno scopo preciso, e corrisponda ad una utilizzazione ben determinata delle informazioni che si hanno, utilizzazione che è alla base della equazione (5).

4. Crediamo che gli esempi presentati e le discussioni svolte siano sufficienti per poter capire l'analisi del concetto di media fatta da Chisini. Volendo presentare tale analisi in forma generale si potrebbe dire quanto segue: dati n numeri reali

$$x_1, \ x_2, \ \ldots\ldots, \ x_n \quad (6)$$

e considerata una funzione

$$y = f(x_1, \ x_2, \ \ldots\ldots, \ x_n) \quad (7)$$

Appuntamento con il problema

a cura di Pietro Canetta

Risposta alle questioni

(v. n. 4 pag. 78)

Questione n. 19. $2^n + 1$ è divisibile per la somma delle basi $2 + 1 = 3$ se, e solo se, n è dispari.

Questione n. 20. Per avere il numero degli zeri con cui termina la scrittura di 1000! ci basta conoscere il numero di volte che il fattore 5 figura nei fattori di 1000!, in quanto il fattore 2 figura certamente un numero maggiore di volte. Ora, fra i numeri da 1 a 1000 ce ne sono $1000/5 = 200$ divisibili per 5, $1000/25 = 40$ divisibili per 5^2, $1000/125 = 8$ divisibili per 5^3 ed uno solo, 625, divisibile per 5^4. Pertanto in 1000! il fattore 5 figura $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ volte e quindi 1000! termina con 249 zeri.

Questione n. 21. La figura a lato (fig. 1) dà la soluzione. In essa i 25 alberi sono indicati con cifre arabe e le rette che li contengono con cifre romane. Essa è stata ottenuta applicando ai due triangoli 567 e 234 il teorema dei triangoli omologhi: se due triangoli complanari sono disposti in modo tale che le coppie di vertici omologhi sono allineate con un centro fisso, allora le intersezioni delle coppie di lati omologhi sono allineate.

Nuove questioni

Questione n. 22. Un'urna contiene un gettone che si sa essere o bianco o nero. Si introduce nell'urna un gettone bianco, si scuote l'urna e si estrae un gettone che risulta bianco. Quale è ora la probabilità che nell'urna sia rimasto un gettone bianco?

Questione n. 23. Una lancia della polizia fluviale parte per la solita ronda risalendo per un certo tratto la corrente, poi scendendo a valle del punto di partenza e ritornando infine al punto di partenza. Se la corrente è più veloce del solito, la lancia ci metterà più o meno tempo a fare il suo giro di ronda?

Questione n. 24. Dimostrare che il prodotto di quattro interi positivi consecutivi non può mai essere un quadrato perfetto.

PIETRO CANETTA, c/o Università Cattolica del Sacro Cuore, Facoltà di Scienze Matematiche, via Trieste n. 17, Brescia.

