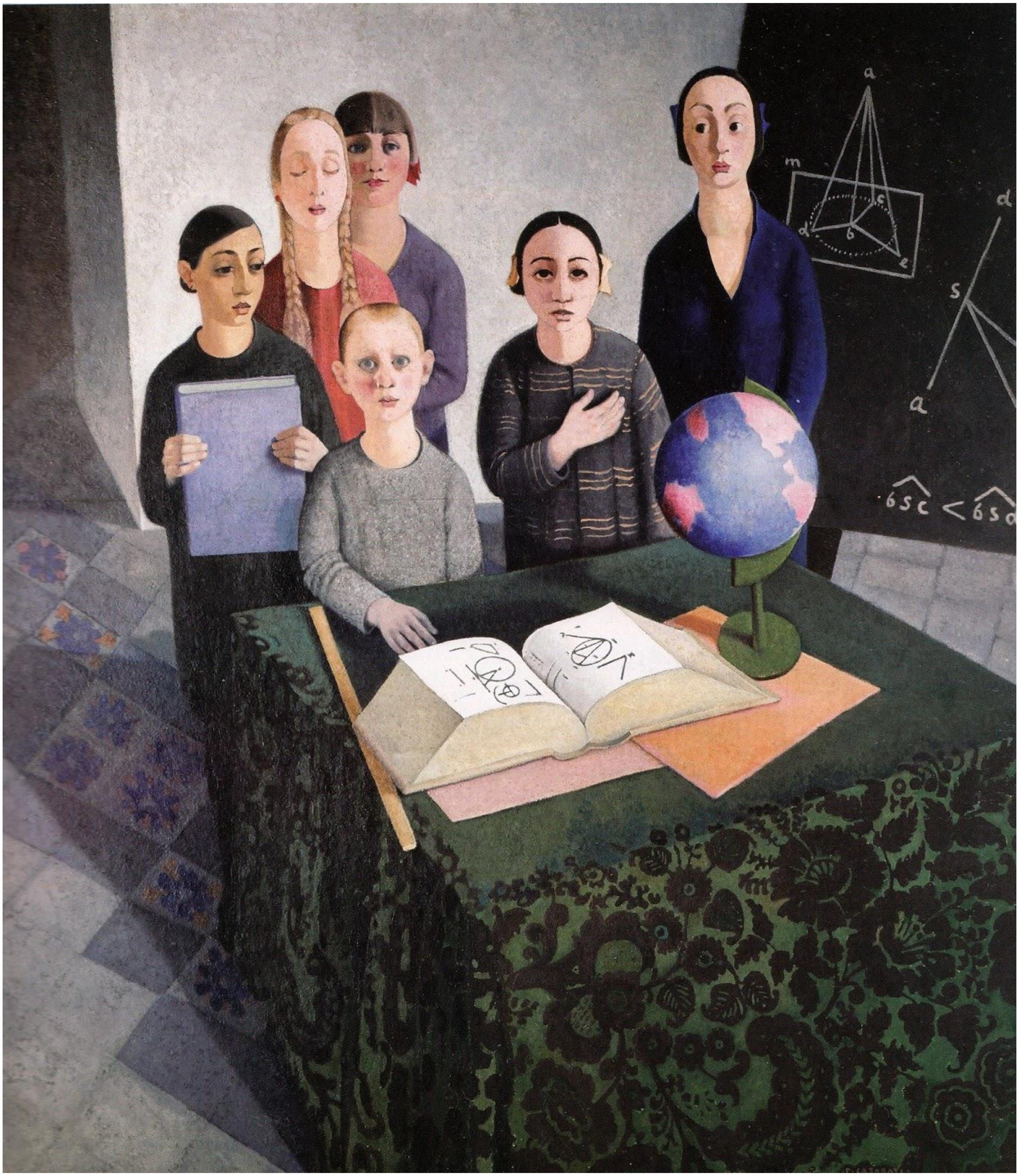


Felice Casorati. (1927) Gli scolari. Museo d'Arte moderna di Palermo.

CARLO FELICE MANARA.

NOTE PER IL LAVORO SUL TESTO *Ricostruiamo la matematica*…………………………..

[Testi dattiloscritti rieditati, aprile 2018]

INDICE

C. F . Manara. Note per il lavoro sul testo *Ricostruiamo la matematica*…………………………
[NdR. Testi dattiloscritti rieditati, aprile 2018]

Nota 1. MAPPE (1993)

I - MAPPA DELLA MATEMATICA COME ATTIVITÀ.

1. La didattica della matematica è diversa da quella delle altre discipline, perché l'apprendimento della matematica deve essere sostanzialmente una re-invenzione, una costruzione autonoma di strutture, che hanno i loro fondamenti nell'esperienza del mondo reale. Le esperienze elementari sono anzitutto quelle delle osservazioni o delle manipolazioni eseguite sugli insiemi finiti di oggetti (esperienze che danno origine ai concetti dell'aritmetica) ed in secondo luogo quelle che nascono dal porsi razionale del soggetto rispetto agli oggetti appartenenti all'ambiente che ci circonda (esperienze che danno origine ai concetti della geometria; si vedano anche le altre Mappe). In questo stretto legame con l'esperienza, e nella deduzione rigorosa, la matematica trova la sua giustificazione e la sua validità; essa infatti non si riduce ad un puro gioco con strutture artificiali, anche se·queste sono molto coerenti ed interessanti (si pensi ai vari giochi di strategia e di intelligenza, per esempio al gioco degli scacchi).

2. La formazione del concetto è quasi sempre accompagnata dalla formazione di un'immagine mentale. Questa può essere molto utile, ma spesso è anche fuorviante. Inoltre, l'immagine non può sostituire il concetto, perché al massimo può servire da stimolo, ma non può essere il fondamento per una deduzione rigorosa. La possibilità di costruire immagini può essere considerata come uno dei grandi vantaggi e ed anche dei grandi pericoli della geometria. Si pensi per esempio al concetto di "cilindro circolare retto": per la maggioranza delle persone questo concetto è collegato all'immagine mentale di un oggetto che è pressappoco simile alla lattina di Coca-Cola. Invece anche il "Compact disk" o il capello stirato, considerati come oggetti tridimensionali, rispondono alla definizione di cilindro circolare retto; a questi oggetti possono quindi essere applicati tutti i ragionamenti che sono validi pe il concetto di cilindro circolare retto.

3. La deduzione rigorosa è una delle caratteristiche della matematica: è la procedura che garantisce la certezza delle conclusioni e quindi la loro validità. In geometria, a partire dall'opera di Euclide, la deduzione viene fatta in forma verbale, secondo le leggi abituali della logica comune. Con l'evoluzione storica, la matematica viene caratterizzata sempre di più dall'impiego di simboli artificiali e dalla deduzione eseguita mediante l'applicazione delle leggi sintattiche di questi simboli: un esempio tipico è fornito dall'aritmetica, nella quale le deduzioni prendono la forma di calcoli, e questi sono eseguiti con l'impiego di procedure standardizzate (algoritmi) che sono in sostanza delle applicazioni delle regole sintattiche dei simboli; regole che si fondano sulle leggi delle manipolazioni degli insiemi, ed in definitiva quindi sulla logica.

4. Non interessa qui approfondire la definizione di "concetto"; limitiamoci a ricordare che esso può essere utilizzato in modo valido come predicato, in molte frasi che riguardano soggetti diversi; (per esempio il concetto "uomo" può essere utilizzato in infinite frasi: «Socrate è un uomo, Pompeo è un uomo, Cesare è un uomo, Tito è un uomo ecc.»). Solo l'impiego del concetto permette la deduzione rigorosa.

5. La costruzione del concetto viene di solito accompagnata dalla formazione di un simbolo, il quale presenta il concetto alla nostra mente e soprattutto serve per esprimere il concetto e comunicarlo agli altri. Nel caso del linguaggio comune, il simbolo abitualmente utilizzato è una parola (o un gruppo di parole); per la matematica si ha in generale la costruzione di un simbolo artificiale, che rappresenta il concetto in modo convenzionale e rigoroso. Tuttavia, è noto che possono esistere vari tipi di simboli: si pensi per esempio a quei simboli iconici che vorrebbero dare indicazioni in modo diretto, senza passare attraverso la parola (l'omino che fugge, la sigaretta o la pipa cancellate, molti segnali stradali ecc.). Di una categoria analoga a questa sono i disegni che servono da appoggio per la rappresentazione dei concetti della geometria; ma non servono per la deduzione rigorosa, che deve essere affidata soltanto alla concatenazione dei concetti (idea già esposta da Platone).

6. La matematica costruisce ed utilizza dei simboli molti validi ed efficaci, in quanto sono dotati di una sintassi; questa permette non soltanto la rappresentazione dei concetti, ma anche la deduzione rigorosa con l'utilizzazione delle leggi sintattiche: per esempio il nostro sistema di simboli convenzionali, che adottiamo per rappresentare i numeri naturali, si accompagna ad un insieme di regole, le quali permettono di rappresentare numeri comunque grandi e di eseguire le deduzioni (calcoli) mediante procedure standardizzate (algoritmi). Di solito i simboli sono tanto più potenti quanto più rigida è la loro sintassi: ciò richiede che la didattica della matematica si occupi anche dell'addestramento all'impiego sicuro, spedito e quasi automatico dei simboli: ma la didattica non può e non deve ridursi a questo addestramento.

7. Uno strumento di ragionamento e deduzione, che viene utilizzato di fatto, ed in modo pratico ed acritico, ad un certo livello concettuale, può diventare oggetto di riflessione e quindi di conoscenza metodica ad un livello concettuale superiore. Per esempio, le regole di sintassi, che si applicano nella pratica degli algoritmi dell'aritmetica, possono diventare esse stesse degli oggetti di studio ad un livello superiore, livello al quale l'algebra studia le leggi generali delle operazioni.

II - MAPPA DEI CONCETTI MATEMATICI

1. La mappa presenta un insieme di gerarchie logiche, ma non pretende di riprodurre la genesi psicologica dei concetti e l'evoluzione intellettuale che si verifica nel processo di apprendimento. Quindi lo scopo della mappa è quello di illuminare il lavoro didattico, non di prescrivere una procedura, che deve tener conto di moltissimi altri fattori.

2. Manipolazione, identificazione di parti che si trovano soltanto potenzialmente nella realtà fisica; attività varie che conducono alla identificazione ed alla costruzione di strutture (tagliare, confrontare, sommare, misurare ecc.).
3. Il concetto di "grandezza continua" nasce dall'astrazione che si esegue non sulla realtà immediatamente percepita, ma sull'immagine che la fantasia costruisce, ignorando le lacune ed i limiti dei sensi, ed estrapolando le sensazioni in vario modo.

III - MAPPA DEL CONCETTO DI NUMERO NATURALE.

1. Si può pensare che la genesi del concetto di numero naturale sia dovuta a due diversi tipi di esperienze elementari: quelle che portano al numero cardinale e quelle che portano al numero ordinale. Ed infatti in molte lingue esistono due diverse serie di vocaboli che esprimono questi concetti: in italiano: "uno, due tre ecc." (numeri cardinali) e "primo, secondo, terzo ecc." (concetti ordinali).

2. Si potrebbe dire che il numero cardinale identifica ciò che hanno in comune due insiemi finiti (di oggetti distinti) tra i quali interceda una corrispondenza biunivoca (bijezione).

3. La scrittura romana dei numeri si avvale di convenzioni che sottintendono la rappresentazione simbolica di gruppi particolari (I, V, X, L, C, D, M) e le operazioni di addizione e di sottrazione; quella araboindiana (oggi adottata dalla scienza e da tutti i popoli civili) sottintende operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza (del numero scelto come base).

4. G. Cantor [Georg Cantor. 1845-1918]

5. G. Peano [Giuseppe Peano. 1858-1932].

6. Scansione, successione diacronica di atti di pensiero, con la quale si identifica il posto di ogni elemento in un insieme, che risulta così ordinato. Il numero identifica il posto di ogni ben distinto elemento dell'insieme.

7. La seconda simbolizzazione è grafica (cioè rappresenta i numeri mediante simboli grafici) e si avvale di determinate convenzioni. Per esempio, si hanno le convenzioni romane e quelle arabo-indiane.

8. Un'operazione molto importante per la costruzione del concetto di numero naturale, e per la sua simbolizzazione, si potrebbe descrivere con l'espressione "contare per gruppi"; questa operazione richiede un atto di astrazione, che conduce a considerare il gruppo di oggetti come un tutto unico ed a trattarlo come una "unità" di specie superiore.

9. La nostra simbolizzazione si fonda sulla scelta di una base di numerazione (il 10) e sulla nota convenzione posizionale; ne consegue che con 10 soli simboli elementari (le cifre) si può rappresentare un numero naturale qualunque.

10. Le leggi fondamentali delle operazioni sui numeri fondano le regole di manovra dei simboli che si adottano.

11. Le regole di calcolo danno luogo ad algoritmi, cioè a procedure che possono essere realizzate in più stadi, in modo tale che, in ogni stadio, si tiene conto dei risultati dei precedenti (per esempio le regole di riporto nelle addizioni ecc.). Nell'applicazione degli algoritmi vi può essere qualche discrezionalità (per esempio la somma in colonna può essere eseguita partendo dall'alto oppure dal basso), ma tale discrezionalità non può diventare arbitrarietà: le leggi fondamentali delle operazioni devono sempre essere rispettate.

IV - MAPPA DEI CONTENUTI.

1. Nessuna scienza (e quindi in particolare neppure la matematica) può essere insegnata seguendo pedissequamente il suo sviluppo storico. Tuttavia, la considerazione dell'evoluzione storica del pensiero matematico è fondamentale per poter identificare le esperienze elementari, partendo dalle quali è stata costruita la matematica. In questo modo è possibile realizzare una didattica che parta da un contesto ricco e sia una reinvenzione attiva dei concetti e delle procedure; e permetta pertanto quella appropriazione dei concetti che fonda la loro conoscenza, per così dire, "dall'interno", ed il possesso sicuro delle procedure.

2. Vi sono due tipi di esperienze sugli insiemi finiti [si veda la MAPPA DEL CONCETTO DI NUMERO NATURALE]: tali esperienze conducono ad identificare due aspetti del concetto di numero: la cardinalità e l'ordinalità. Entrambi questi aspetti sono stati presentati in forma rigorosa [si veda ancora la Mappa citata]. Dall'esperienza i bambini traggono entrambi gli aspetti; la didattica può approfittare dell'esperienza elementare per una sintesi che porti ad una appropriazione vitale dei concetti e delle procedure.

3. I due filoni di contenuti, aritmetico e geometrico, si incontrano e confluiscono nella teoria della grandezza e della misura; teoria che richiede la costruzione di un sistema di simboli, costituiti dai numeri razionali.

4. Il punto di partenza sta nell'insieme delle manipolazioni degli oggetti e nelle relazioni del soggetto con l'ambiente fisico in cui è immerso.

5. La costruzione dell'immagine mentale è il risultato di una complessa operazione di astrazione (che conduce a concentrare l'attenzione su certi aspetti della realtà materiale ed a prescindere da altri aspetti), e di elaborazione delle sensazioni per opera della fantasia.

6. Un momento fondamentale di sviluppo intellettuale si verifica con il passaggio da una descrizione coerente e non contradditoria ma soggettiva della realtà, ad una descrizione

oggettiva, valida per ogni osservatore. Questo passaggio pone il germe per l'identificazione degli invarianti, sui quali si concentra l'impostazione della "geometria delle trasformazioni”.

7. La sintassi dei simboli non è arbitraria, ma da una parte traduce le proprietà della realtà simbolizzata, e dall'altra permette la deduzione.

V - MAPPA DEL CONCETTO DI NUMERO RAZIONALE.

1. La divisibilità non deve essere confusa con la continuità. Questa era considerata in passato come una proprietà intuitiva della materia e di certe figure geometriche. L’enunciazione rigorosa ed esplicita del concetto di continuità risale alla seconda metà del secolo XIX, ed ha accompagnato la costruzione rigorosa del concetto di numero reale.

2. Si ammette che le grandezze che vengono considerate in geometria elementare e nella fisica classica soddisfino alla proposizione detta "di Archimede": «Date due grandezze, l'una più piccola dell'altra, esiste sempre un multiplo della prima che supera la seconda». Alcuni Autori chiamano questa proposizione "postulato" oppure "assioma" di Archimede. Il fatto che una proposizione qualunque (e non soltanto questa) sia da qualificarsi come assioma o come teorema (perché può essere dimostrata) non dipende dalla proposizione stessa, presa isolatamente, ma dalla teoria nella quale essa viene inserita.

3. Il concetto di "grandezza" traduce teoricamente, a livello astratto, certe importanti proprietà di moltissime classi di enti della realtà concreta: lunghezze, aree, volumi, capacità, pesi, prezzi, somme di denaro, durate, intensità di correnti elettriche, differenze di potenziale elettrico, velocità ecc. ecc. In ogni specifica classe di enti concreti esiste una tecnica per verificare il sussistere della relazione di equivalenza. Tuttavia, adottiamo un unico simbolo, e precisamente il simbolo "=", per indicare tale relazione, perché, a livello astratto essa è qualificata dalle sue proprietà formali: riflessiva, simmetrica e transitiva. E tali proprietà sono quelle che permettono la deduzione rigorosa, nei ragionamenti matematici. Tuttavia, alcuni Autori utilizzano spesso delle notazioni particolari per indicare alcune relazioni di equivalenza sulle quali essi vogliono attirare l'attenzione: un esempio di ciò è la relazione di equivalenza tra figure poligonali piane, che nasce dalla uguaglianza di area; relazione alla quale alcuni Autori di testi riservano, quasi in esclusiva, il nome di "equivalenza".

4. In questa teoria, il termine "somma" viene utilizzato di solito in due significati diversi: per indicare una determinata operazione di composizione interna in un insieme, e per indicare il risultato di tale operazione. Anche per realizzare l'operazione di “somma”, in ogni classe di grandezze del mondo reale, esistono delle procedure specifiche: per es. il segmento "somma" di due altri non si ottiene con le stesse procedure con cui si ottiene il peso "somma” di due altri. Tuttavia, scegliamo di indicare l'operazione con l'unico simbolo “+”, perché, a livello astratto, l'operazione stessa viene qualificata dalle sue proprietà formali: commutativa, ed associativa; e distributiva rispetto alle varie operazioni di "prodotto".

5. L'operazione di somma entra nell’espressione di altre proprietà delle grandezze, considerate elementarmente: la divisibilità assicura che ogni grandezza, diversa dalla grandezza zero, può essere considerata come la somma di due altre, ognuna diversa dalla grandezza zero. La monotonia assicura che se la somma di due (o più) grandezze è la grandezza zero, allora ogni addendo è la grandezza zero. Mediante queste proprietà si può introdurre in ogni classe di grandezze un ordinamento; nella trattazione elementare si accetta che tale ordinamento sia un ordinamento totale; cioè che due grandezze di una classe di grandezze omogenee siano sempre confrontabili.

6. La trattazione della proprietà di continuità delle grandezze di una classe è strettamente collegata con quella di insiemi di infinite grandezze della classe; e la sua espressione simbolica è collegata con la considerazione di classi di infiniti numeri razionali, che costituiscono i numeri detti "reali". In forma elementare, per le grandezze assolute ed archimedee, la proprietà di continuità può essere enunciata postulando che: «Dato un insieme superiormente limitato di grandezze, tutte appartenenti alla stessa classe di grandezze omogenee, esiste una grandezza della classe che è l'estremo superiore delle grandezze dell'insieme».

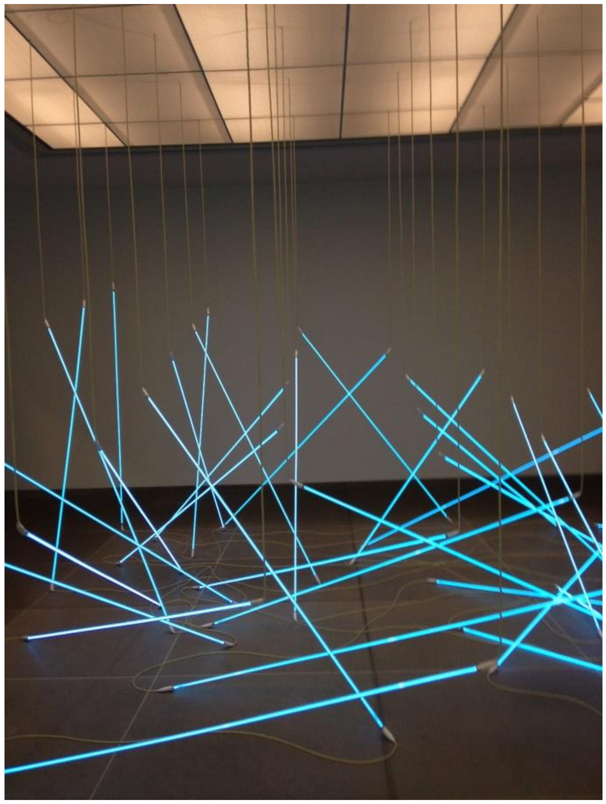
7. Nasce un insieme di nuovi concetti e quindi di nuovi simboli, insieme che costituisce un ampliamento del 'insieme dei numeri naturali; per questi nuovi simboli si definisce una sintassi, cioè un insieme di regole di calcolo, che permettono la deduzione, e soprattutto permettono di rappresentare le nostre operazioni sulle grandezze. La manovra di questi simboli presenta per i discenti una difficoltà psicologica che è nuova rispetto a quelle presentate dalla applicazione delle regole sintattiche dei simboli dei numeri naturali: infatti un singolo numero razionale può essere rappresentato in infiniti modi, con una frazione qualsiasi appartenente ad una medesima classe di frazioni equivalenti. La relazione di equivalenza tra frazioni viene giustificata nell'atteggiamento che conduce a considerare la frazione come un operatore fra grandezze: infatti due frazioni, esteriormente diverse tra loro, sono dette equivalenti quando danno lo stesso risultato, considerate come operatori su una grandezza qualunque. La classe di equivalenza di frazioni (considerate come operatori tra grandezze) viene considerata come un tutto unico; per questi nuovi enti si possono definire delle relazioni e delle operazioni. E ciò autorizza ad attribuire a questi nuovi enti il nome di *numeri razionali*.

8. Quando si consideri il numero razionale come un operatore tra grandezze, è possibile costruire infinite grandezze di una classe a partire da una di esse; se quest'ultima viene chiamata "unità di misura", allora il numero razionale che dà una grandezza qualunque può essere chiamato "misura" di questa, rispetto alla grandezza scelta come unità. È questo il punto di partenza per la codificazione della realtà mediante simboli matematici; codificazione che stabilisce un "isomorfismo" tra le operazioni sulle grandezze e quelle eseguite sulle loro rappresentazioni simboliche: si dimostra infatti che: "la misura di una grandezza che è somma di due altre è la somma delle misure di queste".

9. Ci si domanda se ogni grandezza è rappresentabile mediante un numero razionale (beninteso quando sia stata fissata una grandezza come unità di misura). La risposta è

NEGATIVA: l'insieme delle grandezze è molto più ricco dell'insieme dei numeri razionali. Quando una grandezza viene rappresentata da una misura che è un numero razionale, essa viene detta "commensurabile" con l'unità di misura. Ma la geometria ci offre degli esempi di grandezze che non sono rappresentabili con una misura razionale; esse vengono chiamate "incommensurabili" con l'unità di misura. Tale è per esempio la diagonale di un quadrato quando si assuma il lato come unità, e la circonferenza, quando si assuma il raggio come unità.

Lo strumento concettuale che permette di dominare ogni grandezza continua è il "numero reale". In forma molto sommaria, si potrebbe dire che i numeri reali sono classi superiormente limitate di infiniti numeri razionali, per le quali si definiscono opportune relazioni ed operazioni.



