EPISTEMOLOGIA DELLA MATEMATICA

Ciclo di seminari per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica. Università Cattolica. Dipartimento di Matematica. Brescia. Anno Accademico 1991/92.

Iniziata la stesura il giorno 14 agosto 1991. Vigilia della festa dell'Assunzione della B.V. III EDIZIONE (7 agosto 1992). *NdR. Testo dattiloscritto reimpaginato, luglio 2013.*

....ci chiediamo «Donde comincerò?». Ma abbiamo già cominciato.
Carlo Emilio Gadda - Meditazione milanese. Torino (Einaudi), 1974.

Il n'y a de nouveau que l'oublié.

INDICE

Geometrie

I - SCIENZA ED EPISTEMOLOGIA

1 - Si usa iniziare un discorso analizzando il significato dei termini che si impiegano; in questo caso si tratta del termine "epistemologia". Risalendo alla lingua greca, si ricorda che in essa il termine "*epistheme*" significa appunto "scienza", cioè conoscenza ferma, certa, fondata sulla ragione, e viene opposto al termine “*doxa*” che ha significato di "apparenza", ma anche di "opinione", cioè di conoscenza non fondata, e pertanto non ferma, ma labile, mutevole, spesso legata al sentimento ed allo stato emotivo. Pertanto, il termine "epistemologia" vorrebbe significare "scienza della scienza"; e noi intendiamo utilizzarlo qui come sinonimo di riflessione, di analisi, di ricerca dei fondamenti di quel tipo di conoscenza che abitualmente viene chiamato con il nome solenne di "scienza".

Noi possiamo dire di conoscere qualche cosa o qualcuno, e con ragione, in molti modi: anche la pura osservazione ci dà una conoscenza; anche l'esperienza, per quanto mutevole e passeggera, ci fornisce un certo tipo di conoscenza. Esiste una circostanza caratteristica che distingue la conoscenza scientifica da quelle di altro genere? E se esiste qual è? A questi legittimi interrogativi pensiamo che si possa rispondere dicendo che la conoscenza che chiamiamo scientifica ha due caratteristiche che la distinguono dalle conoscenze di altro tipo: la ricerca della certezza e la ricerca della motivazione, del "perché", della "natura" che è sottostante alle cose, e che giustifica le apparenze delle quali noi abbiamo esperienza.

Anzitutto la ricerca della certezza; non affrontiamo qui il problema di analizzare la certezza; confidiamo quindi di essere compresi quando utilizziamo questo termine. Ed accettiamo pure come evidente il fatto che abitualmente noi cerchiamo la certezza nelle nostre conoscenze. Con ciò non intendiamo negare che esistano anche coloro i quali si beano dell'incerto, del mutevole, del variabile, che ricercano continuamente e metodicamente il nuovo e l'inedito. Ed accettiamo pure che anche questo atteggiamento riveli una ricerca di conoscenza. Ma crediamo che la conoscenza che chiamiamo scientifica ricerchi soprattutto il certo; ed osserviamo qui che certezza non significa per ciò stesso chiusura, immobilità, rinuncia al nuovo. Inoltre, l'esperienza quotidiana ci mostra che un medesimo oggetto può essere studiato da varie scienze: per esempio l'uomo viene studiato dalla fisica, dalla chimica, dall’anatomia, dalla fisiologia, dalla neurologia, dalla psicologia, dalla sociologia ecc. Si potrebbe dunque dire che non è tanto l'oggetto, materialmente determinato, che qualifica la singola scienza ma il punto di vista dal quale essa guarda all'oggetto e il metodo, e le procedure, con cui essa lo studia.

2 - Abbiamo detto che nella conoscenza scientifica noi ricerchiamo soprattutto la certezza; ma occorre domandarsi quale sia il tipo di certezza che inseguiamo in questo modo: esiste infatti una evidenza dell’esperienza, che ci conferisce una certezza immediata, generata dalle nostre sensazioni. Tuttavia, queste possono dar luogo ad illusioni, perché la sensazione non sempre è immediata e depurata da ogni elemento come abitualmente si crede; ciò era noto anche agli scienziati che polemizzavano con Galileo, e non volevano guardare nel cannocchiale, perché argomentavano che la vista è, tra i nostri sensi, il più soggetto alle illusioni.

Anche tralasciando per il momento la discussione sulla certezza fornita dai sensi, possiamo dire che non è questa la certezza che la scienza persegue: quest'ultima si fonda sì sulla certezza dell'esperienza diretta, ma tende, per così dire, al profondo delle cose, perché tende a motivare, a spiegare, a cercare i "perché" delle cose che noi sperimentiamo. Con le debite precauzioni, possiamo dire che la scienza mira a cercare le cause delle nostre esperienze. Questa conoscenza è del tutto diversa dalla pura registrazione delle esperienze, anche se, ripetiamo, si fonda su di esse. Distinzione, questa, che è stata fatta da molto tempo, in occasione delle prime discussioni e delle prime polemiche a proposito del significato della nostra conoscenza; polemiche le quali, ricordiamo, risalgono all'epoca della filosofia greca.

