Estratto da

*PEDAGOGIA
E
VITA*

Serie XXXIII
N.

L'insegnamento della «insiemistica» nelle scuole dell'ordine elementare e medio

di Carlo Felice Manara

1. Come è noto, nei programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole dell'ordine elementare e dell'ordine medio ha trovato cittadinanza, in tempi relativamente recenti, un capitolo nuovo il cui contenuto viene abitualmente designato come « insiemistica ».

Questo vocabolo sarà adottato anche da noi per designare questo capitolo della cosiddetta « matematica moderna »; non vorremmo infatti illudere nessuno dicendo che in tale capitolo viene insegnata la « teoria degli insiemi »; quest'ultima dovrebbe essere presentata ed approfondita in modo ben diverso, se si volesse insegnarla seriamente. Ed in questo caso sarebbe certamente fuori della portata dei discenti delle scuole dell'ordine elementare e medio.

Nella cosiddetta « insiemistica » si presenta in certo senso la teoria degli insiemi a livello intuitivo (vorremmo dire « ingenuo »), con le poche nozioni di Algebra di Boole che si riferiscono alle operazioni di intersezione, unione, complementazione dei sottoinsiemi di un insieme dato.

Sappiamo che l'introduzione di questo nuovo capitolo nell'insegnamento della matematica a livello elementare ha dato luogo, da parte di alcuni, a perplessità ed anche a critiche, a polemiche e ad atteggiamenti nettamente negativi, che sono in stridente contrasto con gli entusiasmi, talvolta ingenui ed improvvisati, manifestati da parte di altri.

Le perplessità e le posizioni polemiche hanno portato qualcuno a chiedersi apertamente quale fosse la ragione della introduzione di questo nuovo capitolo in un ciclo didattico che pareva consolidato da secoli nella sua struttura elementare; e dalle domande sulle ragioni della introduzione si passa facilmente alle domande più pertinenti: se esistano dei vantaggi che giustificano questa introduzione e quali siano tali vantaggi.

Pensiamo che i tempi siano maturi per fare una breve analisi della situazione, dopo un periodo nel quale l'introduzione della insiemistica è stata fatta in modo che può far pensare alla improvvisazione ed al facile ma non giustificato entusiasmo. Le analisi che ci proponiamo di svolgere dovrebbero portare a rispondere, almeno in parte, agli interrogativi ai quali abbiamo accennato ed anche a dedurre certe conseguenze che riguardano la didattica di questo nuovo capitolo, ed i problemi che vi si riferiscono.

Riteniamo infatti che sia bene cercare di rispondere agli interrogativi che sono nati a proposito della insiemistica, perché tali interrogativi appaiono del tutto legittimi e perché le risposte possono forse portare a chiarimenti che costituiscono arricchimento intellettuale di docenti e discenti.

Inoltre riteniamo opportuno rispondere agli interrogativi a cui abbiamo accennato, anche se spesso essi vengono avanzati da persone che hanno imparato la matematica che potremmo dire « classica » (il caso tipico è fornito dai genitori dei giovani studenti, che magari hanno seguito dei corsi di matematica superiore) ed hanno l'impressione frustrante di essere esclusi dal mondo delle idee in cui i giovani vengono introdotti, di non capire il perché di certi programmi, e quindi di non poter contribuire al progresso dei giovani. Spesso anche la mancata convinzione della opportunità della presenza del capitolo « insiemistica » nel programma scolastico va di pari passo con la mancata comprensione delle ragioni di certe valutazioni e di certi giudizi dei docenti sulla resa scolastica dei giovani.

Forse, con una certa dose di malignità, qualcuno potrebbe osservare che le perplessità nei riguardi della insiemistica sono causate dal fatto che, in presenza della « nuova matematica », i genitori non riescono più a fare i compiti dei figli, perché si trovano a dover lavorare su nozioni che non sono state loro insegnate; quando poi viene superata la prima fase di complesso di inferiorità nei riguardi del simbolismo nuovo e delle regole formali « strane », subentra la convinzione che si tratti di cose « assolutamente inutili », perché ne è stata constatata la semplicità, considerata spesso addirittura come banalità.