Norimberga Neues Museum. F. Morellet. L'avalanche. ***Come rappresentarsi rette sghembe……***

NdR. Si può vedere anche in rete: Paolo Valabrega. Matematica archimedea e non.
https://www.accademiadellescienze.it/attivita/editoria/periodici-e-collane/quaderni/quaderni-n-28-2017

Nota 2. CFM. Per il CAPITOLO II - IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA

Matematica e realtà.

Nel Capitolo precedente abbiamo trattato del concetto di grandezza e dell'operazione di misura delle grandezze. Vogliamo qui ritornare a riflettere su ciò che abbiamo detto, allo scopo di guardare i concetti presentati da un punto di vista più generale ed elevato. Cercando di riassumere in breve ciò che abbiamo detto finora, potremmo osservare anzitutto che la matematica ci ha offerto gli strumenti per rappresentare con precisione la realtà materiale e conoscere le sue proprietà. Non intendiamo precisare qui che cosa sia la matematica; infatti la moderna evoluzione critica sconsiglia di pronunciare o di scrivere delle frasi come: "La matematica è la scienza che studia queste e quest'altre cose, con questi e quest'altri metodi o frasi dello stesso tipo, che si potevano leggere frequentemente in una certa manualistica oggi superata, e che sono forse ancora oggi pronunciate o scritte da qualche autore dotato di una certa ingenuità o sprovvedutezza. (Questo nostro atteggiamento è giustificato anche dal fatto che la dottrina, comunemente chiamata l'matematica", ci si presenta oggi sotto diversi aspetti, che sarebbe difficile (e forse inutile) elencare in modo completo.

Vogliamo tuttavia qui soffermarci su un aspetto della matematica, che si presenta come particolarmente importante nell'insegnamento elementare: vogliamo dire della matematica come insieme di concetti e di simboli diretti a comprendere e descrivere la realtà, la quale è oggetto di un certo insieme di esperienze elementari fatte dal giovane in età scolare preadolescenziale. Diremo brevemente che in questo ordine di idee la matematica ci si presenta come un linguaggio, che ha certi scopi e che ubbidisce a certe regole.

È facile osservare che uno dei primi incontri del bambino con i concetti matematici lo porta a costruire il concetto di numero naturale: questo viene elaborato con due atteggiamenti, che sono in certo modo paralleli e complementari; infatti molto presto viene costruito il concetto di numero naturale cardinale e di numero naturale ordinale. Ciò è testimoniato anche dal fatto che presso molte lingue (morte oppure ancora vive) esistono due serie di vocaboli dedicati a rappresentare questi due aspetti del numero: per esempio in italiano abbiamo: uno, due, tre, quattro ecc., ed anche primo, secondo, terzo, quarto ecc. Tuttavia, è immediato osservare che questo linguaggio matematico, in origine del tutto spontaneo e naturale, è diventato, attraverso una evoluzione millenaria, uno strumento di espressione che è anche convenzionale, e quindi una specie di linguaggio cifrato, codificato con regole che non a tutti appaiono facili, naturali ed immediate.

Le operazioni elementari: i conteggi.

Abbiamo detto che uno degli aspetti della matematica (non l'unico, ma quello che più ci interessa in questa sede) è l'aspetto di linguaggio, cioè l'aspetto di un insieme di concetti e di simboli convenzionali, per rappresentare una certa realtà che intendiamo conoscere (per varie ragioni che qui non interessano). Le operazioni iniziali con cui giungiamo a questa costruzione di concetti ed a questa rappresentazione convenzionale sono il conteggio e la misura.

Non ci dilunghiamo sull'operazione di conteggio, che conduce al concetto di numero naturale; qui osserviamo soltanto che la costruzione del concetto è soltanto una delle operazioni che conducono alla formazione dell'edificio matematico; un secondo ed importantissimo momento è la costruzione di un insieme di simboli, che rappresentano i concetti, e le operazioni da noi eseguite sulla realtà rappresentata da questi. Così, per esempio, abbiamo detto che l'operazione di conteggio degli elementi di un insieme finito conduce alla costruzione dei numeri naturali; su questi noi eseguiamo delle operazioni che rappresentano certe manipolazioni, da noi attuate sugli insiemi finiti di elementi. E le leggi di queste ultime manipolazioni sono riprodotte poi dalle leggi delle operazioni sui numeri naturali che rappresentano gli insiemi.

Per fare un esempio, indichiamo qui con A e B due insiemi finiti; indichiamo poi, secondo le convenzioni abituali dell'insiemistica, con i simboli: $A \, U \, B$; $A \cap B$; $A \times B$ gli insiemi che risultano rispettivamente dalla operazione di unione ed intersezione tra A e B, e dalla costruzione dell'insieme prodotto cartesiano dei due. Adottiamo infine il simbolo: $|A|$ (da leggersi "numero degli elementi di A", o cardinalità di A, per indicare il numero cardinale degli elementi di A; ovviamente se A è l'insieme vuoto tale numero sarà lo zero: si avrà cioè:

(1) Se è $A = \emptyset$ allora è $|A| = 0$ e viceversa. Analoghe notazioni useremo per B e per altri insiemi finiti.

Il simbolo che indica la cardinalità ubbidisce a certe regole sintattiche, che giustificano la sua utilizzazione per codificare operazioni tra insiemi finiti. Precisamente si ha:

(2) $$|(A \, U \, B) \,| + |(A \cap B)| = |A| + |B|;$$

(3) $$|(A \times B)| = |A| \cdot |B|.$$

Le formule scritte indicano quindi un certo parallelismo tra le operazioni note tra insiemi e quelle aritmetiche tra i numeri che li rappresentano, per certi scopi. Ed ovviamente questo parallelismo giustifica l'impiego dei numeri naturali nelle questioni riguardanti gli insiemi finiti. In particolare, se i due insiemi finiti A e B sono privi di elementi comuni (cioè, come suol dirsi, sono insiemi "disgiunti"), si ha:

(5) $$A \cup B = \emptyset,$$

e quindi, per la (1):

(6) $$|(A \cap B)| = 0.$$

In questo caso, agli insiemi considerati corrispondono, per conteggio, due numeri naturali, che chiameremo rispettivamente a e b; all'operazione di unione dei due insiemi, corrisponde l'operazione di somma dei due numeri a e b che li rappresentano (a questo fine); all'operazione di costruzione dell'insieme prodotto cartesiano dei due corrisponde l'operazione di moltiplicazione dei due numeri; le proprietà delle due operazioni sui numeri, ora ricordate (addizione e moltiplicazione), corrispondono alle proprietà delle operazioni eseguite sugli insiemi (unione e costruzione dell'insieme prodotto cartesiano).

Le operazioni elementari: la misura.

Abbiamo visto che l'operazione di conteggio degli elementi di un insieme finito conduce al concetto di numero naturale. Ma nell'opera di rappresentazione della realtà le operazioni di conteggio non sono sempre sufficienti: infatti in moltissime occasioni della vita quotidiana, della tecnica e della scienza, per la conoscenza della realtà è molto utile, se non addirittura necessaria, un'altra operazione che viene chiamata "misura". Infatti, in molte situazioni la realtà ci si presenta sotto un aspetto più ricco ed articolato di quello dell'insieme finito di elementi. Il concetto più frequentemente utilizzato per dominare queste situazioni viene di solito presentato con il termine ”grandezza”; e l'operazione di misura potrebbe essere presentata come una procedura per rappresentare convenzionalmente una grandezza mediante il linguaggio matematico.

Pertanto, si potrebbe dire che, da un certo punto di vista, questa rappresentazione è analoga a quella che si esegue per tradurre da una lingua in un'altra, o utilizzare un codice, un sistema di cifrazione. Infatti, un sistema cosiffatto comunica delle informazioni e dei concetti in forma convenzionale; ma per conoscere le informazioni trasmesse è necessario conoscere il codice, la cifra, e sapere tradurre le informazioni dal linguaggio cifrato nel linguaggio comune. Queste circostanze si verificano in un modo specifico e particolare anche nell'impiego del linguaggio matematico; a tal punto che c'è stato chi, in forma umoristica, ha dichiarato che conoscere la matematica non è altro che "saper cifrare e decifrare".

Questo enunciato, al di là della forma un poco scherzosa, spiega forse anche certe difficoltà incontrate da certe menti nell'apprendere e nell'usare il linguaggio matematico; cosa che invece per altri soggetti risulta molto più facile. E così possono forse anche essere spiegate, almeno in parte, certe difficoltà che si incontrano nella didattica della matematica, e soprattutto anche certi equivoci e procedure poco efficaci in questo contesto.

Sappiamo che la rappresentazione della realtà che viene data con l'operazione di misura richiede (come vedremo) l'impiego di concetti e di simboli più generali (e quindi più potenti) rispetto ai numeri naturali, che si impiegano per rappresentare e conoscere gli insiemi finiti. Il concetto radicalmente nuovo che si presenta in questo contesto è quello di "numero razionale", il quale viene rappresentato con certi strumenti tradizionali: le frazioni ed i cosiddetti "numeri decimali". Questi ultimi sono soltanto delle frazioni particolari, che tuttavia sono presentate in modo speciale, con rappresentazioni convenzionali che ne rendono molto facile l'impiego, secondo determinate regole; le quali vengono insegnate nelle scuole elementari, appunto in forza della grandissima utilità e della diffusione di questi strumenti di rappresentazione e di calcolo.

Parole e numeri.

Abbiamo visto che i numeri servono per rappresentare certi oggetti della realtà: insiemi finiti (mediante il conteggio), le grandezze (mediante l'operazione di misura). Ma possiamo osservare che questi strumenti matematici sono utili non soltanto allo scopo di rappresentare gli oggetti della realtà; infatti, se gli strumenti sono stati impiegati in determinati modi, essi permettono anche di dedurre delle informazioni sulla realtà rappresentata. Abbiamo già osservato che esiste un parallelismo molto stretto tra l'operazione concreta di riunione di due insiemi finiti che non hanno elementi comuni e l'operazione di somma dei numeri naturali che li rappresentano: i numeri naturali rappresentanti i due insiemi sono stati ottenuti con l'operazione di conteggio, eseguita su ognuno degli insiemi; l'operazione di somma permette di evitare il conteggio degli elementi dell'insieme riunione. Quindi un'operazione eseguita sui simboli ci permette di prevedere il risultato di un'operazione concreta, senza bisogno di ulteriori conteggi; in altre parole, l'operazione sui numeri ci permette di concludere con certezza che gli elementi dell'insieme riunione dei due dovranno essere rappresentati da un certo numero.

Anche l'operazione di misura ci permette non soltanto di rappresentare (con certe convenzioni) le grandezze, ma anche di prevedere le conseguenze ed i risultati di certe operazioni concrete, o di certe manipolazioni che intendiamo eseguire o che abbiamo eseguito sugli oggetti rappresentati. Così per esempio, sappiamo che, conoscendo le misure delle lunghezze dei lati di un rettangolo, è possibile ottenere con certezza la misura dell'area dello stesso, operando soltanto sui numeri. Quindi il linguaggio matematico permette di conoscere con certezza le conseguenze, i risultati di certe operazioni eseguite, o da eseguire, sulla realtà.

È questa una circostanza che giustifica e spiega la grandissima importanza della matematica nella tecnica e nella scienza di oggi. In questo ordine di idee, il grande Galileo Galilei, nel suo dialogo intitolato "Il saggiatore" ha scritto:

«La filosofia [cioè la scienza della natura, secondo la terminologia di Galileo, diversa da quella oggi in uso] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscere i caratteri né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica...»

E difatti possiamo osservare che i numeri vengono utilizzati quotidianamente in moltissimi casi: pensiamo ai numeri civici dei portoni nelle vie, alle taglie dei vestiti, ai numeri delle calzature, alle indicazioni delle ore e delle date, alle indicazioni di temperatura, alle indicazioni in decibel delle intensità dei rumori ecc. ecc. Sono rari i casi in cui il numero viene impiegato soltanto come nome di qualche cosa o di qualche oggetto (come avviene per esempio con le linee tranviarie di qualche città); quasi sempre l'impiego del linguaggio numerico ha una sua giustificazione ed un suo scopo, anche se talvolta le convenzioni che fondano l'impiego dei numeri non appaiono con immediata chiarezza. Ciò avviene in certe situazioni tradizionali: per esempio, nel caso delle munizioni di certe armi da fuoco che servono per la caccia, l'indicazione numerica serve a precisare quante unità occorrono per formare un certo peso di piombo: quindi per esempio i pallini "del 12" sono più piccoli dei pallini "del 4"; nel primo caso infatti occorrono 12 pallini per raggiungere il peso di una libbra (unità tradizionale di peso presso i paesi anglosassoni) mentre nel secondo caso ne bastano 4.

In moltissimi casi l'impiego dei numeri permette una rappresentazione della realtà che è molto più precisa di quella che si ha con l'impiego delle parole del linguaggio comune abituale: è chiaro che se pronuncio il numero degli elementi di un insieme dò un'informazione molto più precisa di quella che darei pronunciando semplicemente dei termini come "tanti" oppure "pochi". Ma soprattutto dò delle informazioni che, come abbiamo già visto, possono essere utilizzate per ulteriori ragionamenti e deduzioni.

Le operazioni di misura.

Abbiamo visto che sostanzialmente la misura di una grandezza fornisce delle informazioni atte a rappresentarla con precisione, ed utili per le ulteriori elaborazioni e per le deduzioni che estendono ed approfondiscono le nostre conoscenze della realtà. Ma nel precedente paragrafo abbiamo anche visto che i numeri possono essere utilizzati anche in modo diverso da quello che si riferisce alla misura, nel senso abituale del termine.

In altre parole, si potrebbe dire che la misura di una grandezza è una informazione che si avvale del linguaggio matematico; ma che non tutte le informazioni sulla realtà che vengono fornite con numeri sono delle misure. In particolare, per esempio i numeri che, nella pratica e nella Fisica, indicano delle temperature non sono delle misure, nel significato stretto e specifico che qui vogliamo dare al termine; anche se, nella pratica, è invalso l'uso di esprimersi dicendo che "si misura la temperatura".

Volendo analizzare ulteriormente il concetto di misura, possiamo osservare che l'operazione di misura di una grandezza richiede la scelta di una grandezza omogenea a quella da misurare, ed il confronto delle due; inoltre è richiesta anche la costruzione dei multipli e dei sottomultipli della grandezza campione, scelta come unità di misura. E questa costruzione dei multipli non è eseguibile negli altri casi (dei quali abbiamo dato qualche esempio), in cui i numeri sono utilizzati per la rappresentazione di certi oggetti della realtà.

Un esempio abbastanza importante si incontra nell'impiego dei numeri per le informazioni che riguardano il tempo: infatti in questo contesto i numeri possono essere impiegati per misurare delle durate, cioè, come si suol dire, degli intervalli di tempo. Ma essi sono anche utilizzati per indicare degli istanti nei quali si verificano, o si debbono verificare, certi avvenimenti, come avviene per esempio con gli orari ferroviari. Queste ultime indicazioni non sono di solito considerate come delle misure, soprattutto perché sarebbe difficile dare un significato preciso ai loro multipli: sarebbe per esempio poco consueto fare "il doppio delle 15 e 5 minuti" [osserviamo tuttavia che è possibile interpretare l'indicazione anche come misura della durata tra la mezzanotte precedente un dato istante e l'istante stesso; ma non è evidentemente questo l'atteggiamento abituale di chi consulta un orario ferroviario]. Tuttavia, non ci sono dubbi sul fatto che l'orario ferroviario ci fornisce delle indicazioni utili, impiegando i numeri.

Osserviamo infine che spesso la misurazione di una grandezza, mediante scelta di una unità di misura, conduce ad immaginare la grandezza stessa come costituita da certe parti, che non sono di fatto esplicitamente segnate in essa: per esempio quando un lato della cattedra è misurato in decimetri, o in palmi, o in pollici, le suddivisioni sono soltanto immaginate, e non esistono di fatto nell'oggetto materiale. In altra forma si potrebbe dire che la procedura di misura richiede a chi la compie una operazione mentale in più rispetto al conteggio degli elementi di un insieme. In quest'ultimo caso infatti gli elementi sono di fatto distinti tra loro, mentre nelle procedure di misura occorre immaginare la grandezza complessiva come costituita dai singoli elementi, e questi dipendono dalla scelta dell'unità di misura che si adotta e non sono segnati, di fatto, nella grandezza da misurare.

Errori ed approssimazioni.

Possiamo ora riassumere le considerazioni fin qui svolte, dicendo che le operazioni di misura (ed i loro risultati) forniscono delle informazioni che permettono un grande numero di deduzioni a proposito delle manipolazioni della realtà che abbiamo fatto o che intendiamo fare.

Per esempio, abbiamo visto che la conoscenza delle misure delle lunghezze dei lati di un rettangolo permette di calcolare l'area dello stesso con operazioni molto semplici, eseguite sui numeri che si conoscono. Si potrebbero rappresentare le lunghezze dei lati anche in altri modi, servendosi pur sempre di numeri, ma allora il calcolo dell'area del rettangolo richiederebbe delle operazioni diverse dalla semplice moltiplicazione. Ma non si può escludere che in qualche caso siano opportune e utili delle rappresentazioni diverse.

Osserviamo tuttavia che l'operazione di misura di una grandezza, nella pratica ed anche nella scienza, è quasi sempre accompagnata da una certa incertezza: è noto infatti che, quando si ripete molte volte una certa operazione di misura, quasi mai si ottengono sempre gli stessi numeri. Questo fatto è alla base di una teoria importantissima della Fisica, che viene chiamata teoria degli errori di osservazione e che fu sviluppata ai suoi inizi dal grande matematico tedesco Carlo Federico Gauss [1777-1855], a proposito delle osservazioni astronomiche.

Inoltre, in ogni particolare questione, esistono certi limiti, che si potrebbero chiamare addirittura “naturali”, e specifici della singola questione, al di sotto dei quali le informazioni che si forniscono con i numeri cessano di avere utilità, o diventano addirittura occasioni di confusione.

Per esempio, per quanto riguarda l'impiego dei numeri per fornire informazioni riguardanti il tempo, si ha che ai fini della determinazione della età di una persona, la precisione delle indicazioni non va al di sotto del giorno; e lo stesso si può dire per quanto riguarda le operazioni finanziarie e bancarie; ai fini delle informazioni riguardanti il traffico ferroviario la precisione delle indicazioni non va al di sotto del minuto. Invece per certe questioni riguardanti gli sport in cui si hanno delle grandi velocità (automobilismo, sci, ecc.) si usa indicare anche le frazioni molto piccole di secondo. Per gli usi scientifici poi, ed in particolare per la Fisica, occorre scendere a frazioni ancora molto più piccole dei secondi.

Cose del tutto analoghe si potrebbero dire anche per gli altri impieghi dei numeri, in particolare per le misure. Per esempio, sarebbe considerato ridicolo che un architetto indicasse le dimensioni delle case che progetta con i decimi di millimetro; ma un ingegnere che progetta un motore di auto deve in certi casi indicare anche i centesimi di millimetro nei suoi progetti. Si presentano di solito queste considerazioni dicendo che in una determinata questione che implica delle misure “si trascurano” oppure “non si prendono in considerazione” le grandezze che sono più piccole di una determinata grandezza; e quindi si trascurano le loro misure. Così si suoI dire che in Architettura si trascurano le misure del millimetro o inferiori, ecc.

Occorre tuttavia ricordare che ciò è accettabile soltanto nella pratica, e che la misura trascurabile dipende essenzialmente dalla questione che si sta considerando, come abbiamo visto dagli esempi apportati. In altre parole, non esistono in assoluto grandezze piccole, e quindi misure piccole, che siano sempre trascurabili; infatti la determinazione delle grandezze che si possono trascurare dipende da ogni singola questione concreta.

Si può presentare questo stesso argomento in altre parole dicendo che, nella pratica manipolazione degli oggetti materiali, l'operazione di misura porta con sé degli errori, cioè dei limiti dell'informazione che si fornisce con il linguaggio matematico. Nella tecnica e nella scienza si cerca di rendere questi errori i più piccoli possibile, per esempio usando strumenti sempre più raffinati e ripetendo le osservazioni e le misure, quando ciò sia possibile.

Tuttavia, si suole attribuire al concetto generale e teorico di grandezza una proprietà che viene chiamata "continuità"; ritorneremo su questo argomento nel seguito. Qui osserviamo soltanto che, secondo la visione teorica astratta, la matematica possiede gli strumenti che permettono di migliorare le informazioni che si posseggono, nella misura in cui tale miglioramento è utile per determinate questioni.

Ciò è molto importante per comprendere il significato dell'impiego degli strumenti del linguaggio matematico nella conoscenza della realtà fisica; infatti proprio l'astrattezza e la generalità di questo linguaggio gli permettono di fornire di volta in volta alla pratica ed alla tecnica gli strumenti concettuali per migliorare le informazioni che si hanno, quando ciò sia possibile.

Pertanto, occorre che i concetti siano ben chiari e distinti, in modo da non attribuire valore teorico assoluto alle esigenze (o alle pigre abitudini) della pratica. Per esempio capita di leggere o di ascoltare delle frasi come la seguente: "Un poligono regolare di molti lati si confonde in pratica con la circonferenza" o, peggio, "la circonferenza in pratica è un poligono regolare con moltissimi lati". Enunciati come questo portano spesso a confusioni concettuali e ad errori. Infatti, i due concetti, quello di circonferenza e quello di poligono regolare, sono sempre nettamente distinti; e possono esistere

Totem della Paganella (2018). ***I numeri indicati sono "sensati"*** **?**

delle questioni, di tecnica o di scienza, che obbligano a tener conto di questo fatto, e ad assumere (utilizzando gli strumenti della matematica) le informazioni che una visione grossolana tenderebbe a considerare come trascurabili o non importanti in assoluto.

Quindi il linguaggio matematico ha una grandissima potenza, ma occorre in ogni singola questione indagare bene il suo significato e la sua portata; in altra forma e con altre parole si potrebbe dire che le informazioni fornite dalla matematica nei riguardi di una realtà fisica o economica o tecnica, rappresentata con l'impiego del suo linguaggio, ben raramente sono esenti da errori; ma questi sono conseguenze quasi necessarie delle proprietà degli oggetti materiali rappresentati e non dipendono quindi dal linguaggio della matematica; anzi questa scienza offre gli strumenti concettuali per rendere gli errori il più piccoli possibile, in ogni determinata questione.

Per dare un esempio concreto di ciò che intendiamo dire consideriamo il caso di un poligono regolare di 1000 lati; tale poligono, con una parola derivata dalla lingua greca, potrebbe essere chiamato "kiliagono regolare" (così come il "kilometro" è la lunghezza di un cammino di 1000 metri), ed è ovviamente inscritto in una circonferenza, perché questo fatto è una proprietà di ogni poligono regolare. Sarebbe ben difficile costruirsi con la fantasia un'immagine di un poligono cosiffatto, distinta dall'immagine della circonferenza in cui esso è inscritto; ciò potrebbe indurre qualcuno a pronunciare la frase di cui abbiamo detto poco sopra: il poligono "...in pratica si confonde con la circonferenza". Questa affermazione potrebbe essere accettata quando si tratti di questioni riguardanti per esempio la costruzione di strade o di edifici, ma non è vera in assoluto. Infatti, le due figure (la circonferenza ed il kiliagono) sono ben distinte tra loro; e la matematica possiede gli strumenti per determinare alcune grandezze che mettono in risalto tale differenza, quando ciò sia necessario. Si immagini per esempio il kiliagono inscritto in una circonferenza che sia lunga 40000 km (cioè una circonferenza come quella che si otterrebbe secando la Terra (supposta perfettamente sferica) con un piano passante per i poli. In questo caso un lato del poligono è sotteso da un arco di circonferenza lungo 40 km. Ma il lato del poligono è ovviamente più corto di quell'arco; è possibile calcolare la differenza delle due lunghezze, e si trova che tale differenza è compresa tra 6,5793 e 6,5794 cm.