Ricordiamo per esempio la polemica che il matematico, storico e filosofo Proclo [V secolo dopo Cristo] ebbe con i filosofi Epicurei, i quali sostenevano che è inutile insegnare la geometria, perché questa scienza insegna delle cose che anche i somari conoscono: per esempio la geometria insegna che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma ciò è noto anche ai somari, perché nessun somaro, per andare ad un mucchio di fieno, percorre due lati distinti di un triangolo ma va direttamente al mucchio. Dunque, concludevano gli Epicurei, la geometria insegna delle cose che anche i somari sanno. La risposta di Proclo fu che forse la materialità dei contenuti è la stessa, per il somaro e per l'uomo; ma quest'ultimo, a differenza del somaro, sa dimostrare la proposizione, cioè sa ricondurre la sua validità a quella di altre, accettate o accertate in precedenza, e sa anche dimostrare che le cose non possono andare diversamente da come vanno. Questo, a nostro parere, è il punto nel quale si distingue la conoscenza umana: la dimostrazione. E ciò vale non soltanto per il confronto (provocatorio e quasi burlesco) tra la conoscenza dell'uomo e quella del somaro, ma per ogni conoscenza che voglia avvicinarsi alla certezza.

3 - Ciò che abbiamo detto poco fa si applica in particolare alla matematica; invero la storia di questa scienza può essere guardata come la storia di una lunga avventura dell'umanità verso la certezza. In questa avventura il pensiero greco si presenta con un particolare splendore. Non si vuol dire con questo che la matematica sia incominciata con i Greci; ci sono infatti tracce storiche di procedure matematiche in epoca precedente o in paesi diversi dalla Grecia: esistono, per esempio, documenti di una matematica egiziana, di una matematica assiro-babilonese, di una matematica cinese. Ma le soluzioni dei problemi matematici che si incontrano in questi documenti sono relative a problemi particolari, e presentano delle procedure non giustificate, e non convalidate dalla logica. Ciò non significa, beninteso, che noi intendiamo disprezzare l'intelligenza e l'ingegnosità di quei pensatori, ma intendiamo tuttavia sottolineare il fatto che, solo pressi i Greci, per la prima volta nella storia dell'umanità, si trovano le conoscenze di matematica a quel livello di astrattezza, di generalità e di rigore che ne fanno una scienza. Si deve aggiungere inoltre che i Greci non soltanto svilupparono la matematica con quelle caratteristiche di cui abbiamo appena detto, ma analizzarono criticamente le procedure logiche che ci conducono al possesso sicuro della verità o alla soluzione ineccepibile dei problemi: troviamo infatti che la filosofia e la matematica greca hanno analizzato e codificato quei procedimenti di analisi e di sintesi (sui quali ritorneremo), che sono ancora oggi fondamentali per raggiungere la certezza delle conoscenze, e delle soluzioni che si danno dei problemi matematici.

4 - Abbiamo parlato della dimostrazione, e del rigore logico che distingue la matematica greca dai tentativi di soluzione di problemi matematici che si incontrano presso altri popoli, contemporanei oppure addirittura più antichi dei Greci. Vorremmo ribadire il fatto che in ogni conoscenza scientifica esiste un momento in cui si compie una operazione di deduzione, momento che non è sopprimibile, se si vuole conseguire una conoscenza autenticamente scientifica. Infatti, la ricerca della spiegazione, delle ragioni della nostra esperienza, richiede che vengano formulate delle ipotesi; il contenuto di queste non è, e non può essere oggetto di esperienza. Soltanto le conseguenze dedotte dalle ipotesi formulate possono essere controllate dall'esperienza; ma esiste un momento nella procedura della spiegazione che è affidato alla sola operazione logica della deduzione. È possibile quindi intuire le ragioni del successo delle moderne scienze fisico-matematiche, e del prestigio che esse godono, osservando che le deduzioni della matematica sono giudicate comunemente come le più sicure ed affidabili; e pertanto le conoscenze della Natura che possono ricevere la forma data loro dal linguaggio matematico sono quelle che meritano la maggior fiducia ed il maggior credito.

Potremo ritornare nel seguito ad approfondire il discorso, che qui è stato soltanto accennato; ma pensiamo che bastino questi pochi cenni per porre il problema dei mezzi con i quali la matematica raggiunge quella certezza che, in grado maggiore o minore, è una delle caratteristiche del pensiero scientifico. In questo ordine di idee quindi si potrebbe dire che la matematica può in certo modo rappresentare il modello ideale di quella conoscenza per idee chiare e distinte che è stata vagheggiata da Cartesio: infatti la matematica, ed in particolare la geometria, ci offre delle immagini perfettamente trasparenti, di una realtà ridotta all'essenziale e quasi scarnita, che soddisfano il nostro desiderio di conoscenza totale e di deduzione ineccepibile.

5 - In un primo momento si potrebbe pensare che la matematica raggiunge la propria certezza a partire dall'evidenza dei propri oggetti: infatti le esperienze che portano alla costruzione degli oggetti primitivi della matematica possono essere a buona ragione giudicate assolutamente elementari: si tratta di conteggio di oggetti appartenenti ad un insieme finito, oppure di operazioni di localizzazione di oggetti materiali che ci circondano (magari anche astri o fenomeni astronomici) e di misura. Non intendiamo qui impostare l'analisi del problema intricato della genesi psicologica e dei fondamenti logici del concetto di numero naturale; ci limitiamo ad osservare che in ogni lingua esistono dei termini, che vengono usati per designare dei numeri naturali. Anzi, in moltissime lingue evolute i termini impiegati per designare il numero naturale sono di due tipi, perché viene fatta la distinzione tra numero cardinale e numero ordinale; a questo proposito, senza voler approfondire qui il problema, ci pare del tutto intuitivo osservare che le due procedure elementari dalle quali nasce il numero naturale sono diverse: nel caso del numero cardinale infatti si tratta di stabilire una corrispondenza biunivoca tra elementi di insiemi finiti; nel caso del numero ordinale si tratta di eseguire una scansione (immersa necessariamente nel tempo, almeno in linea di principio) per far passare uno dopo l'altro tutti gli elementi di un insieme. A questa elementarità delle esperienze corrisponde una concettualizzazione che appare del tutto chiara, e corrisponde poi una simbolizzazione verbale e grafica che dà origine ai vari sistemi di numerazione.