Troviamo invece che sarebbe ingiusto trascurare le esigenze di chi vuole capire perché certe materie sono state introdotte nei programmi, oppure fare oggetto di ironia queste richieste; riteniamo infatti che sia legittimo il desiderio, da parte di chi ha la responsabilità della educazione dei giovani, di conoscere le ragioni di certi capitoli dei programmi di studio; se queste ragioni sono conosciute e capite si otterrà una feconda collaborazione tra la scuola e l'ambiente extrascolastico nel quale il giovane vive. Se invece non si sa, o si rinuncia a spiegare la logica strutturazione dei capitoli e dei programmi, si sarà fatto un passo ulteriore sulla via della separazione degli ambienti nei quali il giovane vive e quindi sulla strada che porta alla sfiducia più o meno esplicitamente manifestata nei riguardi della scuola.

D'altra parte è lecito ritenere che la risposta (che viene data da qualche parte) secondo la quale l'insegnamento della insiemistica è destinato ad « insegnare ai ragazzi a ragionare » non sia del tutto soddisfacente.

Infatti si potrebbe dire che la scuola dovrebbe « insegnare a ragionare » traendo partito da tutte le materie; inoltre rinascerebbe la domanda che porta a chiedersi come mai per « insegnare a ragionare » si sia scelta proprio questa strada e non qualche altra; tante polemiche sono state fatte in passato a proposito delle materie che « insegnano a ragionare »; di volta in volta il latino da parte di qualcuno, la matematica da parte di qualche altro sono state indicate come materie che hanno questa funzione in modo particolare. E si potrebbe dire che tali polemiche lasciano il tempo che trovano. È ovvio tuttavia che l'analisi deve essere spinta a fondo e che la risposta deve dire quale sia il tipo di ragionamento che con l'insiemistica si vuole insegnare, e perché si desidera insegnare a simbolizzare ed a schematizzare in un certo modo piuttosto che in un altro.

Come abbiamo detto, dalla analisi dovrebbe scaturire non soltanto la risposta a questi e ad altri interrogativi, ma dovrebbe anche nascere la problematica che si riferisce alla didattica di questo capitolo. Infatti è stato rilevato da qualche parte (e non senza ragione) che la insiemistica rischia di diventare un nuovo capitolo della matematica, astratto e non motivato, né nella sua genesi storica, né nelle sue applicazioni; quindi l'insegnamento della insiemistica rischia di diventare una trasmissione puramente meccanica di certe formule e di certe strutture formali che, nella mente del discente, non hanno collegamento con la realtà e quindi rischiano di fare la stessa fine delle formule della matematica tradizionale: considerate da molti come incomprensibili, guardate con diffidenza e con senso di inferiorità, non rese parte attiva del proprio patrimonio intellettuale e fondamento della propria crescita interiore.

Ci riserviamo di ritornare in seguito su questo argomento e sull'altro, che riteniamo altrettanto se non più importante, che riguarda la valutazione dell'apprendimento di questo capitolo della cosiddetta « matematica moderna ».

2. Dopo quello che abbiamo scritto finora riteniamo che occorra anzitutto analizzare le ragioni che hanno condotto a quella che si suole chiamare la « matematica moderna » e di conseguenza hanno condotto alla introduzione della insiemistica nelle scuole come uno dei capitoli di quella nuova matematica di cui si parla tanto. Vorremo mettere in luce due ordini di ragioni che a nostro parere spiegano, ed anche, entro certi limiti, giustificano l'introduzione della cosiddetta matematica moderna nell'insegnamento; tali ragioni provengono dalla evoluzione della matematica negli ultimi decenni e dalle idee che si sono diffuse recentemente nella psicologia.

Anzitutto, per quanto riguarda la matematica, vorremmo dire — in modo molto approssimato — che la sua recente evoluzione ha messo maggiormente in luce uno dei suoi caratteri fondamentali e precisamente quello che le conferisce la fisionomia di una scienza per la quale lo studio delle strutture formali (simboli e loro leggi, algoritmi ecc.) sta prendendo il sopravvento rispetto allo studio di quelli che si potrebbero chiamare i « contenuti ». Per poter spiegar meglio il nostro pensiero e per fissare le idee, si pensi a ciò che succedeva qualche anno fa nella introduzione dei numeri interi (relativi); si metteva l'accento su questi enti, che in certo modo venivano presentati come costruzioni artificiali (la cui esistenza era giustificata in molte maniere), dotate di certe « proprietà »; oggi invece si preferisce mettere l'accento sulla struttura algebrica di « anello » e presentare i numeri interi come una (tra le tante) classi di enti che può realizzare questa struttura. Volendo quindi analizzare il fenomeno storico, potremmo dire che l'attenzione è passata « dai contenuti alle strutture formali », per quanto la frase possa essere poco precisa e quindi forse anche fonte di fraintendimenti.