Anche se come abbiamo detto nella pratica dei viaggi ed in altre questioni concrete tale differenza può essere considerata come trascurabile, possono esistere delle questioni scientifiche e tecniche nelle quali occorre tenerne conto.

[SI POTREBBERO METTERE QUI, IN CODA, LE CONSIDERAZIONI GENERALI SULL'ERRORE CHE HO SCRITTO IN 081794, DOPO L'INCONTRO DI LUGANO CON CB.] IL TITOLO POTREBBE ESSERE, PER ESEMPIO: ANCORA SULL'ERRORE (O SUL CONCETTO DI ERRORE), IN MODO DA NON FARE CONFUSIONE IN SEGUITO]. ……………………………..

ANCORA SULL'ERRORE (081794).

1 - Errore è un termine del linguaggio comune, che assume significati diversi, a volte anche lontani tra loro, a seconda del contesto nel quale viene impiegato.

Per esempio, Giacomo Leopardi, ancora molto giovane, scrisse un "Saggio sugli errori popolari degli antichi"; e qui il termine "errore" sta a indicare certe idee non esatte su molti fenomeni naturali che erano largamente diffuse fra gli antichi.

Ma supponiamo di incontrare, su una strada, a 150 km da Milano, un cartello con la scritta "A Milano 15 km"; oppure, percorrendo una strada comunale, supponiamo di incontrare un cartello con la scritta "A mt. 200 deviazione". In entrambi i casi i cartelli sarebbero sbagliati; ma nel primo caso si tratterebbe di una indicazione errata per il contenuto (perché di fatto Milano disterebbe di 150 km e non di 15); nel secondo caso il cartello conterrebbe un errore perché esso dà un'informazione esatta, cioè che il viaggiatore incontrerà una deviazione della strada dopo 200 metri; ma le convenzioni internazionali, accettate dall'Italia e diventate leggi del nostro Stato, impongono che l'indicazione di distanza sia data con la dicitura"200 m". In questo caso quindi l'errore consisterebbe non in una indicazione errata per il contenuto, ma nella violazione di una norma, che traduce una convenzione accettata universalmente.

In particolare, nell'impiego di una lingua si possono dare varie specie di errori: vi sono gli errori di ortografia, cioè violazioni delle convenzioni per la trasmissione grafica (scrittura) del pensiero: per esempio la scritta "un'amico"; infatti le due espressioni "un amico" ed "un'amico" vengono pronunciate esattamente nello stesso modo, e soltanto una norma ortografica convenzionale le distingue nella scrittura. Vi sono degli errori di grammatica: capita per esempio di leggere: "L'apotema di un esagono regolare è lunga 13 cm"; ma il termine "apotema", che viene dal greco, è di genere maschile, e quindi occorrerebbe scrivere: "è lungo"!, per rispettare la regola grammaticale che impone la concordanza di genere tra il sostantivo e l'aggettivo. Vi sono errori di sintassi: per esempio capita di udire frasi del tipo: "Se andavo lo incontravo", invece di: "Se fossi andato lo avrei incontrato". Vi sono poi errori di logica, nei quali le convenzioni sono rispettate, ma non è presente il collegamento profondo tra i significati delle espressioni. Un errore cosiffatto si incontra per esempio nella pseudo argomentazione seguente: "Tutti i bravi vincono: noi abbiamo vinto, dunque siamo bravi". Purtroppo, infatti, anche ammettendo che i bravi vincano, si può vincere anche per altre ragioni: per frode, per inganno, per corruzione ecc. Quindi il solo fatto di aver vinto non garantisce della bravura; e chi ha parlato così ha fatto confusione tra la condizione sufficiente e la necessaria.

2 - La rassegna, sommaria e rudimentale, di esempi che abbiamo presentato poco sopra vorrebbe mostrare che può essere possibile stabilire una specie di graduatoria degli errori: per esempio, nel caso degli errori nell'espressione linguistica, si può pensare che la violazione delle norme convenzionali sia meno grave del mancato rispetto dei collegamenti logici.

Nell'ambito didattico poi, un'analisi dell'errore è molto utile, per non dire addirittura necessaria, allo scopo di ben giudicare la risposta del discente all'azione didattica; non dovrebbe bastare infatti dire che "una risposta è sbagliata", ma occorrerebbe precisare a quale livello si situa un errore: in particolare se esso è soltanto una violazione di una norma convenzionale oppure se esso dimostra una incapacità di cogliere i collegamenti logici tra proposizioni; collegamenti che sono il fondamento di un ragionamento corretto.

La matematica presenta inoltre delle difficoltà specifiche nell'analisi degli eventuali errori: infatti la matematica ha anche l'aspetto di un linguaggio, cioè di un insieme di simboli per rappresentare dei concetti e le loro relazioni, ed un insieme di regole per utilizzare questi simboli a vari scopi. Queste regole sono molto rigide: si potrebbe infatti dire che non possono esistere in matematica degli errori di ortografia, analoghi a quelli che si possono fare quando ci si esprime con una lingua; in questo secondo caso infatti può avvenire che si riesca ad esprimere un pensiero, anche senza rispettare le convenzioni ortografiche; invece in matematica un errore che riguardi anche un solo simbolo convenzionale può condurci a scrivere delle successioni di simboli prive di senso, oppure a comunicare un concetto del tutto diverso dalle nostre intenzioni.

Per esempio, la successione di simboli:

$$3 + 2 \times 4) - 1$$

è priva di senso matematico, secondo le convenzioni comuni, anche se i simboli usati appartengono alla matematica: infatti ogni parentesi chiusa deve sempre essere preceduta da una parentesi aperta; e le due espressioni:

$$2 + 3 \times 5 \ , \qquad (2 + 3) \times 5$$

hanno significati del tutto diversi tra loro.

Non è quindi possibile trovarsi d'accordo con gli autori del noto "Lettera ad una professoressa", i quali, tra le altre piacevolezze, a proposito di matematica si esprimono in questi termini: “I compiti si correggono in un quarto d'ora; quelli che non sono giusti sono sbagliati».

3 - Ciò che precede induce a pensare non solo che sia opportuno fare un’analisi degli errori, per comprendere le lacune di apprendimento, ma forse anche scegliere dei termini che esprimano in qualche modo questa analisi; poiché nella nostra lingua esistono dei sinonimi del termine "errore"; si potrebbe per esempio pensare di chiamare gli uni “sbagli” e gli altri “errori”. Non intendiamo tuttavia formulare delle prescrizioni imperative e definitive; ci basti avere segnalato qualche difficoltà concettuale, che può avere influenza sull'azione didattica.

[081794R. A SEGUITO DELL'INCONTRO DEL 081694 A LUGANO]. 082194R.

Nota 3. CFM. OSSERVAZIONI PRELIMINARI ALLA COSTRUZIONE DI UNA MAPPA DELLA GEOMETRIA (Brescia, 4 novembre 1993).

“Il n'y a de nouveau que l'oublié”

1 - Che cosa è "geometria"?

È noto che la prima biografia del grande matematico, filosofo e teologo francese Blaise Pascal è stata scritta dalla sorella, Madame Périer; essa ricorda in particolare che il padre [Etienne Pascal, lui stesso matematico di qualche pregio] aveva proibito di studiare geometria, ed in particolare di leggere l'opera di Euclide, al figlio giovanissimo, del quale aveva valutato il genio. Temeva infatti che il ragazzo si immergesse talmente nello studio della matematica da trascurare ogni altra materia di studio; pertanto gli aveva promesso di lasciargli leggere l'opera di Euclide quando avesse fatto progressi abbastanza grandi nelle altre materie. Ma il giovane Blaise insisteva nel voler sapere che cosa fosse la geometria, finché il padre gli rispose che «...la geometria è la scienza del costruire le figure giuste e del trovare i rapporti che intercedono tra loro»; e gli proibì di parlare ancora di quell'argomento, ed addirittura di pensarci (1). La sorella racconta inoltre come il giovane Blaise si mettesse a pensare alla definizione che gli era stata data, e come utilizzasse le ore di ricreazione per trarne le conseguenze. Finché il padre lo sorprese mentre, durante le ore di ricreazione, da solo era arrivato alla 32-esima proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide.

E la biografa di Pascal aggiunge che il giovane Blaise aveva inventato per conto suo dei nomi per gli oggetti che prendeva in considerazione; egli chiamava un cerchio col nome di "tondo", ed una retta col nome di "sbarra".

L'epistemologia moderna non assume più atteggiamenti analoghi a quello del padre di Blaise Pascal; precisamente oggi preferiamo evitare di scrivere o pronunciare delle frasi del tipo, per esempio, della seguente: "La geometria è la scienza che studia queste e quest'altre cose in questo e quest'altro modo.” Mi limiterò quindi a descrivere qualche aspetto della dottrina che viene abitualmente chiamata "geometria”. In particolare l'aspetto sul quale mi soffermerò di più è quello che si potrebbe presentare dicendo che *la geometria è un primo passo con il quale un soggetto umano cerca di porsi razionalmente in rapporto con gli oggetti che lo circondano*; e dicendo "porsi razionalmente" intendo dire che un soggetto cerca di descrivere gli oggetti in modo preciso ed obbiettivo, e di dedurre con sicurezza certe conseguenze da poche premesse.

Questo atteggiamento, e questo aspetto della geometria, sono stati descritti dal grande matematico Federigo Enriques dicendo che, in questo modo, la geometria ci si presenta come "...il primo capitolo della fisica", cioè della conoscenza matematica del mondo. Questo modo di vedere non è nuovo; anzi la sua origine potrebbe essere fatta risalire all'epoca della crisi epistemologica rinascimentale, crisi dalla quale ebbe origine la scienza fisico-matematica come oggi la intendiamo. Per esempio, Galileo Galilei, nel dialogo intitolato "Il saggiatore" scrive: «*La filosofia (2) è critta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*.»

Si potrebbe dire, in altre parole, che se la matematica è la chiave di lettura della realtà materiale che ci circonda, per Galileo la geometria è il primo passo di questa lettura.

2 - Geometria ed esperienza.

I concetti della matematica, ed in particolare quelli della geometria, nascono dall'esperienza, la quale causa delle percezioni attinenti a diverse aree sensoriali. Nel caso della geometria si potrebbero individuare due ambiti sensoriali dai quali la nostra fantasia trae le immagini, e la nostra mente i concetti della geometria.

A) Area delle sensazioni visive:

A quest'area appartengono le sensazioni che nascono dall'osservazione di oggetti aventi particolari configurazioni (per esempio fili tesi, pezzi di superfici piane &c.), oppure di particolari fenomeni fisici (per esempio pennelli sottili di luce in stanze oscure e polverose). Inoltre, si traggono da quest'area le sensazioni che conducono alla consapevolezza delle relazioni di similitudine tra figure: per esempio si riconoscono le persone dai loro ritratti, si fanno disegni "in scala" &c.

B) Area delle sensazioni tattilo-muscolari:

A quest'area appartengono le sensazioni che derivano dalla manipolazione degli oggetti (che noi giudichiamo duri o molli, oppure lisci o scabri oppure pieghevoli o indeformabili ecc.); in particolare le sensazioni che nascono dalla manipolazione degli oggetti rigidi, e le sensazioni che vengono indotte in noi dalle forze che noi esercitiamo (per spostare o in genere manipolare gli oggetti), oppure che l'ambiente esercita su di noi (per esempio le forze derivanti dal campo gravitazionale, che forniscono il riferimento spaziale, iniziale ed elementare per ogni soggetto).

Da queste osservazioni elementari, spesso sovrapposte tra loro, indistinte e confuse, nasce la geometria, considerata come un atteggiamento attivo mirante a descrivere in modo preciso e coerente gli oggetti e l'ambiente ed a spiegare certe relazioni degli oggetti tra loro e con il soggetto.

Il porsi razionale e coerente del soggetto nei riguardi dell'ambiente passa per varie fasi, che cercheremo di descrivere ed analizzare, senza peraltro pretendere che le osservazioni che faremo riproducano esattamente l'evoluzione psicologica e mentale di ogni soggetto.

3 - Soggettivo, intersoggettivo ed oggettivo.

Un primo momento della descrizione della situazione del singolo nei riguardi dell'ambiente e degli oggetti è tipicamente soggettivo: l'ambiente viene percepito e quindi descritto in relazione al singolo osservatore. Appartengono a quest'ambito concettuale anzitutto la procedura che viene chiamata di "lateralizzazione", ed inoltre quell'insieme di concetti e di espressioni verbali appartenenti a quella che (un poco impropriamente rispetto all'uso matematico) viene chiamata "topologia"; in questo ambito le idee di "alto" e "basso" hanno le loro radici nel complesso di sensazioni fornite dal campo gravitazionale in cui siamo immersi; la "destra" e "sinistra", l'"avanti'' e il "dietro" hanno il loro fondamento nella struttura del nostro corpo. Infatti, gli astronauti nelle navicelle spaziali, in assenza di gravità, hanno grande difficoltà nel distinguere il pavimento dal soffitto della navicella; ed il distinguere la destra dalla sinistra sarebbe un compito difficile per una stella marina (supponendo che abbia bisogno di precisare questi concetti ed abbia gli strumenti per farlo), oppure per un animale a simmetria rotatoria, come una medusa.

Per giungere ad una descrizione razionale dell'ambiente, occorre che l’oggetto passi da una descrizione soggettiva ad una che potremmo dire intersoggettiva: occorre cioè che il soggetto si sforzi di porsi nella situazione di altri osservatori, oppure immagini di guardare o manipolare un oggetto in vari modi. Ci si avvia così ad una descrizione tale che un oggetto o un ambiente possa essere riconosciuto da molti osservatori; l'ideale sarebbe che la descrizione possa far riconoscere un oggetto da ogni osservatore; e ciò si ottiene quando si giunga a formulare la definizione logica dell'oggetto in parola.

A questo proposito si può osservare che la descrizione soggettiva di un oggetto o di un ambiente non è per ciò stesso invalida o addirittura errata: essa è soltanto limitata, e la sua validità è condizionata dalla necessaria presenza del soggetto che descrive. Nel nostro parlare quotidiano noi utilizziamo quasi sempre delle descrizioni che fanno implicito riferimento alla nostra situazione di osservatori singoli (per esempio quando diciamo "alto" oppure "basso" ecc.); e tali descrizioni sono valide nella misura in cui ci rivolgiamo ad altri soggetti che presumibilmente si trovano nelle nostre stesse condizioni o che conoscono la nostra situazione ed i nostri punti di vista". Per esempio, dicendo che "...il tetto sta sopra la casa" noi utilizziamo il termine "sopra" con riferimento al campo gravitazionale in cui siamo immersi; ovviamente la descrizione è valida per ogni altro osservatore che sia presumibilmente vicino alla casa, e quindi immerso nello stesso nostro campo gravitazionale. La descrizione non sarebbe invece valida per un osservatore che fosse agli antipodi.

Naturalmente una descrizione soggettiva diventa incompleta (e quindi può divenire invalida) quando venga fatta in termini relativi ma senza menzione del soggetto, oppure con pretesa di essere intersoggettiva. Per esempio, quando un lato di un rettangolo viene chiamato "la base" di esso (magari aggiungendo che lo si chiama così perché "sta in basso"), senza ricordare che questa denominazione si riferisce soltanto ad una determinata posizione della figura rispetto ad un osservatore; posizione relativa che può ovviamente essere diversa da quella di un altro osservatore.

Oppure quando si legge (come capita) che la Terra gira attorno al proprio asse ruotando "da destra a sinistra" trascurando di dire che ciò vale soltanto per un osservatore che descriva le cose rimanendo nell'emisfero boreale; oppure quando si legge che il moto apparente del Sole nel cielo avviene “da destra verso sinistra”, trascurando di dire che la descrizione è valida soltanto per un osservatore che guardi verso nord.

Analoghe considerazioni possono essere svolte a proposito di certi esercizio di certe sedicenti "schede didattiche" in cui si domanda ad un ragazzino di dire, guardando un disegno, se "...Marco sta alla destra oppure a la sinistra di Antonio"; senza purtroppo precisare se si tratta di destra o sinistra rispetto all'osservatore o rispetto alle persone di cui si guardano le immagini.

4 - L'astrazione e la costruzione di immagini.

Dal punto di vista della geometria, gli oggetti dell'ambiente non sono mai considerati in tutta la complessità e la ricchezza delle loro proprietà materiali; essi sono sottoposti ad una operazione di astrazione, che avviene a vari livelli e con varie modalità.

Un primo livello di astrazione conduce a prescindere da certe proprietà fisiche degli oggetti: colore, peso, temperatura &c.

In secondo luogo, la fantasia elabora le sensazioni prodotte dagli oggetti, eliminando certe componenti delle sensazioni e spingendone altre al limite. In particolare, vengono trascurate le

F. Kupka. Nocturne (1910). Collezione Privata.

sensazioni di caldo e di freddo che gli oggetti ci comunicano; di poca (per non dire nessuna) importanza risultano essere anche le sensazioni derivanti dal peso degli oggetti e dagli sforzi che eventualmente compiamo per smuoverli. Tali sforzi sono tuttavia da distinguersi da quelli che compiamo per verificare la durezza o la indeformabilità degli oggetti.

A questo proposito si può osservare che (come abbiamo detto) raramente le sensazioni, che conducono alla costruzione della immagine di un oggetto ai fini della geometria, provengono da un unico ambito sensoriale. Per esempio, la qualità di indeformabilità (che sta alla base della costruzione del concetto di corpo rigido e quindi anche di trasformazione per movimento rigido) nasce dalle sensazioni provocate dagli sforzi che potremmo fare per cercare di deformare un oggetto, dalle constatazioni del fatto che l'oggetto resiste ai nostri sforzi, ma anche dalla verifica (pertinente all'ambito della vista) del fatto che l'oggetto non cambia sensibilmente di forma.

In particolare, le espressioni comunemente usate di "solido geometrico" e di "geometria solida" (per indicare la geometria degli oggetti tridimensionali) tradisce forse la genesi in ambito tattilo-muscolare di certi concetti della geometria spaziale.

Abbiamo detto che la nostra fantasia, a partire dalle sensazioni materiali elementari, costruisce delle immagini con una operazione che abbiamo chiamato *astrazione*. Sappiamo che il termine *astrazione* indica il risultato di un’azione che viene descritta anche con i verbi "prescindere", "ignorare", "trascurare" e simili. In particolare, la nostra fantasia opera costruendo un’immagine, per così dire, scarnificata, perfettamente trasparente: per esempio passando dal dado materiale al cubo, solido geometrico.

Infine, la fantasia mette in atto delle operazioni che si potrebbero chiamare di "estrapolazione", operando un "passaggio al limite". Per esempio, dalla sensazione di un corpicciolo molto piccolo (e già questa espressione esprime un giudizio molto soggettivo), la fantasia elabora l'immagine del "punto geometrico". A questo proposito vale la pena di ricordare che negli "Elementi" di Euclide, e poi nella successiva letteratura geometrica greca, il termine che oggi viene tradotto con "punto" aveva il significato letterale di "segno"; cioè indicava un "posto" elementare ed indivisibile. Analogamente dall’osservazione di un filo teso la fantasia elabora l'immagine di un segmento di retta, cioè di qualche cosa che non può avere una realizzazione materiale, perché è, come si suol dire, "infinitamente sottile".

Osservazioni analoghe si possono fare su ciò che la fantasia elabora quando si costruisce l'immagine di una porzione di piano. Tenendo presenti queste osservazioni, si usa dire che la geometria tratta di oggetti della nostra esperienza "idealizzati".

Le operazioni di passaggio al limite che la fantasia esegue non sono soltanto quelle ricordate finora: noi immaginiamo anche di poter eseguire indefinitamente certe operazioni, per esempio la scelta di un punto in un segmento o in un pezzo di piano, la suddivisione di un segmento, ed anche il prolungamento indefinito di un segmento o l'ampliamento indefinito di un pezzo di piano. In queste frasi il termine "indefinito" o l'avverbio "indefinitamente" vuole significare che noi immaginiamo che, comunque si ripeta l'operazione considerata, non si incontreranno mai degli ostacoli che ne impediscono la ripetizione, nelle stesse circostanze. È superfluo osservare che queste cose sono soltanto immaginate: infatti, per quanto riguarda la scelta di un punto in un segmento o in una parte di piano, sappiamo bene che la materia, e gli strumenti che noi utilizziamo per operare su di essa, hanno costituzioni tali che, ad un certo punto, arrestano le procedure di suddivisione, che invece la nostra fantasia immagina di poter proseguire a volontà.

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte a proposito dell'operazione che di solito viene indicata con l'espressione "prolungare un segmento (rettilineo)". Infatti, sappiamo bene che se proseguissimo a camminare sempre nella stessa direzione sulla superficie terrestre, sulla quale abitiamo materialmente, non incontreremmo dei punti sempre nuovi, come vuole l'immaginazione del prolungamento rettilineo indefinito, ma ci ritroveremmo (al massimo dopo 40000 km) ad incontrare dei punti sui quali siamo già stati. Quindi anche la retta che noi immaginiamo, come si suol dire, "infinita" è un oggetto costruito dalla nostra fantasia.

F. Kupka. Piani verticali (1912-13). Parigi, Centro Pompidou

Occorre tuttavia osservare che queste immagini della nostra fantasia non sono ingiustificate, o cervellotiche, incoerenti o addirittura contraddittorie, come sono talvolta le immagini che si costruiscono nei mondi magici delle favole infantili o nelle creazioni poetiche. Le immagini della geometria invece nascono, come si è detto, dall'esperienza e possono darci delle informazioni sul mondo reale. Tuttavia, l'utilizzazione corretta di queste informazioni richiede che si sia coscienti del processo con cui tali immagini sono state create, e quindi del significato che esse hanno.

5 - La costruzione del concetto.

Un'ulteriore operazione di astrazione prende le mosse dalle immagini di cui abbiamo detto (che vengono costruite dalla nostra fantasia a partire dall'esperienza sensibile), per giungere a costruire un ente mentale che viene abitualmente chiamato *concetto*. Non intendiamo addentrarci nella discussione sulla natura del concetto: si tratta infatti di una discussione che è incominciata più di 2000 anni fa, con la filosofia greca, e che ancora prosegue. Ci limitiamo a dare qualche cenno sull'argomento, nella misura in cui ciò si rende necessario per una certa chiarezza in ciò che segue.

In particolare la questione sulla natura e sul significato del concetto fu lungamente dibattuta dalla filosofia medievale, con quella celebre disputa che viene abitualmente richiamata con l'espressione "quaestio de universalibus"; infatti una della caratteristiche del concetto è quella di poter essere un "universale", cioè di poter servire da predicato in molte frasi vere, diverse tra loro: così il concetto espresso dal termine "uomo" può fare da predicato in molte frasi vere, come per esempio: "Socrate è un uomo, Cesare è un uomo, Augusto è un uomo, Napoleone è un uomo" ecc.

Nella teoria tradizionale della deduzione si opera su concetti, tra i quali il ragionamento stabilisce dei collegamenti validi; si osserva anzi che soltanto il collegamento tra concetti è ragione e fondamento di deduzione valida ed universale.

È noto che non tutti i concetti possono venir precisati mediante certe frasi che ne danno la definizione esplicita; definizione che alcuni autori (come H. Poincaré) hanno chiamata "predicativa" ed altri chiamano "dichiarativa": in particolare i concetti fondamentali della matematica, sui quali si costruisce l'edificio di una teoria, per esempio l'aritmetica o la geometria, debbono necessariamente essere precisati con sistemi di proposizioni primitive che alcuni autori chiamano "assiomi", pur senza dare al termine il significato abituale che la filosofia gli attribuisce. Se non si facesse in questo modo, si dovrebbe instaurare un procedimento circolare di definizioni e di precisazioni, privo di validità (3). Questa particolare procedura viene chiamata "definizione implicita", o anche "definizione d'uso" o "definizione per assiomi". Essa stabilisce quindi le regole iniziali, con le quali i concetti debbono essere impiegati e trattati nelle deduzioni successive.