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte a proposito delle esperienze elementari che conducono alla geometria; invero in questo caso si dovrebbe tener conto dell’operazione con la quale la nostra fantasia costruisce delle figure per così dire scarnite e trasparenti, e la nostra mente, a partire da questi dati elaborati dalla fantasia, costruisce i concetti. Ma, anche in questo caso, gli oggetti di cui la matematica si occupa appaiono del tutto chiari e trasparenti alla mente. Questo carattere degli oggetti della matematica ha forse contribuito a costruire nella mente dei più una certa immagine di questa scienza che ne fa un paradigma di chiarezza e di certezza. Analizzeremo in seguito questa opinione, per cercare di valutarne il fondamento e le ragioni profonde.

Paul Klee. 1920. Junger Garten. Collezione città di Locarno.

La realtà scarnita

6 - Abbiamo detto poco sopra che, da un certo punto di vista, gli oggetti della matematica presentano un carattere di particolare chiarezza e semplicità; pertanto si potrebbe pensare che da questi caratteri consegua anche la possibilità di deduzione rigorosa. Ed abbiamo visto sopra (4) che, nella costruzione di una qualunque spiegazione razionale dell'esperienza, il momento deduttivo è necessario ed insopprimibile, perché fornisce il collegamento tra la formulazione delle ipotesi e la deduzione delle conseguenze.

Ora è chiaro che il contenuto delle ipotesi non è direttamente osservabile; e quindi soltanto la verifica della congruità fra le conseguenze e l'esperienza di verifica può far rigettare un’ipotesi oppure convalidare la sua accettazione provvisoria. Abbiamo detto accettazione provvisoria perché, come è ben noto, la congruità delle conseguenze con l'osservazione non costituisce conferma irrefrangibile dell'ipotesi: infatti anche la logica classica aveva enunciato il principio: "Ex falso sequitur quodlibet". Principio che ammette quindi la possibilità di deduzioni vere da ipotesi false. Questo principio, come è noto, è stato addirittura eretto a definizione del carattere fondamentale della scienza, che è stata descritta come "pensiero falsificabile"; espressione nella quale l'aggettivo appare come una traduzione ad orecchio di un termine straniero, e vorrebbe sostituire il significato del termine più esatto "confutabile". Invece se le deduzioni dalle ipotesi contrastano con l'osservazione, l'ipotesi stessa è da considerarsi definitivamente confutata. Quindi, per le scienze della Natura, l'esperienza si presenta come il punto di partenza della conoscenza scientifica ed anche come il tribunale di ultima istanza che convalida (almeno provvisoriamente) o rigetta definitivamente la validità delle ipotesi che noi formuliamo per spiegare l'esperienza stessa.

Da questo punto di vista la matematica non presenta tutte queste caratteristiche: infatti, anche accettando che il punto di partenza sia l'esperienza, anzi un'esperienza molto elementare e chiara nei suoi contenuti (come abbiamo detto), le deduzioni che si sviluppano a partire dalla concettualizzazione delle nostre esperienze non sempre portano a conseguenze direttamente verificabili in concreto; e ci pare che questa circostanza sia essenziale per descrivere la differenza tra la matematica ed il resto del pensiero scientifico.

7 - Il carattere di cui abbiamo detto, che distingue la Matematica dalle altre dottrine, si incontra immediatamente nella costruzione del concetto di numero naturale; concetto che abbiamo presentato come elementare, nel senso che nasce da un'operazione comune e quotidiana: quella di numerazione (o conteggio che dir si voglia) degli elementi di un insieme finito. Infatti, è convinzione comune ed invincibile che un insieme finito, per quanto grande sia il numero dei suoi elementi, può essere ampliato; e di qui discende la convinzione che non esista un massimo tra i numeri naturali. Come è noto, si suole esprimere questa convinzione dicendo che l'insieme dei numeri naturali è "infinito".

Su questo termine si è parlato e si è scritto tanto, ed ancora si parla e si scrive; come accade per quasi tutti i termini che vengono impiegati nel linguaggio comune, gli vengono attribuiti moltissimi significati non sempre coerenti tra loro, e dipendenti dai contesti e dai singoli autori. Pertanto, noi non aggiungeremo, qui ed ora, ulteriori considerazioni a quelle (anche troppo numerose) che si leggono e si ascoltano a proposito dell'infinito. Ci limiteremo ad usare per ora questo termine nel senso che abbiamo presentato poco fa; cioè lo useremo per esprimere il fatto che non esiste il massimo dei numeri naturali: se uno, per avventura, si mettesse in testa di enumerarli tutti, inizierebbe un'impresa disperata, perché impossibile: un'impresa che non finirebbe mai.