Questa tendenza della matematica moderna, che si presenta in certo modo come fatale ed inarrestabile (e quindi tale che non sarebbe saggio cercare di contrastarla) la si nota da moltissimi indizi: pensiamo per esempio al momento di fortuna particolare che sta vivendo l'Algebra: quella che una volta si chiamava « Algebra moderna » o anche « Algebra astratta » è diventata semplicemente oggi l'« Algebra », che si sta estendendo in modo tale da fare apparire gli studi di Algebra praticati soltanto qualche decennio fa come una zona ristrettissima delle nostre conoscenze. Pensiamo a tutta l'enorme massa di studi che si riferisce alla logica matematica, alla teoria dei linguaggi, ai calcolatori elettronici.

Questi ultimi non solo hanno permesso di affrontare dei problemi che solo una generazione fa sarebbero stati considerati come inavvicinabili, ma hanno anche cambiato in modo radicale il panorama degli studi matematici. E questo in modo tale che il calcolo infinitesimale e l'analisi matematica, nella misura in cui si possono pensare come originati da una certa concezione classica del continuo e delle conseguenze logiche che da questa concezione si deducevano, vedono la loro situazione di primato insidiata dalle ricerche sul discontinuo, che sono più strettamente a contatto con le possibilità pratiche dei calcolatori elettronici « digitali ».

Ci troviamo quindi di fronte ad un panorama della scienza matematica che è profondamente mutato rispetto a quello che eravamo abituati a considerare, e che inoltre sta vivendo tuttora un rapido cambiamento.

Ma accanto alle ragioni che trovano la loro origine nel mutato panorama della matematica vi sono anche delle ragioni che sono fondate sui progressi degli studi di psicologia. È noto che secondo questi studi la vicenda della formazione dei concetti basilari del pensiero nella mente del bambino e del preadolescente è stata vista in parallelo, se non forse addirittura ricalcata, sulle strutture fondamentali della matematica.

È ovvio quindi che non si può trascurare la presenza, sulla scena della scienza moderna, di due fatti precisi e concreti; da una parte l'analisi teorica che i matematici hanno fatto della loro scienza e dall'altra l'analisi sperimentale che una scuola di psicologia ha fatto dei procedimenti elementari che conducono il bambino al possesso di certe strutture logiche.

Non entra nel nostro programma né nelle nostre possibilità fare una analisi critica completa e seria dei risultati di queste ricerche di psicologia; non possiamo tuttavia esimerci dal domandarci quanta influenza abbia avuto il modello matematico sulla elaborazione dei fatti sperimentali e sulla evoluzione delle ricerche concrete volte alla conferma del modello stesso.

Con ciò non si vuole ovviamente dire che il modello sia stato precostituito, adottato e quindi in certo modo « riempito » con i fatti, secondo una idea preconcetta; ma si vuole soltanto dire che forse varrebbe la pena di spingere l'analisi più a fondo in questa direzione.

Quale che sia il risultato di queste analisi, appare evidente che l'esistenza di questi dati non poteva non influenzare anche le idee sulla didattica della matematica. La conclusione è anche troppo naturale, perché era facile prevedere che l'influenza di questi fatti sulla didattica sarebbe stata la seguente: quelle che erano state considerate come le idee fondamentali della matematica e gli schemi fondamentali di azione della mente umana e della formazione delle idee nella mente del bambino, sarebbero state assunte come le idee direttive per una azione didattica. Il che è puntualmente avvenuto.

È avvenuto insomma per la matematica un poco quello che è avvenuto per l'insegnamento di una lingua, nella scuola tradizionale: l'analisi dei grammatici e dei linguisti ha portato ad enucleare certe strutture fondamentali, che costituiscono per così dire i « mattoni » con i quali viene costruito l'edificio di una lingua.

Di qui è stato naturale il passo che ha portato a insegnare una lingua secondo la procedura classica: morfologia, grammatica, sintassi ecc.

Tutto questo procedimento parte da un postulato che non è enunciato, perché appare in certo modo evidente, ma che forse vale la pena di esaminare più da vicino: vogliamo dire il postulato secondo cui quella che appare a posteriori come la strada logicamente più semplice e la costruzione delle idee più elementare sia effettivamente la strada didatticamente più efficace per insegnare una materia.