Pertanto, la procedura particolare che si adotta nel caso dei concetti primitivi e fondamentali della matematica tende proprio a garantire la possibilità delle deduzioni rigorose, tipiche della scienza.

Così, per esempio, se si enunciano i seguenti assiomi (4):

"$I1$. *Dati due punti distinti A e B, esiste una retta g che passa per ognuno di essi.*

$I2$. *Dati due punti distinti A e B non vi è più di una retta che passa per ognuno di essi*";

si può poi dimostrare rigorosamente il Teorema: *Due rette distinte di un piano hanno al massimo un punto in comune*. Infatti, se i punti comuni a due rette distinte fossero due o in numero maggiore di due, si avrebbe una situazione che contraddice i due assiomi enunciati.

A questo punto occorre osservare che i concetti di partenza di una teoria matematica possono essere scelti con una certa libertà; tuttavia nel caso della geometria, quasi sempre la scelta è guidata dall'esperienza, tratta dal mondo fisico; esperienza che suggerisce (senza tuttavia imporla) la scelta dei concetti primitivi, e delle loro proprietà fondamentali, enunciate dagli assiomi.

Quando sia stato scelto un insieme di concetti primitivi, e di assiomi che ne forniscono la definizione implicita, ogni altro concetto deve essere definito in modo preciso e rigoroso. La definizione di un concetto ci permette, per così dire, di possederlo, nel senso che, sulla base della definizione, si possono dimostrare tutte le proprietà dell'ente designato dal concetto, preso da solo o in relazione con gli altri. Così per esempio, quando sia stato definito il "rombo" come "quadrangolo piano convesso (cioè non intrecciato), avente i 4 lati uguali tra loro", possiamo dimostrare:

a) che due lati opposti sono paralleli tra loro;

b) che due angoli opposti sono uguali tra loro e due angoli contigui sono supplementari;

c) che le due diagonali sono perpendicolari tra loro e si dimezzano scambievolmente.

Inoltre, sapremo con certezza che le proprietà sopra ricordate saranno valide anche per ogni figura che sia un caso particolare di rombo: per esempio per un quadrato, il quale dunque godrà di tutte le proprietà in parola, ed in più di qualche altra che gli è propria, e che discende dalla sua particolare definizione.

Ciò che abbiamo detto finora, sulla natura dei concetti della geometria e sulle nostre operazioni mentali che li costruiscono, è confortato dalla opinione di un autorevole matematico italiano, Gino Fano, che si è occupato di questi argomenti. Scrive Fano (5): «*Secondo le vedute odierne, la geometria riposa sopra un sistema di nozioni primitive, non definite, e di proposizioni primitive, enunciate senza dimostrazione (assiomi e postulati insieme), e che, in quanto enunciano proprietà ammesse a priori degli enti assunti come primitivi, possono considerarsi come "definizioni implicite" di tali enti*.»

Queste nozioni e proposizioni primitive sono tratte generalmente dall'intuizione e dall'esperienza, ma con un successivo processo di elaborazione mentale; di "astrazione", perché un punto, una linea, una superficie come li intende la geometria sono concetti astratti, che corrispondono solo per approssimazione a oggetti esistenti in natura; di "semplificazione", per assumere dati precisi, più semplici, maneggevoli, atti alla trattazione matematico-deduttiva.»

6 - I disegni e le immagini in geometria.

Abbiamo detto, nel N. precedente, che la definizione di un concetto permette di dedurre con certezza tutte le proprietà dell'ente considerato. Aggiungo qui che soltanto la definizione ha questa caratteristica, la quale invece manca all'immagine da cui il concetto è tratto. Può avvenire infatti che un concetto abbia una definizione perfettamente chiara, ma non giunga a richiamare alla nostra fantasia un'immagine chiara, senza confusioni e senza equivoci. Un esempio classico è fornito dal concetto di "chiliagono regolare", cioè poligono piano regolare di 1000 lati. Questa definizione permette di dedurre rigorosamente ogni proprietà della figura (6); ma ovviamente è difficile costruirsi un'immagine chiara del poligono regolare di 1000 lati, e distinguerla per esempio da quella del poligono, pure regolare, di 1001 o di 999 lati.

Forse queste difficoltà che la nostra fantasia incontra nel distinguere chiaramente tra loro il poligono con molti lati e la circonferenza ha le sue radici una frase infelice, che si legge talvolta In qualche manuale, redatto senza molta cura, o in qualche sbrigativa volgarizzazione; frase secondo la quale "... un poligono di molti lati si confonde con la circonferenza"; oppure, peggio, "... la circonferenza è un poligono con infiniti lati". Ho detto "frase infelice" perché i due concetti, di circonferenza e di poligono regolare (quale che sia il numero dei suoi lati), sono nettamente distinti fra loro, e lo scopo dello studio della geometria è proprio quello di costruire concetti chiari e distinti tra loro, e non di operare su immagini, che possono essere confuse e fuorvianti.

Tuttavia, nella pratica abituale, quando si tratta di enti della geometria elementare, si usano ordinariamente dei disegni, che ci richiamano le immagini da cui i concetti sono stati formati. A questo proposito ricordiamo ancora una volta che non le immagini, e meno ancora i disegni, sono in grado di fondare una deduzione valida, ma soltanto i concetti rigorosamente definiti.

Ci si potrebbe quindi domandare quale sia il significato e l'apporto dei disegni ed in generale dei modelli che si impiegano abitualmente in geometria. Una questione di questo genere si era già affacciata a Platone: «*I geometri si servono delle figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui* *si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero*» (7).

Mi pare che sia qui espresso molto chiaramente il significato dei disegni che si tracciano in geometria; il che del resto è confermato da una frase di D. Hilbert, secondo la quale «..le figure sono formule disegnate». E poiché le formule traducono certe relazioni tra numeri o tra concetti, pare chiaro che il grande matematico tedesco volesse esprimere in forma per così dire pittoresca il significato dei disegni che noi tracciamo spesso per fare geometria.

D’altra parte, è chiaro che i disegni vengono, quasi istintivamente, fatti "in scala", con posizioni e dimensioni che fanno comodo a chi ragiona sulle cose rappresentate. Quindi, nell'utilizzare i disegni, si scelgono, per la rappresentazione, automaticamente ed implicitamente, certe proprietà degli oggetti; e precisamente quelle proprietà che sono invarianti rispetto alle tra formazioni per similitudine.

In particolare, si potrebbe dire che il disegno ci aiuta a richiamare gli enunciati degli assiomi, e ci guida nella deduzione; questa avviene spesso senza fare esplicito riferimento agli assiomi, che vengono rispettati in modo, per così dire, quasi automatico, con l'aiuto del disegno.

Questo fatto è collegato con l'osservazione fatta sopra (N.5), quando è stato detto che le immagini formate dalla nostra fantasia nel caso della geometria non sono ingiustificate, o cervellotiche, incoerenti o addirittura contraddittorie; e ciò perché queste immagini, ed i concetti che cui si riferiscono, sono tratte da esperienze elementari del mondo materiale.

7 - La geometria e lo spazio.

Si potrebbe osservare che finora abbiamo parlato di oggetti materiali, delle loro immagini costruite dalla fantasia e dei concetti che vi si riferiscono, ma non abbiamo parlato di "spazio", inteso come oggetto delle considerazioni della geometria. Capita invece di ascoltare e di leggere talvolta che la geometria è la scienza che studia lo spazio, o che questo è l'oggetto della geometria. Il nostro atteggiamento discende dalla osservazione che il termine "spazio", nella nostra lingua, è usato in molti significati: per esempio, in un noto dizionario (8), alla voce "spazio" si può leggere, tra l'altro: "*L'estensione non determinata e non circoscritta che ha una indeterminata capacità di contenere i corpi; l'immensità nella quale si muovono i corpi celesti; estensione; il luogo; parte di superficie lasciata sgombra; intervallo; ciascuno di quei piccoli pezzi, più bassi delle lettere, che servono a separare le parole le une dalle altre; estensione di tempo*".

E poco sotto lo stesso dizionario elenca vari sinonimi, tra i quali: "*ambito, area, aria, buco, campo, capacità, circuito, distanza, distesa, estensione, intermezzo, interstizio, intervallo, largo, largura, margine, piazza, posto, spiazzo, striscia, superficie, tratto, zona*."

Si direbbe quindi che sia ben difficile definire in modo preciso e rigoroso un unico concetto di spazio, e che a tale concetto si possano applicare le considerazioni che già S. Agostino ha espresso a proposito del concetto di "tempo"; Agostino infatti, in un passo spesso citato delle sue Confessioni, dichiara di sapere che cosa è il tempo, ma di non essere in grado di definirlo in modo formale ed esplicito (9).

Questa molteplicità di significati che vengono attribuiti, a seconda dei contesti, al termine "spazio" suscita la mia perplessità nei riguardi di pensatori e di trattatisti i quali si esprimono in modo da far pensare che esista un ente reale, fisicamente esistente, che viene chiamato "spazio", oggetto di una dottrina, che viene chiamata "geometria".

A questo proposito vorrei richiamare quanto è stato scritto su questo argomento, in forma ironica e polemica, da G. Peano (1): «*In quasi tutti i trattati italiani moderni (11) si introduce per primo il concetto di "spazio", dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile ecc., proprietà queste parimenti non definite.*

Ritenendo pertanto il concetto di "spazio" come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere un trattato di Geometria nella lingua di Euclide e di Archimede (12), ove appunto manca la parola corrispondente al termine "spazio", nel senso in cui lo si usa nei moderni trattati.»

Non mi pare irragionevole pensare che gli autori dei trattati, sui quali G. Peano fa dell'ironia, si siano ispirati a ciò che scrive I. Newton (13), il quale si esprime così: «*Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile <...>.*

Come è immutabile l'ordine delle parti del tempo, così lo è anche l'ordine delle parti dello spazio. Le si faccia uscire dai propri luoghi e sarà come se uscissero (se così posso dire) da sé stesse. Infatti, i tempi e gli spazi sono come i luoghi di sé stessi e di tutte le cose. Tutte le cose sono collocate nel tempo quanto all'ordine della successione, nello spazio quanto all'ordine della posizione. È nella loro essenza essere luoghi: ma è assurdo che i luoghi primari siano mossi. Questi sono dunque i luoghi assoluti, ed i moti assoluti sono le sole traslazioni da questi luoghi.»

Mi pare abbastanza facile osservare quanto grande sia il posto preso dall'immaginazione in questi enunciati; immaginazione che ci conduce a raffigurarci un enorme buco scuro, che non ha confini, nel quale ci possiamo muovere a volontà; ma è anche facile osservare che, partendo da questi enunciati, non è possibile costruire alcuna teoria coerente, riguardante le nostre esperienze. Infatti, lo stesso Newton aggiunge, dopo le parole da noi riportate: «*Vero è che, in quanto queste parti di spazio non possono essere viste e distinte fra loro mediante i nostri sensi, usiamo in loro vece le misure sensibili. Definiamo, infatti, tutti i luoghi dalle distanze e dalle posizioni delle cose rispetto a qualche corpo, che assumiamo come immobile. <... > Così invece dei luoghi e dei moti assoluti usiamo i relativi; né ciò riesce scomodo nelle cose umane; ma nella filosofia occorre astrarre dai sensi. Potrebbe anche darsi che non vi sia alcun corpo in quiete al quale possano venire riferiti sia i luoghi sia i moti*.» (13)

In altri termini, mi pare che nelle parole di Newton vi sia l'ammissione chiara del fatto che questo "spazio assoluto" non può essere oggetto di osservazione da parte nostra; e che, per descrivere gli oggetti del mondo fisico, dei quali abbiamo esperienza, occorre designare in modo esplicito un riferimento.

Per queste ragioni io penso che nella didattica della geometria si possa fare a meno di menzionare lo spazio, nel senso che a questo termine dava Newton, quando parlava di spazio assoluto; e si possa svolgere una didattica efficace parlando di oggetti e di fenomeni fisici, così come abbiamo fatto finora, e specialmente nel N.1, quando abbiamo cercato di descrivere un aspetto importante della geometria. Ciò non vuole ovviamente significare che il termine *spazio* non possa essere usato in qualcuno di quei significati che abbiamo citato poco fa: si vuole soltanto evitare di utilizzarlo come se designasse un ente provvisto di certe proprietà ben determinate e sperimentabili.

Per quanto riguarda poi il significato della conoscenza del mondo fisico che ci è fornita dalla geometria, riportiamo qui altre parole di G. Fano, il quale scrive (14): «*I concetti geometrici, benché acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda ai concetti astratti di retta, e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un* *triangolo (astratto), né affermare che nello spazio fisico sia verificata una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e di grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato. La geometria euclidea ci dà questa rappresentazione con una approssimazione ampiamente sufficiente per tutte le esigenze della pratica.*»

NOTE

(1).... mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire des figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles, et en même temps lui défendit d'en parler davantage et d'y penser jamais. <...> Mais comme le soin de mon père avait été si grand de lui cacher toutes ces choses qu'il n'en savait pas même les noms, il fut contraint lui-même de s'en faire. Il appelait un cercle un rond, une ligne une barre, ainsi des autres……….

(2) Ricordiamo che nel secolo XVII si chiamava "filosofia", o anche "filosofia naturale", la dottrina che noi oggi indichiamo con l'espressione “scienza della Natura”, o con espressioni equivalenti.

(3) Ciò era già stato osservato da Aristotele, ed è stato ripreso per esempio da B. Pascal nella sua opera intitolata: "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader" [Sullo spirito matematico e sull'arte di persuadere].

(4) Cfr. David Hilbert. Grundlagen der Geometrie [Fondamenti della geometria].

(5) Gino Fano. Geometria non euclidea (introduzione geometrica alla teoria della relatività). Bologna, 1935. Pag.4.

(6) A titolo di esempio, si pensi ad un poligono regolare di 1000 lati inscritto in una circonferenza grande come una sezione della nostra superficie terrestre, fatta con un piano passante per i poli. Ammettiamo che la lunghezza di questa circonferenza sia di 40000 km (secondo la definizione del metro, data originariamente dagli astronomi francesi del secolo XVIII). In questo caso un lato del poligono in parola è sotteso da un arco di circonferenza lungo 40 km; è possibile calcolare la lunghezza del lato considerato: si trova che tale lato è (ovviamente) più corto dell’arco che lo sottende, e che la differenza non supera 6,58 cm. È chiaro che, nella pratica comune (dei trasporti, della tecnica ingegneristica &c) tale differenza viene giudicata molto piccola, e quindi viene trascurata. Ma possono esistere delle questioni scientifiche nelle quali ciò non si può fare: infatti il giudizio sul fatto che un dato numero, che esprime una misura, sia piccolo oppure no non ha significato assoluto, ma assume senso di volta in volta soltanto in relazione a determinate questioni particolari.

(7) Platone. La repubblica (510, d, e).

(8) Ferdinando Palazzi. Novissimo dizionario della lingua italiana. Milano (Ed. Ceschina) 1954.

(9) Quid ergo est tempus? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio. Aurelii Augustini Confessionum libri XIIILib XI, Cap. XIV, 2.

(10) Giuseppe Peano. Sui fondamenti della geometria. Rivista di matematica. IV, 1894, p.51-90.

(11) Peano scrive nel 1894.

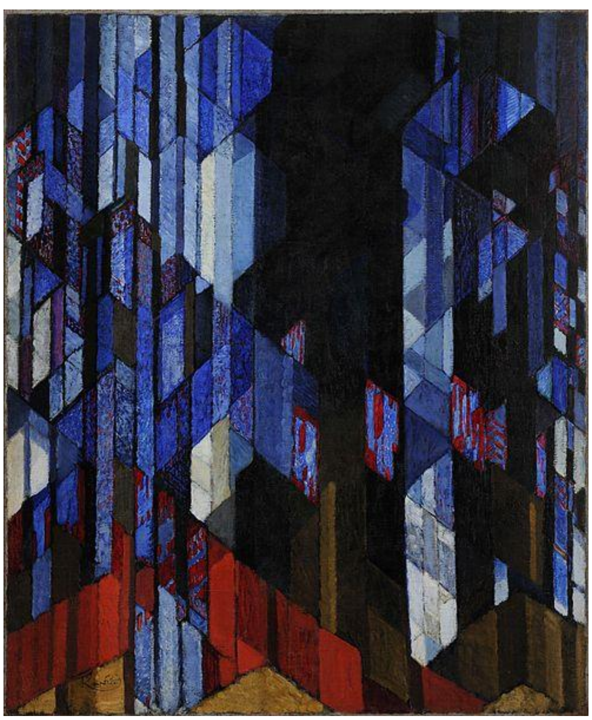
(12) Cioè in lingua greca.

(13) Isaac Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica.

(14) G. Fano. Opera citata in (5). Pag.81.

Una volta si venerava superstiziosamente tutto ciò che venìa dagli antichi: oggi si disprezza da molti senza distinzione ciò che loro appartiene. [Giacomo Leopardi. Saggio sugli errori popolari degli antichi].

NdR Si può vedere anche in INEDITI: 9404 *Proposte per un itinerario didattico*.



F. Kupka. Cattedrale (Particolare)- 1912-13. Museo Kampa

Nota 4. Carlo Felice Manara OSSERVAZIONI SUI NUMERI. (Brescia 27, 28, 29 giugno 1994)

INDICE DEI PARAGRAFI

I concetti senza l'intuizione sono vuoti; l’intuizione senza i concetti è cieca. [Vittorio Enzo Alfieri]

1 - Che cos'è “numero”.

Il concetto di numero naturale ci si presenta, alle sue origini, come del tutto elementare e di uso comune; appare quindi naturale che per secoli pensatori, filosofi e scienziati abbiano tentato di darne una definizione esauriente e soddisfacente; la critica più recente dei fondamenti della matematica non accetta più oggi la posizione di chi vorrebbe che matematici e filosofi sapessero pronunciare o scrivere delle frasi del tipo:

"Il numero è ... (e qui una frase da memorizzare e ripetere e far ripetere, se necessario)".

Ciò non significa che noi dobbiamo rinunciare a cercare di capire che cosa sia il numero; ma questa ricerca di comprensione e di precisazione viene oggi cercata con quelle che si dicono “definizioni implicite”, oppure "definizioni d'uso" o anche “definizioni per postulati” o "per assiomi". Si tratta di una procedura che necessariamente deve essere seguita quando si cerchi di precisare un concetto primitivo e fondamentale. Infatti non si può pretendere di definire tutto: ciò è stato osservato già da Aristotele, ed è stato ripetuto, tra gli altri, dal grande matematico, filosofo e teologo Blaise Pascal [1623-1662J; questi, in un saggio, intitolato "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader" [Sullo spirito matematico e sull'arte della persuasione] osserva acutamente che occorre necessariamente arrestarsi nella catena delle definizioni dei concetti, e che si deve avere l'umiltà di accettare di iniziare i ragionamenti da certi concetti elementari e primitivi, da considerarsi in certo modo come dati di partenza di ogni argomentazione. Diremo in seguito con maggiore precisione come si possa costruire una teoria con queste procedure; qui osserviamo che, sempre secondo la critica moderna, i concetti elementari, di partenza, che non possono essere precisati con definizioni formali, non sono tali per loro natura intrinseca; essi possono venir scelti con una certa libertà da chi costruisce una teoria valida e coerente; la cosa veramente importante è che chi costruisce una teoria cosiffatta abbia chiara coscienza di quali sono i concetti presi come punti di partenza, e considerati come primitivi, e che quindi si rinuncia a definire con definizioni di quelle che vengono da taluni chiamate "predicative" o anche "dichiarative".

Si potrebbe osservare che da millenni l'umanità utilizza il concetto di numero, conta e fa operazioni sui numeri senza porsi tante domande; di fatto l'aritmetica è una dottrina che si incontra, anche a livello abbastanza evoluto, presso moltissimi popoli antichi. Ma forse è utile non ignorare gli sviluppi recenti della critica epistemologica, per evitare che l'azione didattica sia sovraccaricata da nozioni non sempre tutte utili allo stesso modo e soprattutto per evitare di illudersi ed illudere con frasi non sempre dotate di senso.

2 - Cardinale ed ordinale.

Presso moltissime lingue evolute esistono due serie di vocaboli per indicare i concetti numerici; per esempio in italiano la grammatica distingue tra i termini che indicano numeri chiamati *cardinali*, come uno, due, tre, ... dieci, cento, mille ecc. ed i termini che indicano i numeri chiamati *ordinali*, come primo, secondo, terzo, ... decimo, centesimo, millesimo ecc.

Anche per la rappresentazione grafica (scrittura) si usano spesso dei simboli differenti, perché per i numeri cardinali si adottano le ordinarie convenzioni, con l'impiego delle cosiddette "cifre arabe", mentre per gli ordinali si usano spesso le convenzioni adottate dai Romani, le quali conducono a scrivere quelli che vengono impropriamente chiamati "numeri romani". È noto che presso qualche lingua esistono delle eccezioni all'impiego dei termini ordinali: per esempio, in francese, esistono i termini che equivalgono ai nostri "tredicesimo, quattordicesimo, quindicesimo ecc." [treizième, quatorzième, quinzième ...], e vengono abitualmente impiegati, con la sola eccezione dell'indicazione dei re: infatti i nomi dei sovrani (per esempio Luigi XIII, Luigi XIV, Luigi XV, Luigi XVI) vengono letti come se le cifre romane indicassero dei numeri cardinali: Louis treize, Louis quatorze ecc. Ma, a mio parere, questa particolare eccezione di tipo linguistico, analoga a molte altre che si incontrano anche in altre lingue viventi, non fa che ribadire la distinzione tra i due concetti cardinale ed ordinale; distinzione che, del resto, viene rispettata in tutti gli altri casi.

Si può osservare che alla domanda: «Quanti sono gli elementi di un dato insieme?», noi rispondiamo con un numero cardinale: così noi diciamo che le stagioni sono quattro. Ma diciamo pure che sono quattro i punti cardinali, i semi delle carte da gioco, gli Evangelisti, i giocatori di una partita di bridge, le gambe del tavolo quadrato sul quale si svolge la partita ecc.

In altre parole, il concetto numerico cardinale espresso dal termine "quattro" risulta vero e valido per moltissimi insiemi [non è possibile dire quanti siano ...] che sono in corrispondenza biunivoca con uno qualunque di quelli or ora ricordati; i quali, a loro volta, sono tutti in corrispondenza biunivoca tra loro.

Abbiamo detto che alla domanda «Quanti sono gli elementi di un certo insieme?» noi rispondiamo con un numero cardinale; speriamo tuttavia che a nessuno venga in mente di fabbricarsi una definizione di numero cardinale con una frase del tipo: «Numero cardinale è la risposta alla domanda "quanti sono gli elementi di un dato insieme?"». Così come non abbiamo difficoltà a rispondere con un numero cardinale alla domanda riguardante gli elementi di un dato insieme, noi rispondiamo abitualmente con un numero ordinale ad una domanda riguardante il posto di un dato elemento in un certo insieme ordinato. Così una mamma dice per esempio: «Il mio ragazzo è il primo della sua classe» oppure «... è il quarto di quella fila»; ed un ragazzo non ha difficoltà a dire per esempio: «Il mese di aprile è il quarto mese dell'anno». Pertanto, i concetti relativi alle due specie di numeri (cardinali ed ordinali) sono, come abbiamo detto, di uso quotidiano e comune.