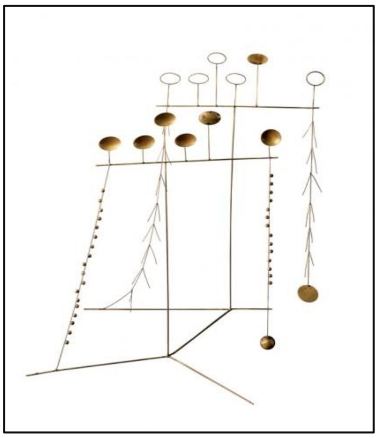
Vorremmo osservare che questo concetto di infinito non deve essere confuso con l'immagine che la fantasia ci propone talvolta, di fronte a certi problemi che non sappiamo risolvere. Un caso tipico in questo ordine di idee è stato incontrato nella Storia della matematica con l'episodio dell'opera di Archimede che questo grande intitolò "Arenario". Come è noto, la ragione del titolo sta nel problema di dominare concettualmente e di rappresentare adeguatamente dei numeri molto grandi. Dice Archimede, nella dedica che egli scrive per il tiranno Gelone di Siracusa, che i suoi contemporanei giudicavano infinito il numero dei granelli di sabbia esistenti sulla Terra. Ma egli invece trova modo di rappresentare dei numeri grandissimi, e quindi rappresenta anche non soltanto il numero dei granelli di sabbia che esistono sulla Terra, ma anche il numero di quelli che riempirebbero una sfera avente la Terra come centro e come raggio la distanza tra la Terra ed il Sole.

Ovviamente, in questo caso il giudicare infinito il numero dei granelli di sabbia esistenti sulla Terra equivaleva, da parte dei contemporanei di Archimede, a confessare la propria incapacità di dominare in qualche modo questo insieme; il quale si presenta alla nostra immaginazione come inesauribile. Ma ciò, ripetiamo, è dovuto alla immaginazione, e non costituisce una limitazione concettuale assoluta alla possibilità di conoscenza; come è dimostrato dal fatto che una mente geniale è riuscita a dominare concettualmente anche questo problema. Tuttavia, il carattere di infinito matematico non si fonda sulla immaginazione, ma sulla struttura concettuale degli enti di cui si tratta.

8 - Ci pare che questa esistenza di insiemi infiniti, con la necessità di dominare insiemi di questo tipo, sia uno dei caratteri che distinguono la matematica dalle altre scienze, in particolare dalle scienze della Natura. Abbiamo visto infatti che, partendo dalla formulazione delle ipotesi, la deduzione conduce a risultati che possono e debbono essere sottoposti al tribunale di ultima istanza

dell’esperienza: la verifica sperimentale delle conseguenze, la critica degli esperimenti e la ricerca del loro significato, lo sforzo continuo per ideare nuovi esperimenti e nuovi controlli caratterizzano la scienza modernamente intesa. Il continuo travaglio, teorico e pratico, dello scienziato moderno si sviluppa quotidianamente su questi motivi, che ritornano costantemente: osservazione, formulazione di ipotesi, esperimento e controllo della validità delle ipotesi formulate.

Per la matematica queste procedure non sono sempre pensabili, soprattutto perché il controllo sperimentale delle eventuali ipotesi emesse non è possibile in linea di principio: abbiamo visto infatti che uno degli oggetti della matematica è l'insieme infinito dei numeri naturali; ed abbiamo osservato che sarebbe contraddittoria una qualunque enumerazione degli elementi di questo insieme. Questo carattere singolare delle verità matematiche si è manifestato molto presto, col nascere della matematica razionale rigorosa, cioè con la matematica greca. Infatti, incontriamo già negli "Elementi" di Euclide una proposizione tipica, che non è controllabile sperimentalmente: si tratta del celebre teorema in cui Euclide dimostra che l'insieme dei numeri primi è infinito: in altre parole, non esiste il più grande di tutti i numeri che hanno come divisori se stessi soltanto e l'unità. Comunque grande si incontri un numero di questo tipo, ne esiste certamente almeno uno più grande ancora. È questa una proposizione la cui verità non può essere convalidata da alcuna verifica sperimentale a posteriori: essa nasce e rimane nel campo della logica pura, e soltanto in questo campo ha significato e può essere analizzata e convalidata.



Fausto Melotti. Ombre vaganti. 1975. Collezione privata, Milano.

Oggetti scarnificati

9 - Non soltanto l'aritmetica presenta alla nostra attenzione degli insiemi infiniti: anche la geometria ci pone di fronte a problemi analoghi. In questo caso si potrebbe dire che l'analisi si presenta più difficile, perché gli oggetti tradizionalmente assegnati alla competenza della geometria non nascono da esperienze elementari e schematiche come il conteggio degli elementi distinti tra loro di un insieme finito. La geometria infatti ha la sua origine nelle esperienze che ci mettono in relazione con l'ambiente, con gli oggetti che vi si trovano, con campi di forza, come il campo gravitazionale nel quale ci troviamo immersi e che ci pone in una situazione privilegiata rispetto al mondo di cui abbiamo esperienza.

Inoltre, la nostra fantasia opera sulle sensazioni e sulle esperienze concrete materiali, costruendo, per così dire, degli *oggetti schematici e quasi scarnificati*, immaginati in certo modo trasparenti ed immateriali. È molto diffusa la convinzione che questi oggetti costruiti dalla nostra immaginazione traggano la loro esistenza dal fatto che essi ritagliano, per così dire, una parte di un ente che viene chiamato abitualmente "spazio" o anche, da qualcuno, forse con un tentativo di maggiore chiarezza, "spazio geometrico". Su questa convinzione è forse fondata l'idea che conduce qualcuno a qualificare la geometria attraverso un certo oggetto che viene appunto identificato nello "spazio" di cui si diceva, oppure nella "estensione".