Il parallelo con la procedura classicamente seguita per l'insegnamento di una lingua induce nel nostro animo i primi dubbi in proposito; a tutti coloro che non hanno una età più propriamente giovanile ritorna all'animo quella che era la metodica dell'insegnamento per es. del latino nel vecchio ginnasio.

Si potrebbe dire che appare alquanto strano il fatto che, dopo tutte le analisi e le critiche dell'insegnamento tradizionale nei riguardi delle altre materie, per l'insegnamento della matematica, in presenza di quella massa di teorie che viene classificata come « matematica moderna », sia stata scelta da taluno per la didattica proprio la strada che parte da ciò che è logicamente più semplice e fondamentale per giungere alla costruzione di ciò che è concettualmente più complicato.

L'esperienza di ciascuno di noi potrebbe invece avvertirci di quello che accade quando un intelletto, non ancora esperto (anche se dotato della naturale curiosità e dell'entusiasmo che distingue i giovani) viene posto in contatto con una materia nuova quale si voglia.

In questa situazione psicologica gli argomenti che suscitano l'interesse maggiore e l'entusiasmo più vivace (e quindi sono appresi con maggiore facilità e ricordati più a lungo) sono quelli che riguardano cose nuove; invece l'analisi delle strutture elementari porta ad una fatica che talvolta confina con il tedio, perché richiede una analisi paziente ed uno sforzo di astrazione che il neofita non è in grado di compiere subito.

Se si tengono presenti queste osservazioni si spiegano, anche se non sempre si giustificano, le critiche avanzate nei riguardi dell'insegnamento della matematica moderna e dell'insiemistica in particolare. Secondo tali critiche la matematica moderna presenta delle cose che non sono nuove ed in compenso sono banali ed inutili.

Esse non sono nuove, perché anche nell'insegnamento tradizionale dell'aritmetica il concetto per es. di numero cardinale veniva presentato sul fondamento della corrispondenza biunivoca tra insiemi concreti, anche se il vocabolario usato non era quello che si adotta ora. Inoltre tali cose sono spesso banali, perché non occorre un grande impiego di tempo e di fatica per rendersi conto del fatto che apponendo un aggettivo ad un sostantivo si viene a restringere la classe degli enti designati dal sostantivo (cioè si viene a determinare un sottoinsieme di un insieme) ed apponendo due aggettivi ad un sostantivo si finisce per compiere una operazione logica elementare che è oggi designata come l'intersezione di due sottoinsiemi di un insieme. Anche la esemplificazione della operazione di riunione di due insiemi non offre alcuna difficoltà e quindi non si vede perché occorra dedicare del tempo e della fatica per lo studio di una operazione talmente semplice e banale; di conseguenza tale studio si dimostra del tutto inutile.

3. Analizziamo quindi anzitutto le critiche avanzate da varie parti all'insegnamento della cosiddetta « matematica moderna », critiche le quali sostanzialmente si appuntano sulla pretesa « banalità » delle operazioni che si eseguiscono e sulla conseguente mancanza di interesse da parte dei giovani per le operazioni stesse.

Vale la pena di rimeditare su questo argomento per cercare di trovare quali siano gli scopi della formalizzazione che si ottiene con la cosiddetta « insiemistica » e quali siano i vantaggi che da questa formalizzazione possono essere ottenuti.

A nostro parere pensiamo che siano anzitutto da prendere in considerazione i vantaggi che si ottengono abituando i discenti ad accostare esplicitamente ad ogni operazione logica un simbolo grafico.

Questi vantaggi sono aumentati dal fatto che i simboli adottati sono del tutto artificiali e senza riferimento ai simboli grafici che vengono utilizzati nel linguaggio comune; pertanto tali simboli sono semanticamente univoci e sono privi di quelle ambiguità che sono tipiche delle denominazioni che vengono tratte dal linguaggio comune e pertanto, per la loro stessa natura, sono ricche di significati collaterali e di connotazioni contenutistiche.

Tale vantaggio, in assoluto, potrebbe anche essere considerato come non grande; ma questa conclusione si rivela presto come affrettata, quando si consideri un poco la parte essenziale che il simbolismo tiene nello sviluppo della scienza. La storia della matematica mostra che spesso i progressi più sostanziali nella scienza sono stati ottenuti anche con l'introduzione di adatti simbolismi; è appena necessario per es. ricordare quale sia stato il progresso nella matematica che ha seguito l'introduzione nella civiltà occidentale delle convenzioni arabe per la rappresentazione dei numeri interi.