Tuttavia, la critica sui fondamenti della matematica, iniziata nel secolo scorso, ha condotto ad analizzare separatamente i due tipi di concetti. Molti sono stati i filosofi e matematici che hanno coltivato questo campo di ricerca. Noi qui faremo riferimento a due matematici in particolare: precisamente, per quanto riguarda il concetto di numero cardinale cercheremo di esporre sommariamente le idee del grande matematico tedesco Georg Cantor [1845 – 1918;] per quanto riguarda il concetto di numero ordinale cercheremo di esporre sommariamente il pensiero del matematico italiano Giuseppe Peano [1858-1932]. Osserviamo tuttavia che i due aspetti, cardinale ed ordinale, del numero naturale sono strettamente collegati tra loro; e questo collegamento stretto si verifica anche nella formazione dei primi concetti matematici nella mente infantile e nella maturazione successiva, a livello preadolescenziale; pertanto di questa circostanza occorre tener conto nell'opera didattica.

3 - Insiemi e corrispondenze biunivoche.

A proposito del numero naturale sotto l'aspetto cardinale abbiamo citato G. Cantor. È noto che questo matematico viene abitualmente ricordato come il fondatore della teoria degli insiemi. È anche noto che il concetto di "insieme" può essere considerato come del tutto primitivo ed elementare: tuttavia spesso si legge o si ascolta una frase, dovuta a Cantor, che suona pressappoco così: «Insieme [in tedesco "Menge"] è una collezione [in tedesco "Zusammensammlung"] di enti, considerata come un tutto unico». Non sarebbe esatto considerare questa frase come una definizione del concetto di insieme, come fanno alcuni; semmai la frase rimanda il chiarimento del termine "insieme" alla conoscenza del termine "collezione".

Quindi la frase citata può essere considerata tuttalpiù come una illustrazione del concetto di insieme, attraverso il richiamo di un termine (quello di "collezione") che viene qui considerato come suo sinonimo. È noto che, sulla scia delle considerazioni di Cantor, oggi si suole presentare tutta una serie di proprietà del concetto di insieme, e una serie di operazioni sugli insiemi.

Ricordiamo in particolare le operazioni di unione e di intersezione, con le corrispondenti proprietà formali (commutativa ed associativa) ed i simboli, ormai comunemente utilizzati. Ricordiamo anche la costruzione del concetto di "insieme prodotto cartesiano di altri due" ed il relativo simbolo.

Infine, ricordiamo il concetto di "insieme vuoto", che si introduce come un ampliamento del concetto originario di insieme: ampliamento che, in linea di principio, non è necessario, ma che permette l’estensione delle proprietà formali delle operazioni. Si tratta quindi di un’operazione concettuale che non è arbitraria o, peggio, cervellotica e contradditoria, ma si rivela invece molto utile. In modo analogo si potrebbe dire che l’introduzione dello zero in aritmetica non è necessariamente richiesta dal concetto di numero, ma si rivela utilissima per le applicazioni di questo concetto e per l’esecuzione delle operazioni aritmetiche con il simbolismo che ormai è universalmente adottato. Abbiamo detto che, nella trattazione di Cantor, ed in quelle che si ispirano ai suoi metodi, il concetto di insieme e le operazioni sugli insiemi sono adottati come primitivi ed intuitivi.

Ricordiamo tuttavia ciò che abbiamo detto sopra (N. 1), quando abbiamo osservato esplicitamente che il fatto che un concetto sia considerato come primitivo non è una proprietà intrinseca del concetto stesso, ma è il risultato di una scelta di chi costruisce una teoria; in particolare sono state costruite delle teorie degli insiemi [per esempio quella detta “di Zermelo-Fraenkel”] nelle quali il concetto di insieme è definito in forma implicita attraverso assiomi, ovviamente sulla base di altri concetti scelti come primitivi. Tuttavia, la trattazione di Cantor, e quelle che ad essa si ispirano, appare come una delle più semplici e vicine all'esperienza reale quotidiana; essa viene abitualmente presentata nelle trattazioni manualistiche delle scuole di ogni grado, nei capitoli dedicati a quella che viene chiamata abitualmente "insiemistica".

4 - Numero cardinale e potenza di un insieme secondo Cantor.

Uno dei concetti più importanti, collegato con il concetto di insieme, è quello di corrispondenza biunivoca. A proposito degli esempi presentati sopra (nel N.2) abbiamo visto che il concetto rappresentato da un determinato numero (il quattro negli esempi) può essere applicato a molti casi particolari di insiemi che sono tutti in corrispondenza biunivoca tra loro. Riprendendo quel discorso, possiamo ora osservare che la relazione di corrispondenza biunivoca tra insiemi possiede ovviamente le classiche proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva, le quali permettono di costruire il concetto di classe di equivalenza. In questo ordine di idee potremmo quindi osservare che il numero è un concetto, ottenuto con l'operazione di astrazione, applicata a tutti gli insiemi che appartengono ad una medesima classe di equivalenza, la quale è determinata dalla relazione di corrispondenza biunivoca; si può osservare inoltre che la relazione di corrispondenza biunivoca può sussistere anche tra insiemi che non sono costituiti da un numero finito di elementi. L'esempio più immediato di un insieme cosiffatto è fornito dall'insieme dei numeri naturali; e già Galileo Galilei [1564-1642] aveva osservato che è possibile considerare una corrispondenza biunivoca tra due insiemi infiniti; precisamente tra l'insieme dei numeri naturali: {1, 2, 3, 4, 5, 6,……} e l'insieme dei loro quadrati: {1, 4, 9, 16, 25, 36,…..}. Quando due insiemi A e B, anche infiniti, possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro Cantor dice che essi hanno la stessa potenza. Pertanto, con il concetto di *potenza* [*Mächtigkeit* in tedesco] Cantor estese il concetto di numero, costruendo quelli che egli chiamò "numeri cardinali transfiniti". Egli costruì anche una simbolizzazione di questi concetti e diede le leggi per esprimerli e per eseguire delle operazioni logiche, in parte analoghe alle operazioni aritmetiche, che noi eseguiamo abitualmente sui numeri naturali.

5 - Il numero ordinale e gli assiomi di Peano.

Abbiamo già detto più di una volta che il numero naturale può presentarsi sotto due aspetti: quello di numero cardinale e quello di numero ordinale. Nel precedente paragrafo abbiamo accennato alla elaborazione che G. Cantor ha fatto dei fondamenti del numero cardinale, collegandolo con il concetto di insieme. Una impresa analoga fu compiuta, anche se con criteri del tutto diversi, dal matematico italiano Giuseppe Peano per il numero naturale sotto l'aspetto ordinale. Abbiamo già anche dato (N. 2) degli esempi di impiego del numero ordinale, ed altri innumerevoli se ne possono incontrare nella pratica della vita quotidiana. Riflettendo su questi esempi si giunge facilmente a comprendere che il termine numerico (primo, secondo, terzo ecc.) che noi pronunciamo, o scriviamo, può essere in qualche modo considerato come un nome di un elemento di un insieme, nel quale esiste una relazione di ordine. Tale relazione può essere un dato naturale, come avviene per l'ordine dei re di Francia o dei mesi dell'anno, oppure può essere stata stabilita in modo convenzionale, come avviene quando per esempio si mettono in fila gli scolari per ordine di statura.

Nel 1882 Peano scrisse una memoria, rimasta celebre ed ancora oggi citata, in cui precisava la definizione del concetto di numero naturale ordinale; tale memoria è stata scritta in latino, e porta il titolo: "Arithmetices principia nova methodo exposita" [I fondamenti dell'aritmetica presentati con un metodo nuovo]. La trattazione di Peano costituisce un esempio tipico della procedura di cui abbiamo già detto (N. 1), e che abbiamo chiamato “definizione implicita” o anche "definizione d'uso".

Infatti, Peano non scrive alcuna frase del tipo: "Il numero è.... ", ma ciò non significa che egli rinunci a definire che cosa sia il numero: la sua trattazione incomincia parlando del numero, ed enunciando cinque proposizioni senza dimostrazione; egli le chiama "Proposizioni primitive", perché sono enunciate all'inizio del suo saggio, e prima di ogni altra proposizione; oggi esse vengono comunemente chiamate "Assiomi di Peano".

In queste proposizioni Peano presenta le relazioni fra tre concetti: il concetto di "numero", intendendo il termine come il nome comune degli elementi di un insieme; il concetto di "zero", intendendo il termine come il nome di un particolare elemento dell'insieme precedente; il concetto di "successivo di... ", intendendo il termine come il nome di un’operazione logica, mentale, che fa passare da un elemento dell'insieme ad un altro e diverso elemento dello stesso insieme.

Le proposizioni di Peano forniscono la definizione implicita dei concetti ricordati, nel senso che ogni altra proposizione che tratti di essi deve essere dedotta da quelle, cioè deve essere o una definizione esplicita di nuovi concetti, collegati con i precedenti, oppure una proposizione dimostrata (teorema) in base alle proposizioni primitive, alle definizioni ed ai teoremi precedenti. In altri termini, si potrebbe dire che Peano presenta il concetto di numero naturale assegnando le regole con le quali si possono costruire delle proposizioni valide con i termini che riguardano tale concetto.

In questo ordine di idee quindi la procedura è vagamente analoga a quella che si segue quando si vuole insegnare a qualcuno un gioco nuovo: per esempio, per insegnare il gioco degli scacchi, la definizione di ogni pezzo viene fatta enunciando le regole con le quali si gioca con quel pezzo (ed ovviamente con tutti gli altri); il nome del pezzo non serve per precisare la natura di questo, agli scopi del gioco: tanto è vero che, per esempio, il pezzo che in italiano viene chiamato "alfiere", viene indicato con il termine "Bishop" (vescovo) in inglese, e con il termine "fou" (matto, buffone) in francese; ed a questi nomi sono ispirati anche i simboli convenzionali che, nelle pubblicazioni, rappresentano le varie situazioni sulla scacchiera. Si tratta in ogni caso di termini che richiamano i personaggi delle corti regali di altri tempi, e che denunciano la genesi storica del gioco; tuttavia è chiaro che, anche in presenza dei vari e diversi nomi, la definizione di ogni singolo pezzo è fornita soltanto dalle leggi con le quali tali pezzi si muovono nella partita, in relazione con gli altri.

Non interessa qui riportare tutte le proposizioni di Peano; anche perché non sarebbe saggio impostare l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole dell'ordine elementare con queste procedure che non sarebbero apprezzate perché risulterebbero, tra l'altro, eccessivamente astratte per il livello mentale dei discenti.

Tuttavia, vale la pena di dedicare la nostra attenzione ad una particolare proposizione: precisamente quella che figura come quarta nell'elenco di Peano; si potrebbe fornire una presentazione (diversa da quella di Peano) di questa proposizione con le seguenti parole:

«Se si verifica che una proposizione è vera per lo zero; e se, dalla ipotesi che essa sia vera per un numero n, si dimostra che essa è vera anche per il numero successivo di n, [cioè il numero che si ottiene operando su n con l'operazione "successivo di... "] allora la proposizione è vera per ogni numero».

Questo assioma viene anche spesso richiamato con le espressioni "legge", oppure "principio di induzione matematica". Il suo significato, la sua validità e i suoi fondamenti furono oggetto di molte discussioni e molte analisi, motivate dal fatto che esso veniva interpretato come una proprietà del concetto di numero, concetto che si supponeva dato o in qualche modo conosciuto; Peano non segue questi atteggiamenti; invece inserisce la proposizione tra quelle che costituiscono la definizione del concetto di numero naturale.

Sulla base della legge di induzione egli sviluppa la definizione delle operazioni sui numeri e la dimostrazione delle loro proprietà formali. In questo ordine di idee si potrebbe dire che Peano presenta l'insieme dei numeri naturali come in certo modo generato da uno particolare fra di essi (lo zero) applicando successivamente ed indefinitamente l'operatore "successivo di... ". In tal modo egli ottiene di poter dimostrare rigorosamente certi teoremi di aritmetica, per esempio le proprietà formali delle operazioni, la cui dimostrazione non era ancora stata ottenuta in modo formalmente soddisfacente.

Occorre aggiungere che Peano presentò la sua elaborazione sui fondamenti dell'aritmetica per mezzo del simbolismo logico che egli aveva inventato e che ha sviluppato applicandolo anche ad altri campi della matematica.

In questo ordine di idee Peano è considerato come un precursore ed un fondatore di una certa corrente di pensiero logico; basti ricordare che il filosofo inglese Bertrand Russel [1872-1970], a seguito dell'incontro con Peano (incontro avvenuto nel 1900, in occasione del congresso mondiale dei matematici che si tenne a Parigi) cambiò radicalmente l'impostazione delle proprie opere, per darsi a quelle ricerche che lo condussero a scrivere, un decennio dopo, insieme col matematico Alfred North Whitehead [1861-1947], l'opera fondamentale intitolata "Principia mathematica".

Con l'occasione, ricordiamo ciò che abbiamo già detto (N. 1), osservando che i concetti considerati come primitivi e fondamentali non sono tali per loro intrinseca natura, ma sono scelti da un autore con una certa libertà; cose analoghe si possono dire delle proposizioni fondamentali di una certa teoria: anche queste possono essere scelte con una certa libertà. Per esempio, per quanto riguarda le proposizioni fondamentali dell'aritmetica, ricordiamo che Mario Pieri [1860-1913], brillante allievo di Peano, diede una costruzione dell'aritmetica fondata su un sistema costituito soltanto da quattro assiomi, ovviamente diversi da quelli del maestro.

La libertà nella scelta delle proposizioni primitive (o assiomi che dir si vogliano) per la costruzione di una data teoria non deve tuttavia essere intesa come l'assenza di qualunque vincolo: infatti è necessario che le proposizioni che si vogliono scegliere a fondamento di una teoria abbiano le proprietà di essere indipendenti e di formare un sistema coerente.

Non possiamo soffermarci qui sulle questioni riguardanti questa problematica, perché ciò ci condurrebbe, tra l'altro, ad uscire dal sentiero che ci siamo proposti di battere.

6 - Contare ed operare con i numeri. Problemi didattici.

Ciò che abbiamo detto nei precedenti paragrafi tendeva a presentare l'assetto teorico recente delle questioni riguardanti i numeri; come abbiamo già detto (N. 1), è chiaro che un'opera didattica valida non possa prescindere dalla conoscenza di questi problemi; appare anche chiaro che un'azione didattica efficace non possa ricalcare passivamente le costruzioni teoriche esposte. Infatti, la genesi psicologica dei concetti scaturisce dall'esperienza quotidiana dei soggetti, e pare quindi opportuno che l'azione didattica parta dal vissuto concreto del discente, per costruire un edificio di razionalità autonoma, che sia il risultato di un'appropriazione che il discente conquista via via con l'apprendimento e con la riflessione; apprendimento che deve essere in ogni caso attivo, nei limiti del possibile, anche se ovviamente guidato dal docente.

In particolare, per esempio, abbiamo presentato distintamente i due aspetti, cardinale ed ordinale, del numero naturale; ma è facile osservare che, nella evoluzione interiore che costituisce l'apprendimento, questi aspetti sono mescolati tra loro. Infatti, nell'impiego dei termini che rappresentano i numeri cardinali più piccoli, sarebbe difficile stabilire se il termine linguistico utilizzato sia indicativo di un numero oppure sia piuttosto una specie di nome di un insieme o di una figura sotto la quale il numero viene abitualmente presentato in forma concreta: per esempio i numeri dei segni sulle facce di un dado, o anche quelli delle figure sulle carte da gioco, forse raramente sono i risultati di conteggi. Invece quando un insieme di oggetti incomincia ad essere relativamente numeroso rispetto all'esperienza abituale del soggetto la determinazione del numero consegue ad una operazione a cui possiamo dare il nome (già adoperato poco fa) di conteggio. Con questa operazione si fanno passare l'uno dopo l'altro gli elementi di un insieme, attribuendo a ciascuno un nome, che è un termine numerico. Chiaramente con questa operazione viene introdotto nell'insieme un ordinamento, anche se esso non ne possedeva originariamente uno.

Si potrebbe pensare che ciò provi una specie di precedenza dell'aspetto ordinale sull'aspetto cardinale del numero; ma questa tesi potrebbe generare qualche perplessità, quando si osservi che, per l'operatore; il nome pronunciato al passare di ogni elemento dell'insieme può significare anche il numero cardinale degli elementi già conteggiati. Si osserva inoltre che, a rigore, poiché, come si è detto, il conteggio introduce in un insieme un ordinamento che forse prima non esisteva, occorrerebbe dimostrare che il numero a cui si giunge dopo di aver fatto passare ogni elemento dell'insieme non dipende dalle scelte che si fanno; tuttavia siamo convinti che la validità di questo legittimo dubbio critico non sia apprezzata in prima istanza da un operatore comune; il quale è ovviamente convinto che il numero raggiunto con il conteggio sia il numero cardinale degli elementi dell'insieme e che quindi sia indipendente dalle modalità con le quali il conteggio avviene.

Si potrebbe quindi concludere che i due aspetti, cardinale ed ordinale, del numero naturale siano nella pratica strettamente connessi, anche se concettualmente essi sono distinguibili tra loro. Questa connessione prosegue e permane anche quando dalla pura e semplice enumerazione degli oggetti si passa all'apprendimento delle operazioni sui numeri.

In questo ordine di idee si può osservare che la costruzione dei concetti numerici permette di rappresentare gli insiemi e di prevedere i risultati di certe operazioni che noi eseguiamo su di essi. Per esempio, indichiamo qui con lettere maiuscole, come A, B, C, ecc. degli insiemi finiti, e scegliamo il solito simbolo "∅" per indicare l'insieme vuoto; indichiamo poi con i soliti simboli:

$$A \cup B \ ; \ A \cap B \ ; \ A \times B,$$

l'insieme unione, l'insieme intersezione e l'insieme prodotto cartesiano dei due. Scegliamo infine il simbolo:

$$|A|$$

da leggersi per esempio con la frase "numero degli (elementi di) A", o “cardinalità di A”, per indicare il numero cardinale degli elementi dell'insieme A; potremo porre ovviamente

$$|\emptyset| = 0.$$

Allora si avranno le relazioni:

(1) $|(A \cup B)| + |(A \cap B)| = |A| + |B| \quad ; \quad |(A \times B)| = |A| \cdot |B|$.

Le due formule mostrano un fondamentale parallelismo tra le operazioni che noi eseguiamo sugli insiemi e quelle che eseguiamo sui numeri cardinali dei loro elementi; in particolare per esempio la prima delle (1) stabilisce un parallelismo ben noto tra l'operazione di unione tra due insiemi che non hanno elementi in comune (cioè per i quali si abbia $A \cap B = \emptyset$) e la somma dei due numeri corrispondenti.

Si potrebbe dire addirittura che questo parallelismo, considerato come evidente sulla base della esperienza comune, fonda spesso la presentazione dell'operazione tra i numeri. Inoltre, le proprietà commutativa ed associativa, supposte note e valide per le operazioni sugli insiemi, vengono spesso invocate, in forza delle (1), come fondamenti delle corrispondenti proprietà delle operazioni sui numeri. In altre parole, l'insieme dei concetti e dei simboli della matematica ci si presenta come un sistema di strumenti per rappresentare la realtà materiale con certe operazioni e con certe convenzioni; in questo ordine di idee quindi ciò che noi facciamo si presenta come una specie di cifrazione, di codificazione, con cui noi rappresentiamo la realtà (o, meglio, certi suoi aspetti) mediante strumenti concettuali, che ci permettono di descriverla con precisione e di prevedere i risultati delle nostre manipolazioni su di essa.

Nello stesso ordine di idee, ci pare di poter dire che la procedura che conduce a presentare le proprietà delle operazioni sui numeri, fondandole sulle proprietà delle operazioni sugli insiemi, è valida e giustificata dal fatto che nel momento della costruzione dei concetti numerici e delle loro proprietà, la realtà concreta del vissuto del discente, e la sua esperienza quotidiana di manipolazione delle cose materiali sono il fondamento e la giustificazione della astrazione, che lo conduce dall'operare sulle cose ad operare sui concetti che le rappresentano alla nostra mente.

È chiaro che, a questo livello, l'insegnamento delle strutture astratte avviene in forma paradigmatica; e qui utilizziamo il termine "paradigma" per indicare un esempio, o una batteria di esempi, talmente caratteristici da fornire al discente lo stimolo e il fondamento sicuro per la costruzione autonoma del sistema di concetti e delle proprietà delle operazioni.

7 - Scrittura e simbolizzazione.

La nascita dei concetti numerici è accompagnata dalla formazione di un insieme di convenzioni dirette a rappresentare i concetti costruiti. Questa formazione accompagna sempre la costruzione dei concetti numerici, ma è distinta da essa; ciò appare chiaro a chi osservi che esistono diverse convenzioni per la rappresentazione dei numeri. Tuttavia, la rappresentazione, verbale e grafica, appare necessaria per la comunicazione, che è un dato fondamentale ed insopprimibile della vita associata. Le ricerche storiche insegnano che da millenni varie civilizzazioni (mesopotamica, indiana, cinese, Maya ed altre ancora) hanno escogitato delle convenzioni per rappresentare i numeri. Tali convenzioni sono ovviamente strettamente collegate con le lingue usate da quei popoli per comunicare altri concetti, e quindi si presentano sotto vari e diversi aspetti.

Tuttavia, si potrebbe dire che uno degli aspetti comuni a molti (se non addirittura a tutti) i sistemi di numerazione è stata la scelta di uno più insiemi che funzionassero come dei raggruppamenti elementari, con i quali vengono costruiti gli insiemi più numerosi, quando sia necessario. Si potrebbe dire che un momento cruciale della operazione di astrazione, che conduce alla costruzione del concetto di numero, sia quello dell'individuazione dell'insieme "considerato come un tutto unico", come si legge nella frase di G. Cantor, che abbiamo citato sopra (N. 3). Si potrebbe quindi aggiungere che l'insieme esisteva già molto prima di Cantor, fin dall'inizio dell'epoca in cui l'uomo ha incominciato a contare; ciò ovviamente non toglie nulla al genio di Cantor, il quale tra l'altro, ha avuto il merito di rendere espliciti molti concetti e molte procedure mentali che prima di lui erano utilizzati in forma intuitiva ed implicita.

Per prendere in considerazione un esempio storicamente più vicino a noi, possiamo osservare che le convenzioni romane per la rappresentazione dei numeri naturali adottavano dei simboli appositi per i numeri di certi insiemi particolari: come è noto, fra tali simboli vi sono: V, X, L, C, D, M. Ci occuperemo tra poco del sistema di convenzioni oggi utilizzato da tutto il mondo civile; qui ci limitiamo ad osservare che questo sistema è fondato sulla scelta di una "base di numerazione" che, come tutti sanno, è il numero 10.

Tuttavia, la Storia ha registrato anche altre scelte di insiemi fondamentali e tracce di queste scelte si incontrano anche in certe lingue. Per esempio, è noto che in francese, dal 60 al 100 la numerazione parlata procede per ventine; per esempio il numero 80 viene letto "quatrevingt", e per esempio il numero 93 viene letto "quatrevingtreize", cioè: $80 + 13$.

Sappiamo anche che, in certe nostre regioni, per contare certi prodotti il gruppo fondamentale era costituito da 12 elementi: il caso tipico (ma non unico) è fornito dal commercio delle uova, che una volta si vendevano alla dozzina.

Durante l'evoluzione millenaria, che ha condotto l'umanità alle convenzioni oggi universalmente adottate, sono state scelte varie altre convenzioni per rappresentare dei numeri diversi da quelli di certi insiemi stabiliti; per esempio sappiamo che nelle convenzioni romane l'accostamento dei simboli di due insiemi indica il numero che è somma dei numeri rappresentati dai simboli singoli: così per esempio XX rappresenta $10 + 10 = 20$.