Ritorneremo in seguito su questa importante questione, che riguarda la legittimità di definire e qualificare la matematica (o anche un suo ramo) attraverso gli oggetti. Alcuni infatti ritengono di dover qualificare la Matematica come si qualifica qualche altra scienza: per esempio, supponendo che la geografia possa essere definita come "Studio della Terra e delle sue configurazioni", cioè come studio di un determinato oggetto da un certo punto di vista (come si è detto). È noto che, sull'analogia di questo schema, in passato si cercò di definire e precisare la matematica attraverso il suo oggetto; questo era identificato nell'ente "quantità", suddiviso poi ulteriormente in "quantità discreta" e "quantità continua". La prima era identificata con il numero (a partire dal numero naturale), e quindi era considerata come oggetto qualificante dell'aritmetica; la seconda era identificata nella "estensione" e quindi era considerata come oggetto qualificante della geometria. Vedremo che la critica moderna ha vanificato queste schematizzazioni. Qui vorremmo soffermarci a ricordare che, anche nell'ambito della geometria, il problema dell'infinito riveste un'importanza fondamentale. Si pensi per esempio al segmento rettilineo, considerato come un insieme di punti geometrici; trascuriamo per il momento la discussione sul senso da dare al termine "punto", così come agli altri termini abitualmente impiegati in geometria; tuttavia non si può evitare di osservare che, nel modo abituale di immaginare e di considerare le cose, la identificazione di un punto nell'interno di un segmento non esaurisce l'insieme dei suoi punti; anzi, nel modo abituale di pensare, l'operazione può essere ripetuta indefinitamente, sempre dando luogo alla identificazione di nuovi punti, ciascuno diverso da tutti i precedenti. Questa circostanza viene abitualmente presentata dicendo che il "segmento contiene infiniti punti". Abbiamo quindi incontrato un altro caso in cui il concetto di infinito ci si presenta come un elemento essenziale degli oggetti della matematica. Ed è quasi inutile ripetere che, anche in questo caso, il controllo e la convalida della verità di una proposizione riguardante questi oggetti non possono essere demandati all'esperienza, comunque eseguita su certe realtà materiali.

10 - Abbiamo visto che gli oggetti della geometria ci presentano degli insiemi infiniti, e quindi ci pongono di fronte a problemi analoghi a quelli dell'aritmetica, per quanto concerne la verifica della verità delle proposizioni. Tuttavia, la geometria ci presenta una ulteriore circostanza, che provoca la nascita di problemi e la necessità di approfondimenti. Infatti, nella concezione comune, gli oggetti della geometria sono dotati di una proprietà che, nel linguaggio abituale, viene chiamata "continuità". Ritorneremo in seguito sull'insieme dei problemi collegati con questo concetto. Qui ci limitiamo ad osservare che tali problemi sono stati posti già dal pensiero greco, da una parte con il celebre teorema che viene universalmente attribuito a Pitagora e che viene quindi richiamato con il suo nome; d'altra parte con le questioni paradossali, riguardanti quell'oggetto immaginario che viene chiamato "spazio"; problemi posti dalla filosofia Eleatica, come per esempio il cosiddetto "paradosso di Achille e la tartaruga" ed il "paradosso del moto".

Per quanto riguarda il teorema di Pitagora, ricordiamo che esso ha, come conseguenza immediata, l'accertamento dell’esistenza di coppie di segmenti tra loro incommensurabili, come il lato e la diagonale di un medesimo quadrato. Come è noto, la incommensurabilità viene di solito esposta in forma suggestiva ed intuitiva dicendo che i due segmenti non possono avere un sottomultiplo comune; in altre parole, comunque si divida uno dei due segmenti in parti tra loro uguali, una queste non potrà mai essere uguale ad una delle parti ottenute da una suddivisione dell'altro (in parti tutte tra loro uguali). In forma suggestiva si potrebbe dire che quell'ente che viene chiamato "spazio" non può essere costituito da parti elementari, da "atomi". È del tutto ovvio che questa proposizione non ammette una convalida ed una verifica sperimentale: essa è fondata sulla sola forza della deduzione logica, che supera ogni convalida sperimentale ed ogni osservazione sul concreto materiale; ed è interessante ricordare che la dimostrazione inoppugnabile si ottiene con ragionamenti che fanno appello all'aritmetica, cioè alle proprietà degli elementi di un altro insieme infinito di concetti.

11 - Il paradosso detto "di Achille e la tartaruga" afferma l’impossibilità per il piè veloce Achille di raggiungere la lentissima tartaruga che egli insegue, argomentando che, nel periodo di tempo impiegato da Achille per raggiungere il punto in cui la tartaruga si trovava all'inizio, l'animale si è spostato; dunque, quando Achille raggiunge quel punto, si ripropone per i due la situazione iniziale; e la procedura non si può mai concludere dopo un numero finito di inseguimenti parziali. È facile osservare che questa argomentazione non avrebbe senso se esistesse un "atomo", un "granulo" di spazio; quindi il paradosso discende necessariamente su quella concezione del continuo geometrico che è fondata sul teorema di Pitagora, e quindi sulla non esistenza di un "atomo", di un elemento esteso di spazio geometrico, come è stato detto. Un'altra difficoltà inoltre è posta alla nostra immaginazione dalla presenza di un insieme di operazioni di inseguimento indefinitamente ripetibili. Pertanto, si ricade nella difficoltà di dominare l'infinito, o, meglio, di fondare con certezza certe conclusioni il cui contenuto non è verificabile, con un numero finito di operazioni, oppure con osservazioni di oggetti materiali in numero finito.