Infatti, anche senza ricordare qui esplicitamente ciò che abbiamo detto poco fa a proposito della continua ed inarrestabile tendenza della matematica verso la formalizzazione, si potrebbe dire che mentre in teoria una idea risulta indipendente dal simbolismo che si utilizza per esprimerla, nella pratica e nella storia della scienza il simbolo appare come indispensabile per la comunicazione; quindi anche le qualità del simbolo sono essenziali (in questo senso, beninteso) per la possibilità effettiva di dedurre dalla idea tutte le sue implicazioni e per poter utilizzare nel modo migliore la sua fecondità.

Pertanto la formalizzazione e la espressione esplicita di certi rapporti logici, che si ottiene con le formule dell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme, risultano vantaggiose alla chiarezza ed alla esplicitazione di certi rapporti, anche se in linea assoluta non dicono niente di nuovo, perché non fanno che riprodurre i procedimenti elementari e fondamentali della mente umana, procedimenti che l'uomo ha sempre utilizzato nel suo ragionare ed in ogni operazione logica.

Per fare un paragone approssimato, si potrebbe dire che l'uomo ha sempre saputo contare e che quindi in teoria non sarebbe necessario utilizzare le convenzioni delle cifre arabe per rappresentare i numeri interi: potrebbero bastare le parole del linguaggio comune. Ma nessuno potrebbe negare che l'adozione di un certo sistema di simboli piuttosto di un altro per la rappresentazione dei numeri ha provocato dei progressi fondamentali della scienza e della civiltà umana.

Per questa ragione non stupisce il sentire affermare, da parte di alcuni psicologi e pedagogisti, che l'adozione della « insiemistica » nelle scuole elementari ha provocato un certo progresso intellettuale nei ragazzi, progresso che si ripercuote anche nelle altre materie e nell'apprendimento della lingua.

A nostro parere, e senza volere con questo dare un giudizio definitivo sul fenomeno, che vorremmo piuttosto analizzato, osservato e confermato, la situazione provocata dalla adozione della « insiemistica » ha dato la possibilità di una specie di « verbalizzazione » esplicita dei rapporti logici e quindi ha provocato i vantaggi analoghi a quelli della « alfabetizzazione » elementare: vantaggi forse tanto maggiori quanto più fondamentali sono i concetti ai quali essa si riferisce, e quindi tanto più potente risulta essere la « presa » sulla realtà che questa specie di simbolizzazione può dare.

In questo ordine di idee quindi le perplessità e l'avversione dimostrate da qualcuno potrebbero essere superate; ma riteniamo che questo possa avvenire a condizione che l'insegnamento della insiemistica avvenga così come avviene l'insegnamento della lingua materna.

In altre parole vorremmo che l'adozione del formalismo dell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme avvenisse in modo che il discente potesse « riconoscere » (per così dire) nei simboli le strutture che egli ha sempre adottato, così come egli « riconosce » nei simboli grafici le parole che egli usa quotidianamente per esprimersi, e che egli ha usato sempre in modo « naturale » fino dai primi tempi dell'uso della lingua. È noto infatti che, quando i ragazzi adottano per la comunicazione familiare il dialetto invece che la lingua « dotta » o ufficiale, la alfabetizzazione diviene difficile, e la difficoltà cresce quanto più lontano è l'ambiente familiare dal mondo della scuola, che alla sua espressione quotidiana vorrebbe sovrapporre la lingua dei letterati. In modo analogo vorremmo dire che l'adozione del simbolismo della logica dovrebbe avvenire in modo che essa costituisca un arricchimento esplicito e non una imposizione di una specie di verbalismo vuoto, imposto dal di fuori, così come la lingua « ufficiale » è imposta a chi si è sempre espresso con il dialetto: in questo caso infatti, l'imposizione della lingua ufficiale è spesso sentita come una costrizione della propria libertà di espressione, e giudicata come inutile se non si provano dei bisogni di espressione che non possono essere soddisfatti dal dialetto.

4. Abbiamo visto poco fa i vantaggi che l'adozione della insiemistica può portare nel senso della « alfabetizzazione » delle classi giovani, intendendo questa alfabetizzazione nel senso della adozione di simboli precisi ed artificiali per esplicitare in modo ben netto e per fissare in modo cosciente quelli che sono i procedimenti fondamentali del nostro ragionare, e le relazioni fondamentali tra i concetti.