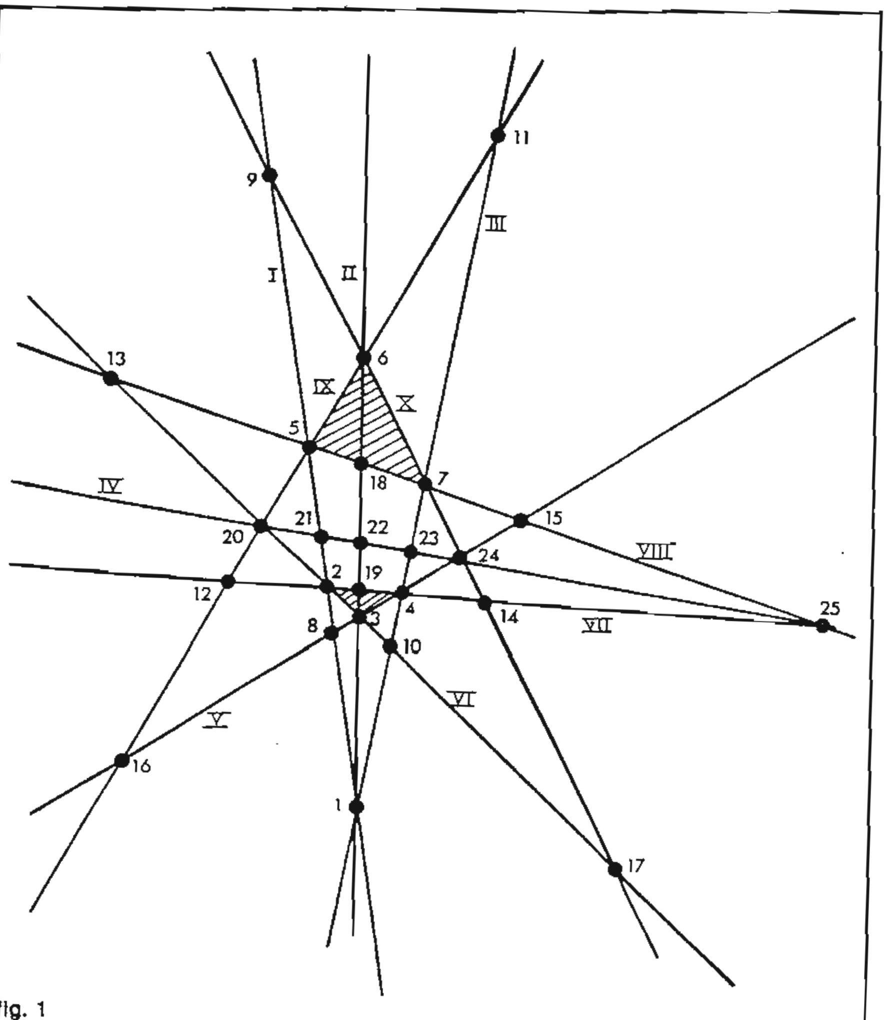

fig. 1

...i essi, si chiama *media* dei valori (6) *rispetto alla funzione f*, un valore M il quale, introdotto nella funzione (7) al posto di ogni valore x_i dia alla funzione stessa il medesimo valore y che si ottiene dalla (7).
In altre parole, una media M rispetto alla funzione f è tale che si ha:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M, M \ldots, M). \quad (8)$$

Questa analisi è stata ulteriormente estesa da A. Herzel, con sviluppi che non possiamo riportare qui; ci basti ribadire che non esiste una media che sia « migliore » o più « naturale » di un'altra, perché ogni media deve essere scelta in relazione ad un determinato fine, che è quello di scegliere tra informazioni possedute quelle che si vogliono rappresentare sinteticamente in vista di determinati scopi, fissati prima del calcolo. Queste osservazioni spiegano anche, almeno in parte, la predilezione per la media aritmetica che viene mostrata da vari autori: infatti con la media aritmetica le informazioni che si vogliono ottenere rappresentando il fenomeno collettivo con un unico numero sono oggetto di calcoli molto semplici.
Così, per esempio, supponiamo che l'economo di un collegio debba provvedere alla spesa quotidiana per il pane dei convittori; supponiamo che questi siano 89 e che consumino « in media » 350 g di pane a testa per giorno. In questo caso, la espressione « consumo medio » significa semplicemente che l'economo decide l'acquisto giornaliero di pane facendo la moltiplicazione di

$$350 \text{ g} \times 89.$$

Probabilmente la prudenza lo consiglia di arrotondare a 90 il numero dei presenti, e quindi l'acquisto sarà di 31,5 kg di pane.
Supponiamo ora di sapere che il « peso medio » della pagnotta sia di 250 g; questa informazione conduce immediatamente l'economo a decidere di comperare 126 pagnotte. Supponiamo ancora di sapere che le pagnotte hanno un « raggio medio » di 15 cm, quando possano essere assimilate a sfere.
Allora il volume del pane da comperare sarà dato da 23 dm^3 circa, il che corrisponde al volume di un cubo avente spigolo 60 cm circa.
Supponendo che l'ingombro effettivo della pagnotta, assimilata ad una sfera, sia doppio del suo volume, allora la spesa giornaliera del pane potrà essere contenuta in una cesta cubica che ha poco più di 75 cm di lato, oppure in una cesta che ha volume uguale.
Pare abbastanza chiaro che in questi casi, abbastanza semplici, l'impiego del concetto di « media » è legato strettamente ai fini pratici che si vogliono conseguire, ed alla semplicità delle operazioni aritmetiche che forniscono le informazioni desiderate. Ma non è detto per questo che la media aritmetica sia la sola che fornisce tali informazioni. Supponiamo per esempio, sempre mantenendoci nel caso analizzato, di metterci dalla parte del panificatore, il quale si trova ad aver lavorato tanta pasta di pane quanto basta per dare un prodotto di 222 dm^3.
Questi può voler fabbricare 126 pagnotte e può domandarsi quale sarà il « raggio medio » della pagnotta, supposta di forma sferica.
Ovviamente in questo caso tale raggio sarà la soluzione x della equazione