Il paradosso del moto afferma che non si può andare da un punto A ad un altro punto B, perché, prima di arrivare a B occorre arrivare a metà cammino, e poi alla metà del cammino restante, e poi alla metà del cammino restante, e così via. Pare ovvio che, a proposito di questo paradosso, si possano ripetere le osservazioni che abbiamo svolto poco sopra a proposito di quello di Achille. Il chiarimento di queste e di altre situazioni non può ovviamente essere lasciato alla sola immaginazione, ma richiede un'analisi logica rigorosa delle procedure che garantiscono la validità delle nostre deduzioni, in particolare di quelle riguardanti la matematica, ed una riflessione sugli oggetti di questa dottrina.

12 - C'è da osservare inoltre che la geometria ci propone anche un'altra immagine dell'infinito, oltre a quella fornita dal continuo: precisamente quella che, nei postulati di Euclide, viene presentata con l'affermazione della indefinita prolungabilità del segmento. In altre parole, la nostra fantasia ci presenta l'immagine di indefinita ripetibilità di un'operazione che consiste nel raggiungere un punto alla nostra portata; e quindi ci presenta l'immagine di punti che ci appaiono come inaccessibili, perché l'operazione che ci condurrebbe a raggiungerli è indefinitamente ripetibile, senza mai farci conseguire lo scopo. Queste immagini vengono spesso presentate con frasi che fanno riferimento alla "infinità in estensione" dello spazio geometrico; le stesse immagini vengono trasferite poi anche nelle concezioni riguardanti la meccanica e la fisica: noi le troviamo esplicitamente postulate come valide nella celebre opera di I. Newton (richiamata abitualmente con il termine "Principia" [1]), il quale si esprime parlando di "spazio assoluto". Questa concezione è rilevabile anche nelle opere di alcuni volgarizzatori delle teorie cosmologiche moderne; volgarizzatori che si esprimono come se tutta la materia esistente (comprese le galassie distanti milioni di anni luce da noi) fosse immersa in una specie di enorme vuoto nero, privo di confini e quindi immaginato come "infinito" in estensione.

13 - Nelle pagine precedenti abbiamo cercato di presentare alcuni aspetti della matematica che la accomunano alle altre scienze, e che d'altra parte le conferiscono un carattere specifico, il quale ha sempre procurato alla matematica un posto particolare tra le altre dottrine.

I principali problemi che sono stati posti da questa analisi preliminare e sommaria saranno ripresi nel seguito. Qui ci limitiamo a ricordare che il carattere di ragionamento astratto e rigoroso che è stato tradizionalmente attribuito alla matematica ha fatto sì che essa venisse in qualche modo considerata come una chiave di lettura anche della realtà materiale nonostante le proprietà di astrattezza possedute dalle proposizioni matematiche. E dicendo che la matematica è stata considerata come chiave di lettura anche della realtà materiale intendiamo dire che essa ha fornito gli strumenti concettuali per dominare tale realtà, ed i simboli per rappresentarla, e l'insieme di regole deduttive per poter passare con assoluta sicurezza dalle ipotesi alle conseguenze. Abbiamo già accennato ad una possibile motivazione di questo fatto, ricordando le qualità di rigore deduttivo del ragionamento matematico, qualità che garantiscono il saldo collegamento logico tra ipotesi e conseguenze; ed abbiamo ricordato che un collegamento cosiffatto è una caratteristica ineliminabile del pensiero scientifico.

Ciò è stato esposto in forma insuperabile da Galileo in un celebre passo del "Saggiatore", in cui il grande pisano afferma che il gran libro dell'universo è scritto in caratteri matematici e che soltanto chi conosce questi caratteri potrà leggervi. Per gli altri, la ricerca scientifica sarà un aggirarsi in un oscuro labirinto. [2] 090391R.

[l] Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile [Isaac Newton - Philosophiae naturalis principia mathematica. (Trad. di Alberto Pala. Torino (UTET) 1965].

[2] La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola: senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. [Galileo Galilei - Il

Saggiatore]. 081092 R.

OSSERVAZIONE E COMMENTO

Fin qui è stato detto sostanzialmente che cosa non è la matematica: non è una conoscenza che possa raggiungere la certezza (anche specifica e limitata) con il ricorso al confronto con la realtà esteriore: infatti gli oggetti propri della matematica sono in qualche misura inaccessibili; o nel senso geometrico del termine, oppure perché le proposizioni riguardano insiemi infiniti, come quello dei numeri naturali. Ma allora ci si può domandare quale sia l'oggetto specifico della matematica, e con quali mezzi essa consegua la conoscenza del proprio oggetto specifico. Non si tratta soltanto dei sistemi di simboli con sintassi convenzionale, perché altrimenti anche gli scacchi sarebbero matematica. Si tratta quindi di sistemi formali che hanno un fondamento, anche lontano, nella esperienza del mondo; in altre parole, partono da qualche cosa di dato, di non costruibile da noi in modo perfettamente arbitrario. 081192 R.

Ma la questione forse più importante è quella che riguarda l'oggetto della M. Quando si pronuncia una frase come "Parigi è la capitale della Francia", può avvenire che essa non abbia alcun significato per un abitante della Papuasia, che non sa che cosa sia la Francia e, a maggior ragione, non ha l'idea di che cosa sia una città ed una capitale. Ma vi sono molti che capiscono la frase, e che sanno ricollegarla a loro esperienze effettive o possibili; e, al limite, è possibile anche pensare ad un'opera di informazione dell'abitante della Papuasia, in modo che, anche per lui, la frase possa avere un senso che la ricollega ad un’esperienza, anche se solo possibile.