È noto che il nostro sistema per rappresentare i numeri naturali si fonda su due convenzioni fondamentali: una è la scelta del numero del gruppo base per la numerazione, ed abbiamo visto che tale scelta è caduta sul 10; ciò richiede l'introduzione di 10 simboli; nove che noi chiamiamo abitualmente "cifre significative" e lo "zero". La seconda convenzione è abitualmente chiamata "convenzione posizionale"; in base a questa il numero indicato da una cifra è dato dal prodotto di quello che sarebbe indicato dalla cifra presa da sola, moltiplicato per una potenza della base 10, che dipende dalla posizione della cifra. Quindi, come è ben noto, con una successione di cifre noi indichiamo il numero che si ottiene con tre operazioni: elevazione a potenza, prodotto e somma. Così, per esempio, con il simbolo "437" noi indichiamo il numero che si ottiene con il calcolo seguente:

$$4 \cdot 100 \ + \ 3 \cdot 10 \ + \ 7.$$

Tutte queste cose sono ben note, e l'impiego di questi strumenti ci appare come del tutto naturale, a seguito degli esercizi compiuti in età infantile e dell'utilizzo abituale di queste convenzioni. Occorre tuttavia ricordare che queste sono il risultato di un'evoluzione millenaria, e che sono obbiettivamente più complicate di altre, che erano state inventate prima. Pertanto, può darsi il caso che un soggetto possa provare qualche difficoltà nell'impiego di queste nostre convenzioni che a noi appaiono tanto facili e quasi naturali.

Il nostro sistema di convenzioni per rappresentare i numeri naturali permette di rappresentare dei numeri comunque grandi; cosa che risulta molto difficile con altre convenzioni (per esempio con le convenzioni romane); ma soprattutto il nostro sistema permette di eseguire facilmente e speditamente le operazioni fondamentali dell'aritmetica. E questo fatto è di importanza fondamentale per poter utilizzare il linguaggio matematico come linguaggio della pratica, della tecnica e della scienza. Per questa ragione le tecniche per eseguire le operazioni col nostro sistema di convenzioni vengono insegnate fino dai primi anni di scuola, e si pretende che vengano memorizzate, spesso insistendo sulla manovra dei calcoli a spese della comprensione del loro significato.

8 - Proporzioni tra numeri.

La manipolazione degli insiemi finiti non esaurisce ovviamente le necessità della nostra conoscenza della realtà e del nostro intervento su di essa. Ci si spiega quindi che la problematica relativa al numero naturale sia soltanto una parte di quella relativa alla costruzione di un più ampio sistema di concetti e della relativa simbologia; costruzione che risponde alla necessità della conoscenza e della manipolazione di una realtà più articolata e complessa di quella degli insiemi finiti.

Noi sappiamo che nella nostra matematica è stato costruito il sistema dei numeri razionali (di cui diremo nei seguenti paragrafi), che costituiscono il punto di partenza per conoscere e dominare il mondo di quegli enti che vengono chiamati genericamente "grandezze". È interessante osservare che questa problematica è già stata affrontata nell'opera fondamentale di Euclide, che - come è noto - è intitolata "Elementi".

[NdR. *In rete si può vedere* http://web.math.unifi.it/users/ottavian/euclidel/euclidel.htm]

Tuttavia, gli strumenti che oggi si usano non sono più quelli escogitati da Euclide: infatti noi abbiamo costruito il concetto di "frazione", e nella pratica noi operiamo con certe frazioni di specie particolare, che vengono chiamate, come è noto, "numeri decimali", I vantaggi pratici dell'impiego di questi strumenti concettuali sono talmente grandi e numerosi che noi insegnamo il loro impiego nelle scuole dell'ordine elementare. Tuttavia, penso che non sia inutile riservare qualche attenzione all'atteggiamento tenuto da Euclide di fronte a problemi analoghi: infatti il meditare sulla soluzione di un problema, ottenuta con strumenti relativamente poco potenti, può chiarire il significato di certe regole e di certe procedure, e soprattutto può anche essere di aiuto per la ricerca di una didattica che miri all'essenza delle cose e non si soffermi sul puro addestramento all'impiego di strumenti che il discente non sempre comprende appieno, e quindi memorizza senza dominarli. Il che sarebbe contrario a quello scopo di condurre il discente all'appropriazione autonoma ed attiva che è il fondamento e lo scopo del valore formativo dell'insegnamento della matematica.

Nell'opera di Euclide gli argomenti che ci interessano qui vengono trattati in due libri [Libro V e Libro VII], sotto la forma di teoria delle proporzioni. Euclide tratta anzitutto delle proporzioni tra numeri naturali, ed in seguito tratta delle proporzioni tra grandezze.

Il punto di partenza è la relazione tra quattro numeri, che viene chiamata "proporzione", come per esempio:

$$(2)\ 7 : 5 \ = \ 14 : 10\,,$$

leggendo, come si sa: "7 sta a 5 come 14 sta a 10".

[Nei vecchi trattati si trova anche scritto: $7 : 5 :: 14 : 10$].

La definizione del significato della (2) viene data, come è noto, introducendo tutta una nomenclatura. convenzionale: "termini medi" e "termini estremi", "antecedenti" e "conseguenti", e stabilendo che il sussistere della (2) significa che "il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi".

Questa definizione, insieme con il modo di lettura della (2), dice che il simbolo ":" indica qui qualche cosa di diverso dalla operazione di divisione, per la quale il simbolo stesso viene spesso utilizzato.

Dalla definizione, e dalle proprietà formali delle operazioni sui numeri, si traggono le proprietà delle operazioni che conducono a scrivere altre proporzioni, a partire dalla (2); tali operazioni hanno dei nomi convenzionali e tradizionali: invertendo i medi, invertendo gli estremi, componendo, dividendo ecc. Riteniamo poco utile ricordare qui delle cose ben note, che fanno parte di una manualistica tradizionale e che costituiscono spesso un bagaglio non troppo utile per la memoria, e spesso danno l'impressione che la matematica sia un insieme di verbalismi senza molto senso e scopo. Il che forse contribuisce ad allontanare certe menti dalla matematica, oppure anche a radicare un'idea sbagliata di questa dottrina nella memoria di molti. Ci limitiamo ad un'osservazione sulla quale ritorneremo in seguito: infatti, a partire dalla (2) si possono costruire infinite proporzioni, che hanno in comune con essa i primi due termini:

(3) $$7 : 5 = 14 : 10 = 21 : 15 = 28 : 20 = 35 : 25 \text{ ....ecc.}$$

In questa osservazione risiede il fondamento della circostanza essenziale che riguarda i numeri razionali: cioè il fatto che ogni numero razionale può essere rappresentato in infiniti modi; oppure anche, in forma equivalente, che il numero razionale è un concetto astratto da una classe di equivalenza di infinite coppie ordinate di numeri naturali.

9 - Proporzioni tra grandezze.

Il concetto di proporzione viene ripreso da Euclide in un apposito libro della sua opera [Libro V], e la sua applicazione viene estesa dai numeri naturali a quegli enti che vengono abitualmente chiamati "grandezze".

Il problema di precisare il significato del concetto di grandezza è analogo a quello della definizione del concetto di numero naturale. Certe abitudini di verbalismo formale hanno fatto considerare accettabili agli autori di certa manualistica delle frasi del tipo: "Grandezza è tutto ciò che può crescere o diminuire", o frasi analoghe. Anche in questo caso l'atteggiamento della moderna critica dei fondamenti consiglia di evitare di insegnare e far memorizzare frasi di questo tipo, e conduce a scegliere invece delle definizioni implicite. Qui non possiamo soffermarci a sviluppare questo aspetto della questione e pertanto accettiamo il concetto di grandezza, e quello di classe di grandezze omogenee, come dati dalla esperienza e dalla intuizione.

Ci limiteremo a ricordare tutta una serie di concetti, che vengono abitualmente considerati come appartenenti alla categoria delle grandezze; questi sono concetti della vita quotidiana, come per esempio pesi, capacità, prezzi, somme di denaro ecc.; oppure concetti della geometria, come lunghezze, aree, volumi, angoli ecc.; oppure concetti della fisica: durate, velocità, masse, differenze di potenziale, intensità di corrente, quantità di energia, potenze ecc.

Indicheremo qui con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come $A, B, C, D,$ .... $X, Y, Z, U,$ ... delle grandezze; indicheremo con lettere minuscole come $a, b, c, \ldots m, n, p, q, r,$ .... dei numeri naturali.

Siano A e B due grandezze omogenee tra loro; e siano C e D altre due grandezze, pure omogenee tra loro (non necessariamente con le prime due); con la formula convenzionale:

(4) $$A : B = C : D ,$$

leggendo " A sta a B come C sta a D", si indica una relazione tra le quattro grandezze che viene definita come segue. Per ogni coppia di numeri naturali m, n:

a) ogni volta che è $mA = nB$ è anche $mC = nD$ e viceversa;

b) ogni volta che è $mA > nB$ è anche $mC > nD$ e viceversa;

c) ogni volta che è $mA < nB$ è anche $mC < nD$ e viceversa.

La relazione (4) nei vecchi trattati viene spesso scritta anche nella forma "$A : B : : C : D$". Essa viene chiamata "proporzione" tra le quattro grandezze A, B, C, D; inoltre la (4) viene spesso anche letta dicendo che: "A sta a B nello stesso rapporto in cui C sta a D".

Ritorneremo in seguito su questi concetti. Qui ci limitiamo a dire che la definizione di proporzione che abbiamo dato, e che riproduce la definizione classica, richiede qualche osservazione.

OSS 1 - Date due grandezze qualisivogliano A e B non è detto che esistano due numeri naturali m ed n tali che si verifichi la circostanza a); se ciò accade, si dice che le due grandezze A e B costituiscono una coppia di grandezze tra loro commensurabili; e si vede subito che se esiste una coppia di numeri naturali m ed n tali che si verifichi la circostanza a), esistono infinite coppie di numeri naturali cosiffatte. Se non esiste alcuna coppia di numeri naturali tali che si verifichi la a), si dice che le due grandezze A e B sono tra loro incommensurabili.

I termini “commensurabile” ed “incommensurabile” derivano ovviamente dal termine latino "mensura" che significa "misura"; ciò fa prevedere che la teoria delle proporzioni tra grandezze sia strettamente collegata con la teoria della misura; vedremo che questa operazione ha una importanza fondamentale per l'impiego della matematica nella conoscenza pratica e scientifica della realtà.

Sappiamo che il primo esempio conosciuto di coppie di grandezze tra loro incommensurabili è fornito dalla diagonale e dal lato di un medesimo quadrato; la loro incommensurabilità viene dimostrata come conseguenza del noto Teorema detto “di Pitagora”, uno dei primi teoremi storicamente conosciuti.

OSS. 2 Nella definizione classica di proporzionalità vengono impiegati soltanto i multipli delle grandezze; non si parla di sottomultipli, come noi usiamo fare. Ciò forse è segno di una preoccupazione critica di alto livello, che dimostra la profondità e la acutezza dello spirito scientifico dei Greci: infatti la definizione del concetto di sottomultiplo di una grandezza qualunque richiede una elaborazione teorica che la matematica greca non aveva sviluppata.

OSS. 3 La definizione data di proporzione tra quattro grandezze può richiedere, in linea di principio, infinite operazioni, dirette a verificare che sussistano le relazioni b) e c) per ogni coppia di numeri naturali. Ciò fa intuire che la costruzione di un sistema di concetti e di simboli atti a dominare completamente la teoria delle grandezze, in tutte la sua estensione possibile, richiede la adozione di procedimenti infiniti.

E ciò avviene di fatto con la teoria dei numeri reali, che noi non svilupperemo interamente qui; ci limiteremo invece a fare qualche osservazione a proposito delle possibilità di migliorare le informazioni che si ottengono per mezzo della operazione di misura.

È noto che in relazione alla (4) viene insegnata tutta una nomenclatura classica, analoga a quella che abbiamo ricordato a proposito della (2) del N.6, e sulla quale non ci soffermeremo qui. Inoltre, Euclide mostra la possibilità di eseguire sulle grandezze, legate dalla relazione (4), certe operazioni che vengono ancora chiamate "componendo" e "dividendo". Nel tentativo euclideo di dimostrare la validità di questa seconda operazione la critica posteriore rilevò una lacuna logica; in sostanza questa lacuna consiste nel considerare evidente l'esistenza della grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze date; esistenza che non consegue da ciò che è stato dimostrato in precedenza, e che non può essere dimostrata nell'ordine di idee del trattato euclideo, perché richiede l'enunciazione di un apposito postulato (un postulato di continuità) che non si trova enunciato nell'opera di Euclide.

Questa lacuna del trattato euclideo è rimasta celebre e fu oggetto di riflessione da parte di molti matematici; tra gli altri da parte del Padre Girolamo Saccheri S. J. [16671733] il quale scrisse una celebre opera, intitolata: "Euclides ab omni naevo vindicatus" [Euclide liberato da ogni neo], nella quale si sforza di colmare due lacune dell'opera euclidea. Una di queste è appunto l'esistenza della grandezza che è quarta proporzionale dopo tre grandezze date; l'altra è il celebre postulato della parallela. È quest'ultima la parte dell'opera del Saccheri che viene più frequentemente citata, anche se egli non raggiunse lo scopo che si proponeva, che era quello di dimostrare come teorema la validità della proposizione affermante l'unicità della parallela, proposizione che Euclide aveva formulato come postulato. Occorre dire che il Saccheri non fu fortunato neppure nel tentativo di cancellare l'altro "neo" del trattato euclideo, perché, ripetiamo, la dimostrazione dell'esistenza della grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze date richiede l'enunciazione di un postulato apposito che la renda possibile; il che non è stato fatto dal Saccheri.

[QUESTE DIGRESSIONI POSSONO ESSERE GIUDICATE INUTILI ALLO SCOPO DELLA PRESENTAZIONE DEI CONCETTI MATEMATICI. MA RITENGO CHE L'AZIONE DIDATTICA GUADAGNI DA OGNI AMPLIAMENTO DELL'ORIZZONTE CULTURALE DEL DOCENTE]

10 - Numeri razionali.

Consideriamo nella (4) il caso particolare in cui A e B siano commensurabili tra loro, ed in cui C e D siano due numeri naturali m ed n; si abbia quindi:

(5) $$A : B = m : n.$$

Segue quindi da qui:

(6) $$n A = m B.$$

Come abbiamo già osservato (N. 8), se sussiste la (5) sussistono anche infinite altre proporzioni, del tipo:

(5)' $$A : B = km : kn$$

essendo k un numero naturale qualsivoglia.

La matematica greca ha elaborato la teoria delle proporzioni tra grandezze operando soltanto sul concetto di multiplo di una grandezza; abbiamo infatti già avuto occasione di dire che i Greci non prendevano in considerazione l'enunciazione esplicita del concetto di continuità, in base alla quale è possibile dimostrare l'esistenza di un sottomultiplo di una grandezza qualsivoglia secondo un numero naturale qualunque. Oggi si preferisce enunciare per le grandezze (tra gli altri) un postulato di continuità, il quale permette di dimostrare l'esistenza di una grandezza che sia sottomultipla di un'altra qualunque, secondo un numero naturale n qualunque. In altre parole, dato un numero naturale n qualunque, e considerata una grandezza qualunque B, si dimostra che esiste una grandezza X tale che si abbia:

(7) $$n X = B.$$

È noto che la grandezza X che figura nella (7), viene abitualmente indicata col simbolo:

(8) $$X = (1/n) B,$$

leggendo "X è uguale ad un ennesimo di B".

OSS.- Ciò che è stato detto si riferisce alle questioni teoriche riguardanti il concetto generale di grandezza; nell'esperienza quotidiana si accetta come evidente ed intuitivo il fatto di poter dividere una grandezza qualsivoglia in un numero qualunque di parti uguali; ciò è confermato anche dall'esistenza, nelle varie lingue, di vocaboli appositi, che indicano appunto certe parti (quelle più abitualmente considerate) delle grandezze: per esempio nella nostra lingua ci sono i vocaboli "un mezzo", "un terzo", "un quarto" ecc. In altri tempi si usava esprimersi dicendo "pagare la decima"; ciò esprimeva la procedura che si adottava in altri tempi da parte dell'autorità politica: il raccolto agricolo veniva diviso in dieci parti uguali, ed il rappresentante dell'autorità ne prendeva una.

Questo è anche l'atteggiamento che si assume nella didattica, soprattutto nella didattica elementare, che prende i suoi punti di partenza dalla esperienza del vissuto quotidiano dei discenti. Tuttavia, è utile sapere che non sempre l'esperienza quotidiana, presa da sola, è fondamento esclusivo di conoscenza rigorosa; e che occorre spesso rimeditare criticamente anche le cose che appaiono più evidenti.

Una volta accettata l'esistenza del sottomultiplo di una grandezza qualunque, è chiaramente possibile considerare anche il multiplo di questa grandezza. Si giunge così a dedurre dalla (6) la formula convenzionale:

(9) $$A = (m/n)\,B$$

che si legge, come è noto, " A è uguale agli m n-esimi di B", o con espressioni analoghe.

Nella (9) compare il simbolo nuovo "m/n", che viene chiamato abitualmente "frazione". Non stiamo a richiamare qui la ben nota nomenclatura abituale riguardante le frazioni [termini, numeratore, denominatore ecc.]; preferiamo osservare che nella (9) la frazione compare come un "operatore fra grandezze": infatti la (9) può essere considerata come se dicesse che la grandezza A si ottiene dalla B considerandone il sottomultiplo secondo n e prendendo il multiplo di questo sottomultiplo, secondo il numero m.

La frazione m/n viene anche chiamata "rapporto" della grandezza A alla grandezza B; abbiamo già avuto occasione di incontrare questo termine (N.9).

Qui osserviamo che, in forza di quanto è stato detto sopra, ed in particolare in forza della (5)', l'operatore m/n produce lo stesso risultato di uno qualunque tra gli infiniti operatori:

(10) $$km/kn,$$

essendo k un numero naturale qualunque. È questo il fondamento della nota definizione di "frazioni equivalenti". In forza dell'osservazione, e della conseguente definizione, si costruisce il concetto di "numero razionale", del quale già abbiamo parlato (N. 8). È questo l'operatore tra grandezze, che viene rappresentato da una qualunque tra le infinite frazioni equivalenti, date da espressioni analoghe alla (10).

Sappiamo che è possibile definire delle operazioni tra numeri razionali, cioè tra classi di frazioni equivalenti: tali operazioni ricevono i nomi abituali che si adoperano per le operazioni sui numeri naturali, (addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione) e sono indicate con gli stessi simboli; ciò è giustificato dal fatto che tali operazioni sui numeri razionali godono delle stesse proprietà formali che valgono per le operazioni dello stesso nome eseguite sui numeri naturali: commutativa ed associativa per l'addizione, commutativa ed associativa per la moltiplicazione, distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Pertanto, per esempio siamo autorizzati a scrivere in ogni caso:

(11) $$a + b = b + a,$$

e questa relazione risulta valida tanto quando a e b indicano numeri naturali, che quando a e b indicano numeri razionali. Effettivamente si può leggere la relazione pensando che essa indichi non soltanto una proprietà dei numeri coinvolti, ma anche una proprietà dell'operazione indicata col simbolo "$+$".

Esiste inoltre un sottoinsieme dei numeri razionali, e precisamente quelli rappresentati dalle cosiddette "frazioni apparenti", i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali; si suole esprimere questo fatto, in forma non completamente precisa ma suggestiva, dicendo che "i numeri naturali sono particolari numeri razionali", oppure anche dicendo che "l'insieme dei numeri razionali costituisce una estensione dell'insieme dei numeri interi".

L'origine del termine "numero razionale" va cercata nella lingua latina, per la quale la parola "ratio" (ragione) non soltanto indicava la ragione nel senso di dote umana di capacità di esercitare il ragionamento, ma aveva anche il significato di "relazione", "rapporto"; ed in questi sensi era anche preso il termine greco corrispondente "logos". Quindi il termine "numero razionale" starebbe ad indicare un concetto che può essere espresso con un solo rapporto tra numeri interi (una frazione appunto); infatti la matematica prende in considerazione anche dei "numeri irrazionali"; e questo termine non vuole significare che tali concetti sono contrari alla ragione, ma bensì che tali concetti non sono esprimibili con un unico rapporto tra numeri naturali; i Greci li qualificavano appunto come "àlogoi", cioè inesprimibili (nel modo detto). Tale è il rapporto tra due grandezze incommensurabili, di cui abbiamo detto sopra (N. (9).

11 - Misura e rappresentazione della realtà.

A partire dalla relazione (9) si costruisce un altro concetto, che risulta essere fondamentale per l'impiego della matematica nella conoscenza della realtà. A tal fine si sceglie e si fissa convenzionalmente una grandezza di una determinata classe di grandezze omogenee; chiamiamo U tale grandezza; allora ogni altra grandezza A della classe, che sia commensurabile con U, determina un numero razionale, rappresentato per esempio da una frazione m/n, tale che sia:

(12) $$A = (m/n)\,U.$$

Si suoIe leggere la (12) dicendo che il numero razionale rappresentato dalla frazione m/n è la misura della grandezza A nella unità U.

Si ottiene così una corrispondenza biunivoca che fa corrispondere ad ogni grandezza A della classe, commensurabile con U, un numero razionale e viceversa; quindi si realizza la possibilità di rappresentare gli enti della realtà mediante strumenti del linguaggio matematico; una operazione che presenta dei vantaggi importantissimi per la pratica, la tecnica e la scienza.

Ma i vantaggi di questa corrispondenza non consistono soltanto nella possibilità di rappresentazione e di comunicazione; sappiamo infatti che sulle grandezze di una classe di grandezze omogenee si può eseguire una operazione chiamata "somma"; ed a questa operazione corrisponde l'operazione di addizione delle misure corrispondenti Si ottiene così di estendere al caso delle grandezze quel parallelismo tra operazioni sulla realtà e le operazioni sui concetti e sui simboli di cui abbiamo già detto nel N. 6, a proposito del numero cardinale e delle operazioni sugli insiemi.

Possiamo riassumere i vantaggi dell'operazione di misura delle grandezze dicendo che essa offre la possibilità di rappresentare, con opportune convenzioni, le grandezze di una classe di grandezze omogenee, e di rappresentare le operazioni sulle grandezze con operazioni sui simboli, in modo da poter prevedere i risultati delle nostre manipolazioni sulla realtà prima di eseguirle. Si potrebbe tuttavia osservare che, fino a questo punto, questi vantaggi sono validi soltanto quando si tratta di grandezze commensurabili con la grandezza che è stata scelta come unità di misura; in questo caso infatti il rapporto tra le due è un numero razionale. Tuttavia, è stato anche detto (N. 9) che esistono anche coppie di grandezze incommensurabili tra loro. Ci si domanda quindi come sia possibile estendere anche a queste coppie di grandezze l'operazione di misure, con i relativi vantaggi per la pratica, la tecnica e la scienza.

12 - I cosiddetti "numeri decimali".

Per rispondere alla domanda con la quale si chiude il paragrafo precedente, cioè per rispondere (almeno in parte) al problema di determinare e rappresentare la misura di una grandezza che sia incommensurabile con quella scelta come unità di misura, si possono scegliere varie strade. Quella che è seguita più frequentemente si avvale di un particolare insieme di convenzioni per rappresentare i numeri razionali.