Vorremmo insistere nel dire che questa presa di coscienza rappresenta un arricchimento e che la esplicitazione (anche se può essere ritenuta banale) di certi procedimenti che vengono pensati « naturali » può invece portare un progresso nella chiarezza, ed una economia nel pensiero. Vorremmo tuttavia ripetere che questi vantaggi possono essere raggiunti se chi insegna trova il modo di far riconoscere nei simboli i procedimenti mentali che già il discente compie ed arriva a fargli « toccare con mano » i vantaggi dell'avere simbolizzato tali procedimenti, così come ad un certo stadio di apprendimento questi può toccare con mano i vantaggi della scrittura e della lettura. A questo proposito si potrebbe osservare che la consapevolezza dei vantaggi conseguiti è forse più facile da ottenersi in persone che abbiano già una certa maturità mentale piuttosto che nei giovanissimi; così come avviene nel processo di ricupero dell'adulto alla alfabetizzazione, perché l'adulto ha quasi sempre già constatato l'estrema utilità del saper leggere e scrivere nella vita del mondo civilizzato.

Tuttavia i vantaggi che l'adozione del simbolismo dell'insiemistica può conferire non si limitano a ciò che abbiamo esposto; essi si estendono più in là, così come si estendono i vantaggi della rappresentazione dei numeri interi mediante le convenzioni delle cifre arabe che ogni paese civile ha adottato oggi.

Infatti nel caso dei numeri i vantaggi non si arrestano alla rappresentazione semplice e comoda dei numeri stessi; essi si estendono in modo essenziale alle leggi dell'aritmetica. In questo ordine di idee vorremmo dire che il vantaggio fondamentale consiste nella possibilità di stabilire un parallelismo tra le leggi delle operazioni sugli insiemi concreti e quelle delle operazioni sui simboli.

A nostro parere questo è uno dei punti che nel caso della aritmetica ha condotto tradizionalmente l'utente ad accettare l'apprendimento delle leggi formali delle operazioni sui numeri: la constatazione cioè che tale apprendimento consente di dominare una certa struttura della realtà che ci circonda mediante il maneggio di una struttura formale.

Infatti quando per es. si prendono in considerazione due insiemi concreti, disgiunti, cioè privi di elementi comuni, per es. uno di 317 ed uno di 489 elementi, l'unione dei due insiemi dà luogo ad un insieme il cui numero di elementi si può conoscere eseguendo la somma $317 + 489$.

Tale somma viene eseguita con regole e con procedimenti che sono del tutto diversi da quelli che caso per caso conducono alla determinazione dell'insieme concreto che è riunione dei due dati. Tuttavia nella convinzione dell'utente dell'aritmetica sta la sicurezza che il risultato delle operazioni tra i due numeri dà il numero degli elementi dell'insieme unione.

Orbene si dovrebbe poter tendere, nel caso della insiemistica, ad una convinzione dello stesso tipo, che faccia superare la fatica dell'apprendimento dell'algebra di Boole e che dia all'utente la convinzione che questa algebra gli dà una « presa » sulla realtà, tanto della logica che della pratica comune, così come l'apprendimento delle leggi dell'aritmetica dà la possibilità di dominio sulla realtà concreta e quindi giustifica la fatica e la noia dell'apprendimento stesso.

Si potrebbe così superare la critica che viene avanzata da molte parti a proposito dell'eccesso di astrazione logica, che consegue al livello di eccessivo distacco dalla realtà al quale è tenuto l'insegnamento della insiemistica.

Pertanto, come nel caso dell'aritmetica, la constatazione del fatto che le leggi formali dell'algebra riproducono, con la sicurezza che è data dall'automatismo della sintassi, le leggi della logica, potrà far accettare l'astrattezza e l'apparente artificiosità della simbolizzazione logica.

Si pensi per es. alla legge che dà la proprietà transitiva della relazione di inclusione tra insiemi: come è noto questa legge era già conosciuta dalla logica classica, perchà dà la legge del sillogismo aristotelico, che nella logica medioevale viene indicato col simbolo *Barbara.*

Si pensi per es. al ragionamento seguente, che rientra nello schema ricordato:

Tutti i multipli di 100 sono multipli di 10.
Tutti i multipli di 10 sono numeri pari.
Dunque tutti i multiplici di 100 sono numeri pari.