$$126 \times \frac{4}{3}\pi x^3 = 222, \quad (9)$$

la quale fornisce il volume del pane fabbricato come somma dei volumi di 126 sfere tutte uguali tra loro.
Per ritornare al discorso riguardante la « vita media » di un neonato, vita così maldestramente definita dalla pubblicazione che abbiamo citato, ricordiamo che, in modo rigoroso, essa viene definita come il *valore medio della variabile aleatoria costituita dalla durata della vita dei singoli soggetti di un gruppo sufficientemente numeroso ed omogeneo.*
La stessa cosa potrebbe essere presentata con altre parole nel modo seguente: consideriamo un gruppo abbastanza numeroso ed omogeneo di coetanei; indichiamo secondo il solito con x l'età dei componenti del gruppo e con $l(x)$ il numero dei componenti che sono vivi all'età x. Indichiamo poi, sempre secondo le notazioni abituali, con ω quella che si suol chiamare « l'età estrema » dei componenti del gruppo, cioè quell'età tale che si abbia

$$l(\omega) = 0.$$

Con queste convenzioni, la vita media M di un componente del gruppo viene definita dalla formula:

$$M \times l(0) = l(0)/2 + \sum_{x=1}^{\omega} l(x). \quad (10)$$

Il significato del numero M definito dalla (10) (a parte l'addendo 1/2 che compare al secondo membro per ragioni di perequazione empirica) è quello di darci, moltiplicato per il numero $l(0)$ dei componenti del gruppo all'inizio, il numero complessivo degli anni di vita di tutti i componenti del gruppo stesso.
Tutto ciò, con l'approssimazione accettata in questo caso, ed in casi analoghi, fornisce delle informazioni che sono utili per il politico, l'assicuratore, il sociologo, lo storico e per altri studiosi o tecnici che ovviamente rinunciano a conoscere la esatta durata della vita di *ogni* componente del gruppo per avere sinteticamente una informazione che a loro serve di più o che essi ritengono più significativa. Ovviamente in questa definizione non vi è alcun concetto che si richiami a una lunghezza di vita che « spetta » a ciascun neonato del gruppo; analogamente pensiamo che sia evidente che, qualora si desiderassero altre informazioni, i dati di cui si dispone potrebbero essere sintetizzati in modo diverso.

5. Ciò che abbiamo cercato di esporre nei precedenti paragrafi vuole semplicemente chiarire un aspetto della matematica, e cercare di sfatare l'immagine che questa scienza ha (a torto o a ragione non stiamo qui ad indagare) presso molti; precisamente avremmo desiderato convincere anche il lettore non « addetto ai lavori » che la matematica non ha nulla di « magico » quando venga utilizzata semplicemente per quello che può dare e per le informazioni che può fornire. In particolare nessuna elaborazione matematica può « creare » delle informazioni che non si posseggono, o può ridurre il margine di incertezza delle misure e delle conoscenze che si posseggono in partenza, in relazione ad un determinato problema. Ciò che la matematica può dare (ed in questo il suo apporto è spesso indispensabile e quasi sempre prezioso) è la chiarezza delle concettualizzazioni e il rigore delle deduzioni. Il grande matematico J. B. J. Fourier diceva che « ...la matematica non ha simboli per le idee confuse », e ciò diciamo come massima lode di questa scienza; e forse anche ciò spiega la ragione per cui la matematica ha un numero di amici tanto ristretto.

Carlo Felice Manara