Quando io pronuncio una frase come "due più tre è uguale a tre più due" parlo soltanto di concetti astratti, che tuttavia possono avere un riscontro in certe esperienze passate o possibili. Ma la validità generale della frase, la sua legittimità "erga omnes", in ogni caso, passato, presente e futuro, ha un altro fondamento, che occorre mettere in chiaro.

J. Berger

II - LA GEOMETRIA. PRIMO CAPITOLO DELLA FISICA

NOTA. QUI ANDREBBERO RIPRESE MOLTE IDEE DEL MIO ARTICOLO DI "KARZEL" SULL'ASSIOMATICA, OPPURE MESSE NELL'APPOSITO CAPITOLO SULL'ASSIOMATICA. [NdR Si può vedere C. F. Manara. *L'assiomatica classica e moderna*. Nuova Secondaria, 9, 10 (1992), 37-41.]

1 - Per portare avanti l'analisi epistemologica della matematica pensiamo che sia utile prendere in considerazione i vari rami di questa scienza. Noi imboccheremo questa strada, adottando le classificazioni classiche dei rami della matematica, anche se la struttura moderna di questa scienza ha sconvolto in parte almeno le classificazioni tradizionali. Quindi parleremo ancora di geometria e di aritmetica, di algebra e di meccanica e di analisi matematica, ecc., pur essendo ben consci del fatto che queste suddivisioni tradizionali possono essere contestate a ragione; addirittura pensiamo che si possa sostenere che non occorrerebbe parlare di geometria e di analisi matematica, ma di matematica fatta da un geometra o da un analista o da un meccanico. Si può infatti pensare che esista una metodologia profonda, radicalmente unica, che caratterizza le procedure della matematica; tuttavia questa procedura ha dei punti di partenza che affondano le loro radici nella psicologia del ricercatore e che ispirano anche l'atteggiamento dei trattatisti, i quali presentano i vari capitoli della matematica secondo una strutturazione logica che traduce il loro modo di vedere la dottrina esposta.

Questi diversi atteggiamenti possono essere presentati facendo riferimento alla prevalenza dell'intuizione spaziale sul formalismo e sulla logica astratta, o di questa su quella, come ha fatto H. Poincaré, in un suo noto discorso, pronunciato in occasione del congresso mondiale dei matematici, svoltosi a Parigi nel 1900.

TROVARE IL POSTO PER PRESENTARE ANCHE L'EPISODIO DEI 14 PROBLEMI DI HILBERT.

In generale si potrebbe dire che l'insieme delle esperienze, delle elaborazioni inconsce, delle nozioni che ognuno dà per evidenti, note e scontate, influisce sul modo in cui un autore costruisce una teoria matematica. Vedremo anche che su questo modo può influire anche la strada che l'autore sceglie per simbolizzare i concetti che egli crea e collega tra loro; noi crediamo infatti che il simbolismo abbia un ruolo molto importante nella matematica, soprattutto nella matematica modernamente intesa; e su questa influenza del simbolismo sul pensiero matematico ritorneremo in seguito. Vorremmo tuttavia dire che anche in presenza di tutti questi elementi, la deduzione, il più possibile rigorosa ed astratta, costituisce una costante del pensiero matematico; una qualità che ha caratterizzato la Matematica nei secoli, conferendole quell'aspetto di pensiero certo e chiaro di cui abbiamo già detto.

2 - Il primo ramo della matematica che prenderemo in considerazione è la geometria. Nel titolo di questo capitolo questa dottrina viene presentata come "primo capitolo della fisica"; questa denominazione vorrebbe mettere in luce il fatto che, a nostro modo di vedere, la creazione della geometria ha costituito il primo momento in cui l'uomo ha cercato di organizzare in modo razionale le proprie osservazioni del mondo esterno, le proprie esperienze di manipolazione sugli oggetti di questo mondo, in modo da mettere in luce le necessità dei rapporti e da poter dedurre da poche ipotesi le conclusioni certe a cui aspirava. È noto che il primo trattato scientifico, degno di questo nome, che la storia dell'umanità ricordi è la celebre opera in 13 libri di Euclide, intitolata "Elementi". La parte iniziale di quest'opera è appunto dedicata alla geometria.

RICORDARSI DELL'APERÇU HISTORIQUE DI CHASLES. IMPORTANTE PERCHÉ LA DISCUSSIONE SUL METODO RITORNA PERIODICAMENTE IN EPOCHE DI GRANDE CAMBIAMENTO. RICORDARE ARCHIMEDE E I PROBLEMI DELL'INFINITO (EXAUSTIONE).

***La Scuola di Atene (particolare)*, Raffaello Sanzio (1483-1520), 1510, cartone preparatorio. *Euclide*.**
Milano, Pinacoteca Ambrosiana 2019

È noto che l'opera di Euclide è pervenuta in Occidente attraverso gli Arabi. Le prime traduzioni di Euclide in latino ed in italiano sono del secolo XVI. Da quell'epoca, e per qualche secolo, il trattato euclideo è stato considerato in qualche modo il paradigma del trattato di matematica, ed ha fornito anche lo schema ideale per la presentazione e la trattazione di una teoria scientifica, cioè una teoria che volesse raggiungere la chiarezza e la certezza della conoscenza. Esamineremo quindi da questo punto di vista l'impostazione che Euclide dà alla geometria.