Indicate con i simboli A la classe dei multipli di 100, B la classe dei multipli di 10 e C la classe dei numeri pari, si ha che il ragionamento precedente viene simbolizzato nelle tre relazioni di inclusione.

Se è $A \subset B$ ed anche $B \subset C$, allora è $A \subset C$.

Pertanto il sillogismo precedente viene espresso mediante la proprietà transitiva della relazione di inclusione tra insiemi.

Vorremmo dire, in forma meno precisa ma forse più suggestiva, che quella che era una forma di sillogismo è stata tradotta in una corrispondente proprietà formale di una relazione dell'algebra di Boole.

Si potrebbe obiettare che non si è imparato nulla di nuovo e che la proprietà transitiva della relazione di inclusione è esattamente equivalente, dal punto di vista logico, alla affermazione della validità dello schema *Barbara* del sillogismo classico. Vorremmo tuttavia ricordare quanto abbiamo esposto poco fa a proposito della simbolizzazione: quando si sono adottati dei simboli opportuni e comodi, la verifica della correttezza di un ragionamento e della validità di una conclusione si riconduce alla verifica formale del rispetto di certe leggi di calcolo: il che può presentare grandissimi vantaggi nei riguardi della chiarezza, della certezza, della precisione.

Si potrebbe quindi dire che con l'adozione dei simbolismi dell'insiemistica si può ottenere un duplice vantaggio: quello di rendere esplicito e cosciente il procedimento di simbolizzazione e di rendere automatico e per così dire meccanico il procedimento di deduzione. Con tutte le conseguenze di certezza e di generalità che conseguono alla formalizzazione artificiale e alla deduzione meccanica ottenuta in forza delle leggi sintattiche dei simboli.

Da quanto è stato detto fin qui si deducono forse delle conseguenze che possono essere ritenute valide, almeno in linea di massima, per quanto riguarda l'impostazione della didattica di questo capitolo della Matematica elementare. Non pensiamo di dare alle osservazioni che stiamo per fare la caratteristica di estrema originalità: vorremmo anzi dire che molti insegnanti già praticano le raccomandazioni che stiamo per fare, o per esperienza vissuta, oppure per buon senso, che riesce a moderare gli entusiasmi talvolta sprovveduti dei neofiti della insiemistica.

Vorremmo dire che a nostro parere la cosiddetta insiemistica non dovrebbe costituire un capitolo di cui si tratta « ex professo » all'inizio oppure in altra epoca del corso di matematica. A nostro avviso l'insegnante dovrebbe poter introdurre l'insiemistica, e cioè la simbologia e il vocabolario, la manovra del simbolismo e le sue conseguenze, come si introduce la lingua materna; cioè utilizzando tali strumenti senza dare esplicitamente delle definizioni e delle descrizioni, ma semplicemente presentando i simboli nella maniera più semplice ed utilizzando materialmente il vocabolario della insiemistica senza insistere nelle definizioni formali. A questo proposito si vorrebbe dire qui che spesso purtroppo si insegnano invece ai giovani delle frasi (che sono rifacimenti della classica frase di Cantor) pretendendone la ripetizione pappagallesca, dando così l'abitudine della ripetizione acritica.

In altre parole il giovane dovrebbe apprendere il vocabolario ed il simbolismo della insiemistica con un procedimento che è analogo a quello con il quale si impadronisce della lingua materna: sentendo l'insegnante che la usa, imitando l'insegnante stesso, ed apprendendo la scrittura e la grammatica più con la pratica che con lo studio astratto.

Anche le leggi formali dell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme dovrebbero essere introdotte più con la pratica che con esplicite definizioni o enunciazioni di proprietà. Ovviamente il discente potrà convincersi della validità di queste proprietà formali sugli esempi e quindi potrà constatare che queste proprietà formali costituiscono la trasposizione esplicita sul piano del simbolo artificiale di quei procedimenti che noi utilizziamo quotidianamente quando parliamo la lingua e quindi la loro utilizzazione costituisce una presa di coscienza esplicita di quelle proprietà della lingua — o meglio della logica — che noi utilizziamo quotidianamente e costituiscono per così dire un patrimonio naturale del modo di ragionare dell'uomo.