Ricordiamo che abbiamo presentato (N. 10) il numero razionale come un operatore tra grandezze, rappresentato da una qualunque frazione appartenente ad un insieme di infinite frazioni equivalenti. Tuttavia, in concomitanza con la scelta particolare del sistema di rappresentazione dei numeri naturali [di cui abbiamo detto sopra al (N. 7)], si suole adottare un insieme di convenzioni anche per la rappresentazione dei numeri razionali; queste convenzioni riguardano i simboli che vengono abitualmente chiamati "numeri decimali"; è questa una denominazione ormai entrata nell'uso comune (e che si incontra anche negli enunciati dei programmi di insegnamento) ma che non è perfetta: infatti l'aggettivo che accompagna il sostantivo potrebbe far pensare che si intende così indicare una nuova specie di numeri; invece si tratta soltanto di convenzioni che si scelgono per rappresentare degli oggetti mentali già noti precedentemente.

Le convenzioni di cui intendiamo parlare consistono nella scelta di rappresentare i numeri razionali soltanto con frazioni aventi come denominatore una potenza del 10, cioè della base della nostra numerazione (N. 7). Si adottano inoltre delle particolari convenzioni di scrittura, per abbreviare i simboli, e rendere più semplici e spedite le operazioni. Così per esempio si sceglie di rappresentare il numero razionale dato dalla frazione $13/4$ con la frazione equivalente $325/100$, che ha al denominatore una potenza del 10; è noto che una frazione di questo tipo viene chiamata "frazione decimale", e che essa viene abitualmente rappresentata come se fosse la somma di frazioni di tipo analogo; quindi si scrive per esempio:

(13) $$325/100 = 3 + 2/10 + 5/100;$$

ed infine si conviene di scrivere la (13) nella forma abituale:

(14) $$325/100 = 3,25$$

con l'impiego ben noto della "virgola decimale" [è noto che l'uso anglosassone, e quello della scrittura con i calcolatori elettronici, prevedono l'impiego di un "punto decimale" al posto della virgola; tuttavia questa è imposta dal sistema internazionale (S.I.) di convenzioni per la rappresentazione delle grandezze della tecnica e della scienza]. Anche qui non stiamo a richiamare la nomenclatura abituale ben nota relativa alla scrittura (14); preferiamo invece fare una osservazione importante: le convenzioni or ora esposte per rappresentare i numeri razionali non consentono di esprimerli tutti in forma finita. Anzi, in forma approssimata e poco precisa, si potrebbe addirittura dire che la maggioranza dei razionali non è esattamente rappresentabile in forma decimale con un numero finito di simboli.

Nella manualistica abituale si suole esprimere questo fatto parlando di "numeri decimali periodici"; vengono così chiamati dei simboli numerici i quali, dopo la virgola, presentano delle cifre che, da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi periodicamente. Così per esempio il numero razionale che, in forma di frazione, viene rappresentato da $10/7$, viene rappresentato in forma decimale da:

(15) $$1,42857142857142857142857\ldots$$

Il fatto che il simbolo finito non dà un'informazione completa può venire espresso scrivendo dei puntini dopo l'ultima cifra, come abbiamo fatto con la (15).

L'aritmetica precisa le condizioni necessarie e sufficienti perché un numero razionale, dato sotto forma di frazione, sia rappresentato da un numero decimale periodico. È noto inoltre che, dato che sia un numero decimale periodico, si può risalire da questo alla cosiddetta "frazione generatrice", cioè si può costruire la rappresentazione del numero razionale considerato sotto forma di frazione.

Quindi la rappresentazione decimale può non essere precisa, ma i grandi vantaggi che essa offre conducono ad adottare questa forma di espressione, anche se il simbolo che si usa non dà informazioni complete. Infatti, è possibile dare delle regole uniformi, semplici e pratiche per eseguire le operazioni con questi simboli, regole che vengono insegnate nelle scuole dell'ordine elementare.

L'impossibilità di rappresentare un concetto numerico in forma finita si presenta poi sempre quando si tratti di esprimere il rapporto tra due grandezze incommensurabili. Si suoIe dire che un rapporto cosiffatto è un numero "irrazionale", e su questa parola abbiamo già fatto qualche riflessione nel N. 10. Un caso classico, famoso nella storia della matematica, è costituito dal numero che viene abitualmente simbolizzato con la lettera greca π (pi greco) e rappresenta il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del relativo diametro. Si ha per esempio:

(16) $$\pi = 3{,}14159265358979\ldots$$

e si può dimostrare che le cifre non si riproducono in maniera periodica.

Abbiamo detto che con le rappresentazioni decimali spesso non si possono dare informazioni complete sui numeri razionali rappresentati; e mai si possono dare quando si tratti di numeri razionali. Si suoI esprimere questo fatto dicendo che le rappresentazioni decimali forniscono quasi sempre delle approssimazioni dei numeri che si vogliono indicare; e si suoI anche dire che un numero decimale fornisce una approssimazione per difetto oppure per eccesso , a seconda che esse sia minore oppure maggiore di quello che si vuole rappresentare. Così per esempio i due numeri decimali:

$$6{,}66666 \text{ e } 6{,}66667$$

forniscono due rappresentazioni del numero razionale $20/3$, rispettivamente per difetto e per eccesso; in altre parole si ha:

(17) $$6{,}66666 < 20/3 < 6{,}66667.$$

Quando si assume come valore approssimato del razionale $20/7$ il numero 6,66666, si suoI dire che tale numero decimale è un "valore troncato" del numero decimale e quando si assume il numero 6,66667 si suoI dire che questo è un "valore arrotondato" del numero decimale.

L'operazione che conduce alla scelta di questi valori viene chiamata, come è noto, "arrotondamento". Questa operazione si compie quando si vuole rappresentare un dato numero con un numero decimale, senza dover operare con troppe cifre dopo la virgola: qualora si sia presa la decisione di conservare un certo numero di cifre decimali, per arrotondare si assume un valore troncato quando la prima cifra trascurata sia 0 oppure 1, o 2 o 3 o 4; invece si aumenta di una unità l'ultima cifra che si scrive se la prima cifra che si trascura di scrivere è 5 oppure è maggiore di 5. Così nell'esempio (17), il decimale $6{,}66667$ è un valore arrotondato di $20/3$.

Abbiamo detto poco sopra che quando si adotta un valore arrotondato di un dato numero, razionale oppure no, si fa una scelta; precisamente si sceglie di commettere un errore di un determinato tipo (per difetto o per eccesso), valutando che esso non influisca sensibilmente sulle informazioni che si vogliono ottenere oppure dare. Questa scelta dipende quindi essenzialmente dallo scopo che si ha e dalla questione che si sta trattando, questione nella quale certe grandezze vengono considerate di volta in volta trascurabili.

Così è noto che il Fisco italiano, nelle istruzioni per la denuncia dei redditi dei cittadini (il modulo 740) impone di "arrotondare" le somme di denaro alle 1000 lire. Il che significa che il Fisco, in queste questioni, considera trascurabili le somme di denaro inferiori alle 1000 lire, ovvero accetta degli errori inferiori a tali somme scegliendo, entro questi limiti, la maneggiabilità dei numeri piuttosto che la precisione assoluta delle informazioni.

A proposito delle scelte che si fanno per dare o utilizzare delle informazioni, osserviamo che spesso si assume come valore approssimato di π il numero decimale $3{,}14$. Questo viene frequentemente considerato come una specie di numero magico, che viene ricordato anche da chi non si interessa di matematica o non ha bisogno di fare calcoli. Le considerazioni che abbiamo fatto poco fa mostrano che non è ragionevole pensare che si possa scegliere e determinare in ogni caso l'errore commesso assumendo sempre un determinato valore troncato di una costante che è un numero irrazionale; l'errore accettabile deve essere determinato di volta in volta, e dipende, come si è detto, dalle questioni che si trattano, dalle informazioni che si vogliono dare e dai calcoli che si vogliono fare in seguito: perché è chiaro che ogni errore nei dati di partenza si trasmette e addirittura si amplia nelle eventuali operazioni successive e quindi nelle informazioni che si ottengono.

Vale la pena di ricordare che la scelta di numeri decimali, per rappresentare dei valori approssimati di π, è relativamente recente, ed è dovuta, come si è detto, alla comodità delle operazioni che si eseguono su numeri di questo tipo, ed alla diffusione della conoscenza delle regole di tali operazioni. Tuttavia, è possibile assegnare dei valori approssimati di π anche sotto forma di frazione: si ha per esempio:

(18) $22/7 = 3{,}142857142\ldots$

con un errore In eccesso di:

(19) $\frac{22}{7} - \pi = 0{,}001264489\ldots,$

e quindi minore di

(20) $13/1000.$

E si ha anche:

(21) $223/71 = 3{,}14084\ldots$

con un errore per difetto minore di $19/10000$.

L'intervallo tra i due valori (21) e (18) è dato da:

(22) $22/7 - 223/71 = 1/497 = 0{,}00201207\ldots < 3/1000$

Quindi la matematica non ci lega per sempre ad una determinata procedura, ma possiede molti mezzi per diminuire gli errori che si commettono e migliorare le informazioni che occorrono.

Se vuoi essere capito non spiegarti. [Denis Diderot].

Non c'è come l'esperto che sia capace di spiegare una cosa in modo che non si capisca. [Agenda di Murphy].

Quando si spiegano le cose in modo che nessuno possa non capire, qualcuno non capirà. [Agenda di Murphy]

Numeri cardinali finiti e transfiniti. Ist. Mat. Univ. Milano, (1967). Dattiloscritto rieditato, pp. 1-12.

(1999) L'EDUCAZIONE MATEMATICA (Brogliaccio di un articolo per la rivista "Pedagogia e vita" per la Scuola di Brescia. Lettera del direttore prof. Norberto Galli, del 30 giugno 1999).

1 - L'insegnamento delle scienze nella nostra scuola.

La scuola italiana sta vivendo una stagione di profondi e rapidi cambiamenti. Vorremmo approfittare di questo periodo tumultuoso per aprire una riflessione sulla didattica di alcune dottrine. Sappiamo che la discussione sui contenuti dei programmi e quindi sui criteri e sulle procedure di verifica dell'apprendimento è sempre aperta: e recentemente ha raggiunto dei toni abbastanza accesi, in occasione dei "nuovi" esami di maturità. Pensiamo quindi che forse il cercare di portare la riflessione ad un livello superiore a quello della discussione puramente politica possa contribuire a chiarire qualche idea.

Pare a noi che alcuni aspetti delle pretese riforme non possano essere accettati senza riserve; o almeno senza un tentativo di analizzare i possibili fondamenti culturali e le possibili conseguenze sulle generazioni dei nostri figli e nipoti.

Uno degli argomenti che viene dibattuto molto frequentemente è quello del rapporto tra quelli che potremmo chiamare sbrigativamente contenuti umanistici e contenuti scientifici dei programmi di insegnamento e quindi anche delle procedure di verifica dell'apprendimento (che potrebbero - pure con denominazione sbrigativa - essere chiamate "esami", per fissare le idee).

Non è una novità, e neppure un segreto, il fatto che la maggioranza delle famiglie richiedono dalla scuola una preparazione degli allievi ad una entrata efficace nella società; per dirla in forma volgare, un "pezzo di carta" che apra le porte ad impieghi sicuri o a professioni redditizie. Il recente irrompere dell'informatica sulla scena delle dottrine scientifiche e delle tecnologie applicative ha dato luogo a fenomeni clamorosi per quanto riguarda la richiesta delle famiglie.

Ricordo per esempio una pubblicità che invadeva piazze e vie con frasi questo tipo: "Chi non saprà maneggiare il computer sarà l'analfabeta del futuro". È ovvio che sotto pressioni psicologiche di questo tipo le famiglie si precipitino a comperare computer per i propri figli, ed a pretendere a gran voce dei corsi di informatica dalla scuola.

Ricordo una madre di famiglia, la quale mi dichiarò con orgoglio e grande soddisfazione di aver comperato ben due computer per il figlio, scolaro delle elementari. Oggi questa pubblicità non si vede più: sono tentato di spiegare malignamente il fatto pensando che l'industria responsabile abbia ormai esaurito i fondi di magazzino, tecnologicamente superatissimi ed altrimenti invendibili. Ma resta la legittima preoccupazione delle famiglie, le quali, giustamente, mandano i figli a scuola per salvarli dall'analfabetismo. Ma si legge in questi episodi anche un atteggiamento fondamentale della società nei riguardi della scuola, la quale viene considerata soltanto come uno strumento di addestramento dei futuri cittadini alla professione ed al lavoro. Esula infatti da questi atteggiamenti ogni preoccupazione sulla formazione culturale che la scuola dovrebbe compiere nei riguardi degli alunni. Ed intendo con l'espressione "formazione culturale" la formazione alla indipendenza di giudizio ed alla autonomia razionale di comportamento fondata sulla conoscenza della storia e della società.

Forse si potrebbe vedere in questi atteggiamenti la conseguenza del prestigio immenso che la scienza ha acquisito nella nostra società; ed intendo scienza non tanto o non soltanto come dottrina che mira alla conoscenza della natura e dell'uomo, ma come fondamento di una tecnologia (nel senso più ampio che si può attribuire al termine) diretta al domino materiale, alla conquista della ricchezza o anche solo di un benessere materiale. Consegue di qui il deprezzamento degli studi umanistici e quindi anche il progressivo ed inarrestabile declino delle scuole che tradizionalmente li impartivano; parallelamente, abbiamo assistito ad un corrispondente aumento della domanda dell'insegnamento delle materie scientifiche e tecniche. Oso dire che, coerentemente con l'andamento del pensiero oggi diffuso, la scienza è vista ed apprezzata soprattutto (se non quasi esclusivamente) in vista del fatto che essa ispira, dirige ed in certo senso talvolta domina la tecnica; cioè permetto il dominio umano sulle ricchezze e sulla forze della natura.

Non intendiamo proseguire l'analisi e l'eventuale discussione in questa direzione: si potrebbero esporre tante considerazioni in proposito, ma ciò ci porterebbe lontano dagli scopi di questo scritto, che vorrebbe invece approfondire la problematica dell'insegnamento delle scienze; anzi, in particolare, la problematica dell'insegnamento della matematica. Infatti pensiamo che già soltanto questo ristretto argomento possa offrire occasioni per utili approfondimenti.

2 - La matematica è "diversa".

È abituale includere la matematica nell'elenco delle scienze che debbono essere insegnate ad ogni cittadino per fornirgli gli strumenti conoscitivi utili se non addirittura necessari per sé e per la società. Già nelle enunciazioni abituali delle nozioni fondamentali (leggere, scrivere e far di conto) questa immagine della matematica era considerata come tradizionale e comunemente accettata.

Naturalmente non intendo qui sminuire o, peggio, addirittura demolire questa immagine; ma mi basterebbe poter sostenere la tesi che essa è gravemente incompleta; e dico ciò perché mi accade spesso di incontrare un'analoga immagine della matematica che io vorrei qui chiamare "servile"; immagine che non rende giustizia alla dottrina e soprattutto induce a gravi fraintendimenti molte persone del resto anche colte ed intelligenti.

Per chiarire meglio il mio pensiero vorrei ricordare che qualche tempo fa una Rivista autorevole nel campo della didattica sfornò una serie di articoli con titoli del tipo: "Che cosa deve sapere di fisica (oppure di biologia, o di geologia ecc.) una persona colta". Ovviamente le risposte furono affidate a cultori qualificati della dottrina corrispondente; cultori che risposero enumerando i capisaldi delle relative dottrine. Il compito relativo alla matematica toccò a me, e confesso che rimasi a lungo in dubbio se accettare o meno di affrontarlo, perché pensavo, e penso tuttora, che l'enunciare una serie di argomenti o, peggio, di nozioni matematiche che l'uomo colto debba conoscere sia molto riduttivo, nei riguardi della cultura del preteso "uomo colto" ed anche nei riguardi della stessa matematica.

[Vedere *Che cosa una persona colta deve sapere di matematica.* Nuova Secondaria, 8 aprile 1985, pp. 15-18.]

Così risposi alla domanda in modo che qualcuno potrebbe considerare paradossale ed anche un poco arrogante: risposi che, al di là di quelle nozioni basilari che si insegnano alle scuole elementari (quando si impara, come dicevano i nostri nonni, a "leggere, scrivere ed a far di conto") non mi pare che esistano delle nozioni assolutamente necessarie alla cultura che appartengano al dominio della matematica; e ciò, ovviamente, se si intende per cultura una patrimonio dello spirito che permette autonomia di giudizi e libertà di comportamenti fondati su conoscenze acquisite seriamente, con impegno di studio e di meditazione. Ma insieme con queste riflessioni ho voluto anche aggiungere, in forma quasi di provocazione e di paradosso, che la persona colta deve sapere che "la matematica esiste". E con questa espressione, in forma - ripeto - quasi provocatoria, intendevo dire che la persona colta non dovrebbe ignorare che la matematica, non soltanto con i suoi metodi, ma anche, e direi soprattutto, con la sua impostazione epistemologica e con le sue procedure, ha un posto importantissimo nella cultura di oggi. E, quasi paradossalmente, il fatto che questa sua importanza non sia avvertita da molti testimonia forse proprio della sua fondamentalità, che alcuni potrebbero giudicare addirittura invadenza. Non intendo soltanto ricordare il celebre passo di Galileo, il quale affermava che la lingua in cui è scritto il "gran libro dell'universo, che continuamente ci sta aperto dinanzi a gli occhi" è la lingua matematica.

[Ho sviluppato queste idee in una relazione dal titolo “La matematica come promotrice di cultura”, che ho tenuto il 3 ottobre 1998 al VII convegno scientifico di Ancona, dedicato a “Il pensiero scientifico nelle culture.]

[NdR. Vedere 9803 *La Matematica come promotrice di cultura*. (Conferenza tenuta al settimo convegno storico-scientifico dal titolo: "Il pensiero scientifico nelle culture del mondo", Università di Ancona, 1 - 3 ottobre 1998.]

Infatti l’immagine corrente che l’uomo comune, anche abbastanza colto, ha della matematica è quella di una dottrina, per così dire, di servizio, che è strumento ormai insostituibile della scienza e della tecnica, anche la più avanzata, ma che ha ben poco da dire sul piano che si potrebbe chiamare culturale in senso lato.

Ciò si potrebbe facilmente constatare per esempio osservando le domande che certi sondaggi (vengono chiamati spesso “test”) pongono: appare spesso da queste domande che gli estensori hanno una immagine della dottrina che, a dir poco, è limitata e parziale, anche se è giustificata da certa pratica didattica, e da una caratteristica della matematica di cui diremo subito.

…………………………………..

CFM. Nota 5. SULLA DIVISIONE. Bozza di riflessione (2001).

1. I termini come dividere, suddividere, spezzare ecc.; pezzi, parti, partizioni ecc. ed i correlativi: riunire, comporre ecc.; riunione, composizione ecc. descrivono azioni e concetti della vita quotidiana; e pertanto possono avere significati diversi, anche abbastanza distanti tra loro. Il significato di ciascuno viene di solito precisato dal contesto del discorso in cui il singolo termine è inserito.
2. Impiegheremo qui il termine *divisione*, e quelli grammaticalmente e logicamente collegati, in relazione agli insiemi finiti, ed ai concetti dell'aritmetica elementare (quella che tratta dei numeri naturali) che da essi nascono e che ad essi fanno riferimento.
3. In quest'ambito il termine *divisione* viene impiegato per indicare l'operazione relativa ad un dato insieme finito ed alla identificazione di suoi sottoinsiemi che siano: a) disgiunti; b) siano tali che la loro riunione ricostituisca l'insieme dato.
4. In un senso ancora più ristretto si parla di divisione per indicare l'operazione descritta al n.3, a cui si impone la condizione che i sottoinsiemi che si identificano o si costruiscono siano equipotenti.
5. Sorge qui una difficoltà pratica e concettuale, perché non è detto che l'operazione sia sempre eseguibile: la cosa risulta immediatamente dall'esperienza quotidiana: esiste addirittura una canzone infantile che inizia con i versi: "Quarantaquattro gatti, in fila per tre col resto di due…"
6. La canzoncina ricordata fa riferimento ad una possibile procedura che si segue per cercare di eseguire la partizione di un insieme dato in sottoinsiemi equipotenti; tale procedura consiste nello "scorporo" successivo di sottoinsiemi dall'insieme dato, scorporo immaginato o addirittura eseguito su un modello, fino ad esaurimento degli elementi dell'insieme stesso. L'esperienza comune insegna che l'operazione finisce dopo un certo tempo, ma che può accadere che alla fine rimanga un *resto*, cioè un sottoinsieme che è equipotente soltanto ad una parte (propria) di ciascuno dei sottoinsiemi equipotenti che si sono costruiti.
7. In molti libri di aritmetica elementare si suole distinguere i due casi, assegnando due nomi diversi al numero dei sottoinsiemi: tali nomi possono essere per esempio *quoziente* (nel caso in cui rimanga un resto) e *quoto* nel caso in cui l'operazione finisca senza resto. [OSSERVAZIONE PERSONALE: non ricordo quale sia la denominazione giusta o più frequente nell'uso manualistico; ma l'insistere sulla distinzione non mi pare qui molto importante].
8. In questo secondo caso ovviamente il numero degli elementi dell'insieme dato è multiplo di quello degli elementi delle parti (tra loro equipotenti); nel primo caso il numero degli elementi dell'insieme dato supera il prodotto del quoziente per il numero degli elementi di ciascuno degli insiemi parziali. Ma la differenza tra questo prodotto ed il numero degli elementi dell'insieme dato è minore del numero degli elementi di ciascuna delle parti.
9. Il contenuto del n. 8 giustifica le procedure dell'algoritmo abituale che si incontra nell'aritmetica pratica. Non ci soffermiamo su questo algoritmo, e ci limitiamo ad osservare che l'operazione chiamata "divisione" realizza una tipica operazione *per tentativi*; e ciò può presentare qualche difficoltà per chi è abituato a considerare la matematica come una dottrina che insegna procedure certe e dirette per avere delle risposte sicure.

Milano, 7 giugno *2001*

Cara Clara, unisco alcune riflessioni sull'operazione di divisione. Non ho osato redigere un diagramma o una tavola con frecce, perché penso che questo compito richieda ulteriori riflessioni e soprattutto richieda anche pratica dell'insegnamento concreto dell'argomento. Se non sono riuscito a fare tutto quello che ti aspettavi da me ti prego di scusarmi .

CFM. Nota 6. Sulle operazioni inverse.

OSSERVAZIONE - Le operazioni cosiddette "inverse" (sottrazione e divisione) presentano delle difficoltà in relazione ai contesti differenti nei quali esse vengono presentate.

Sottrazione: si parte dallo scorporo di un sottoinsieme B da un insieme dato A con conteggio degli elementi rimanenti. Qui i due insiemi sono presenti, palpabili, tangibili, e rappresentabili con oggetti materiali, e quindi con simboli che non richiedono operazioni dell'immaginazione. Diverso è il caso di determinare quanti elementi "mancano" a B per giungere ad avere quanti elementi ha A. Qui il soggetto deve immaginare che cosa avverrebbe se si aggiungessero a B certi elementi, in modo da poter constatare l'uguaglianza di cardinalità con A. I due problemi sono aritmeticamente isomorfi (nel senso che danno luogo alla stessa operazione aritmetica, e quindi ad un unico algoritmo risolutivo) ma appaiono nettamente diversi a certi soggetti, i quali non riescono a trovare la somiglianza, e non riescono neppure a giustificarla con l'unicità dall'algoritmo.

Divisione: qui il problema è analogo, anche se complicato da varie circostanze. Una prima presentazione tangibile ed elementare è quella che introduce l'operazione come "distribuzione" di carte, di caramelle. Se si hanno 21 caramelle da distribuire a 3 ragazzini, l'operazione più immediata è quella di darne una a ciascuno, fino a che il mucchio non è esaurito. Quando l'operazione è finita, ci saranno 7 caramelle per ragazzo.

Ma la necessità di stabilire un algoritmo, e di abbreviare l'operazione quando i numeri sono grandi, conduce a considerare l'operazione finita, e a presentare il problema della distribuzione come quello di "cercare quel numero che moltiplicato per 3 (numero dei ragazzi) dà 21 (numero di caramelle esistenti)". Appare ovvio che qui il soggetto deve sforzarsi di immaginare l'operazione compiuta ed eseguire l'operazione di moltiplicazione su un insieme soltanto immaginato (quello delle caramelle possedute da ciascuno alla fine). Dal punto di vista algoritmico poi la situazione è ancora più complicata, perché la ricerca del numero che, moltiplicato per il divisore, dà il dividendo, viene fatta per sottrazioni successive.

[HO PARLATO DI QUESTO NELLA LEZIONE DEL 24 MARZO 1993 AL CORSO DI PSICOLOGIA].

CFM. Nota 7. 1997. BOZZA DI UNA RIFLESSIONE SUL CONCETTO DI ANGOLO.

1 - Il concetto espresso dal termine “angolo” nasce ovviamente da una grande varietà di esperienze concrete e quotidiane. Da questa varietà di esperienze di partenza consegue il fatto che il termine acquisti molti significati, distinti e spesso abbastanza diversi loro; e che risulti difficile precisare in un solo modo il significato del termine; e consegue infine che sia difficile stabilire dei collegamenti facili e chiari tra le varie teorizzazioni e precisazioni che si possono dare. D'altra parte non appare prudente scegliere una tra le possibili teorizzazioni, ed escludere le altre, perché ciò condurrebbe a difficoltà nell'impiego pratico del concetto e delle sue conseguenze; ed anche potrebbe indurre confusione in alcuni soggetti.

2 - Dalle analisi delle esperienze quotidiane e delle loro verbalizzazioni (o rappresentazioni linguistiche, che dir si voglia) si possono identificare varie accezioni del termine "angolo".

a) Una prima accezione del termine fa riferimento ad un sottoinsieme di piano, limitato da due semirette aventi una comune origine. È noto che le due semirette vengono abitualmente chiamate "lati" dell'angolo, e la loro comune origine viene chiamata" vertice" dell'angolo. È da osservarsi che questa porzione di piano in linea di principio è illimitata, ma viene quasi sempre immaginata come limitata, così come è di solito la nostra esperienza concreta.

Spesso addirittura le espressioni linguistiche, parlando di "angolo", fanno riferimento ad un insieme di punti dello spazio, compreso tra due semipiani che hanno una retta come origine comune; tale porzione di spazio dovrebbe essere chiamata più precisamente "angolo diedro", ma viene indicata sbrigativamente col termine "angolo", come si può constatare dalle abitudini quotidiane diffuse.

Si rifletta sulle frasi seguenti: "*Chiudi l'ombrello e mettilo nell'angolo*". Ovviamente l'ombrello è un oggetto solido, tridimensionale; ma nell'immaginazione di colui che parla pare che sia prevalente la regione di pavimento (e quindi di un piano) in cui la punta dell'ombrello deve essere posta. Ma si consideri per esempio la frase seguente: "*I ragni fanno la loro tela nell'angolo tra due pareti."* In questo caso pare che si possa dire che il termine “angolo” vuole indicare la regione spaziale (quindi un diedro) limitata dalle due pareti.

Comunque sia, negli esempi citati si intende indicare una regione (del piano o dello spazio) nel cui interno si immagina di operare; cioè quello che si potrebbe chiamare anche un "angolo (piano o spaziale) rientrante”.

Ma si consideri per esempio la frase seguente: "*Il ladruncolo prese la corsa e sparì dietro l'angolo della casa”.* In questo caso si può dire che il termine indica un angolo che viene considerato come “sporgente”, ossia come un “saliente” dell'edificio a cui si accenna, e colui che parla viene immaginato al di fuori dell'edificio stesso; ovviamente, anche in questo caso, si dovrebbe parlare più precisamente di "diedro"; ma è facile osservare che l'espressione più geometricamente precisa non sarebbe compresa dall'ascoltatore comune.

Quindi nel primo caso l'osservatore è immaginato nella regione angolare che viene chiamata "angolo convesso", mentre nel secondo caso l'osservatore viene immaginato nella regione che oggi si suol chiamare "dell'angolo concavo".

3 - b) Una seconda accezione del termine "angolo" fa riferimento alla mutua posizione di due semirette che hanno l'origine in comune. È questo l'atteggiamento che si incontra in Euclide, che scrive: "Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee <rette> su un piano, le quali si incontrino fra loro e

non giacciano in linea retta" [Cfr. per esempio GLI ELEMENTI DI EUCLIDE, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni. Torino (UTET), 1970. Libro I. Definizioni. VIII (pag.67)].

I commentatori osservano (giustamente) che, a rigore, questa frase non si può chiamare una definizione, perché rimanda il chiarimento del significato del termine "angolo" alla comprensione del termine "inclinazione", supposto noto.

Il termine "angolo" in questo secondo senso viene impiegato in molti casi: si consideri per esempio la frase seguente: " *Le due strade si incontrano ad angolo retto*". Oppure: "*Il triangolo equilatero ha tutti i suoi angoli uguali tra loro*".

Pare quindi che si possa dire che in questa seconda accezione il termine "angolo" viene riferito alla coppia di semirette aventi l'origine in comune, piuttosto che alla regione piana che ha tali semirette come confine (bordo). Tuttavia l'immagine di una regione cosiffatta non è totalmente assente, ma viene spesso vista non soltanto come insieme di punti del piano, ma come insieme di semirette aventi tutte la stessa origine, e comprese tra due semirette limitanti, che vengono chiamate "lati" dell'angolo; l'oggetto che viene più spesso richiamato da questa immagine è il ventaglio. Ma l'immagine delle stecche del ventaglio sussiste spesso insieme con quella data dall'insieme di punti del piano, ed aiuta a costruire i concetti di "angolo convesso" e di "angolo concavo", che vengono utilizzati nella teorizzazione.

4 - In questa seconda accezione l'angolo viene trattato come una specie di grandezza; alcuni Autori addirittura enumerano gli angoli tra le grandezze. A questo punto della nostra riflessione non è possibile dare un giudizio sulla validità di questo atteggiamento: infatti un giudizio cosiffatto dipenderebbe dalla scelta di una teoria completa e rigorosa delle grandezze, che qui finora non abbiamo dato. Ritorneremo presto su questo argomento; qui ci limitiamo ad osservare che spesso, a questo punto dello sviluppo della teoria, in molte trattazioni vengono introdotte delle operazioni sugli angoli. Ma queste trattazioni richiedono che il concetto, nato dalle immagini suscitate in noi dalle esperienze elementari, venga ampliato con opportune convenzioni. Ricordiamo infatti che nella frase di Euclide citata all'inizio del N.3 è menzionata una clausola limitativa; infatti ivi si parla di " ...due linee rette <...> le quali si incontrino <...> e non giacciano sulla stessa retta". Poiché noi abbiamo parlato di semirette con una origine comune, la clausola limitativa or ora ricordata significa per noi che i lati dell'angolo che consideriamo non debbano essere le due semirette che giacciono su una medesima retta, e sono separate dalla comune origine. Tuttavia gli sviluppi successivi suggeriscono l'opportunità di estendere convenzionalmente il concetto di angolo, lasciando cadere la clausola limitativa enunciata nel trattato euclideo, ed ammettendo che anche due semirette aventi l'origine comune ed appartenenti ad una medesima retta possano essere considerate come i lati di un angolo; si tratterà di un angolo speciale, del quale non si vede immediatamente il vertice, e che riceverà il nome speciale di "angolo piatto".

OSSERVAZIONE 1 - L'angolo speciale, ora introdotto convenzionalmente, non risponde all'immagine dell'esperienza abituale, dalla quale la nostra mente parte per costruire il concetto di angolo: infatti fa parte della esperienza citata la percezione di un punto particolare, che, come è noto, viene chiamato "vertice" dell'angolo. Nell'angolo piatto tale vertice non "si vede", e deve essere immaginato esistente al di là della nostra sensazione immediata.

Tuttavia l'operazione logica che si compie è molto comune in matematica: si pensi per es. alla introduzione convenzionale del concetto di insieme vuoto e corrispondentemente dello zero tra i numeri naturali: se accettiamo che questi nascano dall'operazione di contare gli elementi di un insieme finito, appare chiaro che nell'insieme vuoto tali elementi non esistono, e quindi l'operazione di contare i suoi elementi non ha senso, ed in particolare non può dar luogo ad alcun numero naturale. Tuttavia si adotta la convenzione di dare cittadinanza allo zero, e di considerarlo come un numero; convenzione che permette, come è noto, fondamentali sviluppi nella matematica.

Un’ulteriore estensione del concetto di "angolo" avviene accettando che le due semirette aventi una comune origine, che vengono chiamate "lati" dell'angolo, siano addirittura sovrapposte: in questo caso la regione del piano che si considera coincide addirittura con l'intero piano; è noto che l'angolo speciale che si considera in questo caso viene chiamato "angolo giro"; il nome deriva molto probabilmente dalle immagini cinematiche che formano l'argomento della trattazione che seguirà. [Fine dell'Osservazione]

5 - Prima di proseguire, ricordiamo brevemente i punti fondamentali del concetto elementare di grandezza; questa sommaria rassegna non sarà una trattazione esauriente, ma ha il solo scopo di giustificare le osservazioni che faremo, riattaccandoci a ciò che è stato detto nel paragrafo precedente.

In generale si suol chiamare "classe di grandezze omogenee" un insieme di enti per i quali sia possibile istituire una trattazione teorica che contempli:

I) la possibilità di stabilire e di verificare il sussistere di una relazione tra due enti della classe che sia riflessiva, simmetrica e transitiva; tale relazione viene spesso chiamata "equivalenza" o anche sbrigativamente "uguaglianza"; si pensi per esempio ai pesi dei corpi, oppure alle lunghezze dei segmenti rettilinei. Le operazioni concrete da eseguire per verificare il sussistere della relazione in parola possono essere le più diverse, dipendentemente dalla classe di enti considerata: per esempio nel caso dei pesi dei corpi è possibile utilizzare uno strumento materiale comunemente chiamato "bilancia"; nel caso delle lunghezze dei segmenti rettilinei si può immaginare di eseguire un’operazione di trasporto rigido.

II) La possibilità di definire e di eseguire una operazione di composizione interna, che viene abitualmente chiamata "somma", avente le note proprietà formali "commutativa" ed "associativa". Anche in relazione all’esecuzione concreta di questa operazione è noto che le modalità possono essere le più varie, dipendentemente dalla natura degli enti che si considerano. Non ci soffermiamo su questo argomento ben noto, e ci limitiamo a ricordare che su questa operazione di composizione, e sulle sue proprietà si fonda il concetto di "multiplo di una grandezza secondo un numero naturale", e si fonda anche la possibilità di istituire in una classe di grandezze una relazione di ordine totale. Queste due circostanze sono pure essenziali per poter definire l'operazione di misura, la quale fonda la possibilità di rappresentare con numeri una parte importante della realtà materiale.

III) La proprietà espressa dalla proposizione che viene comunemente ricordata come "Postulato di Archimede". Secondo questa proposizione, considerate due grandezze omogenee A e B, e supponendo che A sia minore di B (nell'ordinamento or ora ricordato), è possibile trovare un multiplo della minore che superi B.

6 - Possiamo ora riflettere sulle esperienze che ci conducono a costruire il concetto di angolo, nella prima e soprattutto nella seconda accezione che abbiamo considerato finora, in particolare nel N.3. In questo ordine di idee si potrebbe dire che l'esperienza comune e quotidiana ci conduce senza difficoltà ad accettare che sia valida la condizione indicata sub I) nel n. precedente; a questo proposito basterebbe fare appello all'operazione di trasporto rigido così come la immaginazione che ce la

presenta, a partire dalle manipolazioni eseguite sugli oggetti. Si suol dire che due angoli, i quali possono essere trasportati a coincidere con un movimento rigido, "hanno la stessa ampiezza". Si introduce così un nuovo concetto: quello di "ampiezza" di un angolo.

Passiamo ora a riflettere sulla operazione di "somma" di cui si parla sub II). A questo proposito conviene introdurre un simbolismo che, per quanto rudimentale, permetterà di rendere più agile il discorso. Pertanto conveniamo di indicare con lettere latine minuscole: a, b, c,....certe semirette che hanno tutte la loro origine comune in un medesimo punto o; e conveniamo di indicare con i simboli:

(1) $< a, b >$; $< b,\ c >$; $< a, c >$

gli angoli, intesi nella accezione b) presentata nel N.3, che hanno come lati le semirette indicate. Supponiamo che tutti e tre gli angoli (1) siano convessi; e supponiamo inoltre che la semiretta b appartenga alla regione convessa dell'angolo $< a, c >$. Allora si suole descrivere simbolicamente tale situazione scrivendo:

(2) $< a, c > = < a, b > \ + < b, c >$.

La formula (2) viene di solito considerata come una simbolizzazione dell'operazione che viene chiamata "somma [convessa] di angoli [convessi]"; operazione che viene descritta come se fosse eseguita trasportando rigidamente la coppia di semirette $< b, c >$ in modo che abbia la stessa origine della coppia $< a,\ \ b >$ ed in modo che le semirette a e c stiano da parti opposte del piano rispetto alla retta cui appartiene la b.

Appare chiaro dall’esperienza che l'operazione indicata dalla (2) possiede le proprietà commutativa ed associativa; e ciò giustifica il fatto che l'operazione stessa sia richiamata col nome di "somma" degli angoli.

Da questa denominazione discende facilmente l’osservazione dell’esistenza di "angoli adiacenti", definiti come quelli che hanno per somma un angolo piatto. E pure facilmente discende la definizione di "angolo retto", definito come quello che è uguale al suo adiacente. Tutto questo si trova già in Euclide [si veda per esempio l'opera citata sopra al N.3, alla pagina 67]. Questi concetti sono stati utilizzati da Euclide; si consideri per esempio la nota Proposizione 32, la quale dimostra che "In ogni triangolo [...] la somma degli angoli interni è uguale a due retti" [si veda l'opera citata nel N.3, pag.125].

Ancora dalla denominazione di "somma", data all'operazione simbolizzata dalla (2), discende il concetto di "multiplo" di un dato angolo. E da questo concetto discende poi l'insieme di operazioni che conducono alla formazione del concetto di "misura di un angolo".

A questo risultato si giunge abitualmente anche seguendo un altro cammino: precisamente, una volta introdotto l'angolo retto, si immagina di poterlo concepire come multiplo di un certo angolo elementare. La tradizione, ancora oggi seguita, adotta la novantesima parte dell'angolo retto come sottomultiplo privilegiato di questo; sottomultiplo la cui ampiezza viene assunta come unità di misura dell'ampiezza degli angoli, rispetto all'operazione di "somma"; tale unità di misura delle ampiezze angolari viene chiamata, come è noto, "grado"; spesso si aggiunge l'aggettivo "sessagesimale" , perché ci fu in passato un tentativo di razionalizzare questa misura, scegliendo come sottomultiplo privilegiato dell'angolo retto la centesima parte di questo, chiamata "grado centesimale". Ma la tradizione non è stata vinta completamente; e quindi oggi sussistono entrambe le convenzioni di misura, e il tentativo di razionalizzare certe operazioni ha avuto come risultato il rendere le cose più complicate di prima. Il che accade abbastanza spesso.

È noto che con le convenzioni sessagesimali la misura dell'angolo piatto è 180 gradi, e quella dell'angolo giro è 360 gradi. È pure noto che il grado sessagesimale viene suddiviso tradizionalmente in 60 sottomultipli, chiamati "minuti primi" ed ognuno di questi viene ulteriormente suddiviso in 60 sottomultipli, chiamati "minuti secondi". In definitiva quindi l'angolo retto viene suddiviso in $90 \times 60 \times 60 = 324000$ sottomultipli. Questi vengono utilizzati in varie questioni teoriche e pratiche, per esempio in Topografia ed in Astronomia.

OSSERVAZIONE 2 - L'angolo retto è una figura facilmente costruibile, che ha una posizione privilegiata nella geometria tradizionale. Cose analoghe si possono dire della relazione (simmetrica) che intercede tra due rette incidenti, appartenenti allo stesso piano, che formano angoli tutti uguali tra loro, e perciò retti.

Come è noto, tale relazione viene chiamata "relazione di perpendicolarità" (tra coppie di rette). Negli "ELEMENTI" di Euclide, un apposito Postulato (il IV) afferma che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro [Cfr. l'opera citata nel N.3, alla pag. 71).

La costruzione di un angolo retto con strumenti elementari (riga e compasso) è una delle prime questioni risolte nel trattato euclideo; tuttavia si dimostra che la costruzione di un sottomultiplo dell'angolo retto secondo un numero naturale qualunque [in particolare la costruzione dell'angolo che ha come ampiezza il grado sessagesimale o centesimale] non è un'operazione eseguibile con strumenti elementari. Pertanto l'esistenza di tali sottomultipli viene abitualmente accettata sulla base di una specie di "intuizione", o in forza di una dimostrazione rigorosa, la quale tuttavia richiede strumenti logici che esulano da queste note. [Fine dell'osservazione].

È immediato osservare che la costruzione reiterata di multipli di un medesimo angolo convesso (per quanto esso ci appaia per così dire "piccolo") può condurre ad un angolo che non è più convesso; pertanto si potrebbe dire che in questo caso l'operazione di "somma" non risulta più essere un'operazione di composizione interna, rispetto all'insieme degli angoli convessi, perché può avvenire che la "somma" di due angoli convessi non sia più un angolo convesso. Inoltre, qualora si prosegua nell'operazione di costruire multipli, si può giungere addirittura all'angolo giro, oppure ad un angolo che è minore di quello elementare di partenza. Ciò basta per poter concludere che l'angolo non soddisfa alla proprietà III), enunciata con il cosiddetto Postulato di Archimede nel N.5.

Quindi, se si accetta di chiamare "grandezze" soltanto gli enti caratterizzati anche dal Postulato di Archimede, appare chiaro che gli angoli dovrebbero essere qualificati come "grandezze sui generis" o "pseudograndezze" o "grandezze speciali", o con altri nomi che mettano in evidenza il fatto che essi non rientrano a pieno titolo nel concetto elementare ed abituale di grandezza.

Di fatto ciò non avviene, forse anche perché, quando si applicano questi concetti in geometria elementare, si accetta quasi automaticamente che gli angoli su cui si opera siano convessi, o al massimo siano piatti, come avviene nel caso della proposizione 32 di Euclide, citata sopra. Questa ipotesi, considerata "naturale" ed adottata in forza di una pretesa "evidenza", maschera le difficoltà relative alla trattazione rigorosa del concetto di angolo, e forse giustifica la enumerazione degli angoli tra le grandezze.

7 - c) Una terza accezione del concetto di angolo nasce da esperienze diverse da quelle finora richiamate, e fa riferimento a concetti che da una parte sono più strettamente contigui alla geometria delle trasformazioni, ma che d'altra parte richiedono la considerazione di operazioni che si svolgono nel

tempo; e quindi escono spesso dalle circostanze puramente geometriche per entrare nel capitolo della meccanica che viene chiamato “cinematica”, cioè studio del movimento dei corpi.

Questi modi di pensare sono giustificati da molte esperienze quotidiane elementari: infatti a tutti capita di vedere girare una ruota attorno al proprio asse, o una porta attorno ai propri cardini; ed a tutti capita di constatare che le lancette dell'orologio girano continuamente attorno ad un perno. In particolare la lancetta dei minuti (quella tradizionalmente più lunga) ripassa 24 volte al giorno sulla stessa posizione del quadrante. Quando ci si pone da questo punto di vista le due semirette con origine comune, che sono i lati dell'angolo nel senso presentato in b), sono viste come posizione di partenza e posizione di arrivo di una semiretta mobile nel tempo; oppure la semiretta di arrivo viene considerata come ottenuta applicando alla semiretta di partenza un’operazione, che viene chiamata "rotazione", ed è vista come una trasformazione dell'intero piano su se stesso che è un movimento rigido, il quale lascia fermo un punto del piano, chiamato talvolta "centro di rotazione".

Tuttavia, in questo ordine di idee, si constata che esistono delle operazioni effettive, e precisamente le rotazioni di un angolo giro, che fanno coincidere ogni semiretta di partenza con quella di arrivo. Consegue di qui che, quando si assegnino le due semirette, di partenza e di arrivo, non è univocamente determinato un movimento rigido di rotazione che porta l'una sull'altra; anzi vi sono infiniti movimenti che fanno ottenere questo risultato, e due di essi differiscono per un multiplo della rotazione dell'angolo giro.

Quindi, se si considera la sola posizione delle due semirette, non è possibile assegnare un’unica misura del loro angolo; se invece si invoca anche la memoria cioè si immerge il fatto geometrico nel tempo (che a rigore non lo riguarda), è possibile per così dire "sgomitolare" o "dipanare" il movimento, facendolo così rientrare nella classe delle grandezze abituali. Per esempio si consideri la lancetta dei minuti (quella lunga) di un orologio da polso, e si supponga che sia lunga 1cm. Indicando con il simbolo π la costante di Archimede (pigreco), cioè ponendo: π = 3,141592658 ... , si ha che dopo un anno l’estremità della lancetta avrà percorso un cammino lungo $2\pi \times 365 \times 24\, cm = 55040{,}70326\, cm$, cioè più di mezzo chilometro.

Ma in questo modo, naturalmente, se l'estremità della lancetta passa su un certo punto del quadrante e poi vi ripassa una seconda volta dopo aver fatto un giro, gli angoli corrispondenti vengono considerati diversi, anche se le due posizioni sono geometricamente indistinguibili.

Si aggiunga inoltre che, considerando le cose da questo punto di vista, è possibile anche introdurre una orientazione per gli angoli. Infatti le due semirette con origine comune, che sono lati dell'angolo, determinano un piano nello spazio; tale piano può essere osservato da ognuno dei due semispazi che esso determina. Quando l'angolo sia associato ad un movimento di rotazione del piano su sé stesso, l'intuizione ci assicura che tale rotazione può essere vista accadere in due “versi” opposti: l'uno di essi è quello in cui ruotano abitualmente le lancette degli orologi, e viene chiamato "verso" (o anche "senso") orario, o anche "verso negativo" di rotazione. Il verso opposto viene detto "antiorario" e viene convenzionalmente assunto come verso "positivo" di rotazione.

8 - Considerazioni conclusive.

Le poche riflessioni esposte sopra mostrano che il termine "angolo" può avere significati diversi, i quali hanno la loro origine in campi d'esperienza diversi tra loro; ma queste esperienze sono anche molto frequenti, per modo che, a livello elementare, sarebbe forse imprudente cercare di privilegiare un campo di esperienze a svantaggio degli altri. Forse a certe menti l'angolo può apparire un concetto molto chiaro, e quindi facile da definire e dominare matematicamente; ma ciò non è completamente vero, quando si voglia fare della matematica un insegnamento formativo; cioè un insegnamento che avvia all'impiego rigoroso del linguaggio e quindi abitua a diffidare dalle strutture linguistiche (frasi e discorsi in generale) quando si perda il loro significato concreto e si dimentichi il referente semantico.

In particolare è da sconsigliarsi l'insistere nel verbalismo, inducendo i discenti a memorizzare e ripetere frasi del tipo: "Angolo è ... [questo o quest'altro]"; frasi che vorrebbero essere delle definizioni e che di solito non sono rigorose. Abbiamo infatti già visto (N.3) che questa procedura è stata adottata da Euclide, ma che oggi non viene considerata logicamente soddisfacente.

Forse una strada migliore sarebbe quella che conduce a prendere coscienza dei vari significati che l'uso comune conferisce al termine "angolo", ed a riflettere sui rapporti che intercedono tra i vari ambiti sperimentali da cui nascono i concetti.

Milano, San Gottardo 2016. Angoli?