Come abbiamo già detto pensiamo infatti che non sia possibile introdurre in forma rigorosa ed assiomatica la teoria degli insiemi e quindi non sia possibile fare apprezzare la profondità alla quale questa si situa nei riguardi della logica e delle operazioni elementari dello spirito umano e la sua fecondità nella matematica e anche nelle altre scienze e in generale in tutti i procedimenti nei quali interviene un qualunque ragionamento. Riteniamo invece che occorra limitarsi a rendere espliciti mediante le leggi dell'insiemistica i procedimenti del ragionare umano; e pensiamo che questo vantaggio, che a qualcuno potrà sembrare forse ben scarso, sia invece profondamente innovatore nei riguardi dell'insegnamento che potremmo dire tradizionale della matematica. A nostro parere, come abbiamo detto, vi è un indubbio progresso nella « esplicitazione » delle operazioni e nella formulazione di esse mediante le leggi dei simboli; tale progresso va indubbiamente nella direzione della maggiore chiarezza intellettuale e nella sicurezza della deduzione e della manovra di concetti.

In questo ordine di idee quindi l'insegnamento della insiemistica dovrebbe essere fatto con un continuo passaggio dal procedimento concreto del ragionamento alla sua simbolizzazione, alla astrazione della proprietà formale del simbolo utilizzato e quindi alla generalizzazione, che in questo caso si esplicita nella formalizzazione e quindi nella soluzione di problemi che, pur presentandosi come diversi dal punto di vista dei contenuti, sono tuttavia formalmente analoghi tra loro.

Non ci nascondiamo il fatto che un insegnamento di questo tipo sia molto difficile, perché l'insegnante deve continuamente avere il controllo della situazione, aver sempre di mira gli scopi che il suo insegnamento vuole ottenere e raccogliere continuamente le fila del discorso per portarlo, dai casi particolari e concreti dai quali occorre partire, alle formulazioni astratte.

Tuttavia non vorremmo chiudere il nostro discorso senza accennare anche ad un altro problema, che lascia talvolta perplessi i parenti dei giovani e che si presenta in sé come molto difficile a questo livello. Vogliamo dire del problema della valutazione dell'apprendimento. Abbiamo già detto che la insiemistica non dovrebbe a nostro parere essere insegnata con definizioni astratte; pertanto possiamo escludere che la valutazione dell'apprendimento di questa branca della matematica elementare possa essere fatta con il controllo della ripetizione pedissequa di frasi e di definizioni o di regole astratte. La valutazione va fatta sempre, a nostro parere, come dovrebbe essere fatta nel caso della lingua materna: cioè controllando se il discente ha detto effettivamente, con il linguaggio che si vuole insegnargli, quello che si voleva che dicesse e se ha applicato correttamente le leggi della sintassi del linguaggio che deve imparare.

Si tratta quindi di una valutazione che spesso si può presentare come abbastanza difficile; in ogni caso è da escludersi che tale valutazione possa essere fatta da chi non possiede appieno la materia e non ha meditato profondamente su di essa, così come certa contestazione studentesca sbrigativa, ingenua ed ignorante, presenta in certe sue pubblicazioni che sono molto diffuse: « Non è vero che occorra la laurea per insegnare matematica nelle medie... Basta ripetere per anni le stesse cretinate che sa ogni bravo ragazzino di terza media. La correzione dei compiti si fa in un quarto d'ora. Quelli che non sono giusti sono sbagliati ». Queste parole, che si leggono a pagg. 118--119 della *Lettera ad una professoressa,* testo sacro di certa contestazione studentesca, dimostrano che i problemi dell'insegnamento e soprattutto della valutazione dell'apprendimento richiedono una certa meditazione, per evitare di commettere o di scrivere delle sciocchezze.

Nel caso della insiemistica, il procedimento che si vorrebbe insegnare è abbastanza complesso, anche se da qualcuno è giudicato banale: esso potrebbe essere analizzato nelle fasi di astrazione, schematizzazione per mezzo di simboli, deduzioni per mezzo delle proprietà formali dell'algebra dei simboli, interpretazione dei risultati. In ciascuno di questi passi il discente potrebbe errare e la valutazione dell'apprendimento e di conseguenza dell'errore non appare così facile come sembra a prima vista. Non intendiamo tuttavia dare delle regole generali per la soluzione di questo problema, che a noi sembra particolarmente importante. Forse ulteriori meditazioni e ricerche potrebbero fornire dei materiali sui quali basarci per la soluzione del futuro di questi e di altri fondamentali problemi di didattica.