3 - Abbiamo detto che l'opera di Euclide è stata considerata per secoli come il modello del trattato scientifico. In essa infatti troviamo applicata e quasi codificata una procedura che parte dalla precisazione del significato dei termini, presenta in forma esplicita le proposizioni che si adottano senza dimostrazione, e dimostra in seguito tutte le altre proposizioni che si incontrano.

Pensiamo che valga la pena di rimeditare brevemente sul testo euclideo per constatare quale fosse la concezione classica della geometria, e per comprendere il significato della crisi e della evoluzione che questa scienza ha avuto in epoche più vicine a noi. Ed a questo proposito, vorremmo osservare che l'analisi che faremo ha un significato che si estende al di là dell'ambito della sola geometria. Abbiamo infatti osservato che questa Scienza può essere considerata come un primo passo verso la comprensione scientifica della realtà che si presenta alla nostra osservazione, e sulla quale noi operiamo: abbiamo infatti parlato della geometria come "primo capitolo della fisica", come una scienza che tende a dedurre con certezza delle proprietà dei suoi oggetti a partire da altre, più elementari e meno numerose.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che anche il classico trattato newtoniano dei "Principia" è costruito sullo schema euclideo, con l'enunciazione delle proprietà considerate come evidenti, e con la dimostrazione di quelle considerate meno evidenti. Ciò giustifica, ripetiamo, l'analisi che faremo delle prime pagine del trattato euclideo, guardandolo in particolare dal punto di vista epistemologico, e quindi cercando di comprendere quale fosse il concetto di verità matematica che è stato presentato con quest'opera, e quali fossero le procedure ritenute valide per conseguire la certezza e la verità.

L'inizio del trattato euclideo porta il titolo "Termini", e consta di frasi che hanno l'aspetto di definizioni: esse mirano a precisare il significato delle parole che verranno utilizzate nel seguito; in un secondo tempo vengono enunciate delle proposizioni chiamate "Postulati", ed infine certe proposizioni che vengono presentate come "Nozioni comuni".

Come abbiamo detto, presentiamo qui sommariamente queste proposizioni, per poter comprendere lo spirito con il quale la scienza greca guardava alla conoscenza ed alla ricerca della certezza.

[CONFRONTARE CON LA TRADUZIONE DI FRAJESE !!]

TERMINI

1 - Punto è ciò che non ha parti.
2 - Linea è una lunghezza senza larghezza.
3 - Estremi di una linea sono punti.
4 - Linea retta è quella che è posta in pari <altri traduttori portano "giace ugualmente" > rispetto ai suoi punti.
5 - Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6 - Estremi di una superficie sono linee.
7 - Superficie piana è quella posta in pari <altri traduttori portano: "giace ugualmente"> rispetto alle sue rette.
8 - Angolo piano è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.
9 - Quando le linee comprendenti un angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.
10 - Se una retta posta sopra una retta fa gli angoli adiacenti uguali tra loro, ognuno dei due angoli è retto, e la retta posta si chiama perpendicolare a quella su cui è posta.
11 - Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
12 - Acuto è quello minore di un retto.
13 - Termine è l'estremo di qualche cosa.
14 - Figura è ciò che è compreso tra uno o più termini.
15 - Circolo è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura sono eguali tra loro.
16 - Centro del circolo si chiama quel punto.
17 - Diametro del circolo è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.
18 - Semicircolo è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.
19 - Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, trilatere da tre, quadrilatere da quattro, multilatere quelle comprese da più di quattro.
20 - Tra le figure trilatere è triangolo equilatero quello che ha i tre lati eguali; isoscele quello che ha due soli lati eguali; scaleno quello che ha i tre lati diseguali.
21 - Inoltre tra le figure trilatere è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, acutangolo quello che ha tre angoli acuti.
22 - Tra le figure quadrilatere è quadrato quella che è equilatera e rettangola; oblungo quella che è rettangola ma non equilatera; rombo quella che è equilatera ma non rettangola; romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamano trapezi tutti gli altri quadrilateri.
23 - Parallele sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano.

L'IMPIANTO METODOLOGICO È COMPLETO, PER LA GEOMETRIA. MANCA LA ENUNCIAZIONE DI IPOTESI A PROPOSITO DELLA "NATURA NASCOSTA" DEGLI OGGETTI, I QUALI SONO INVECE CHIARI E TRASPARENTI, O ALMENO SONO IMMAGINATI TALI. E MANCA IL SISTEMA DI SIMBOLI, CHE VERRÀ CON IL CONNUBIO DELLA GEOMETRIA ANALITICA.
IL PROBLEMA DELL'INFINITO NON VIENE POSTO NEI TERMINI MODERNI, MA PROPRIO COME INDEFINITA PROLUNGABILITÀ DEL SEGMENTO.

4 - Le proposizioni iniziali dell'opera euclidea sono state oggetto di profonde analisi e di numerosi commenti, da parte di matematici e di filosofi. Per esempio, per ciò che riguarda la prima frase, concernente il punto, ci si è posti il problema di determinare se questa frase sia una "definizione quid nominis", secondo la terminologia scolastica classica, oppure, sempre secondo la stessa

terminologia, sia una "definizione quid rei". Nel primo caso si tratterebbe di una frase che semplicemente assegna convenzionalmente un nome ad un oggetto in qualche modo già conosciuto; nel secondo caso la frase che parla del punto verrebbe considerata come una completa rivelazione della natura dell'oggetto, rivelazione che permette di dedurre ogni proprietà di esso per via di logica.

In questo ordine di idee si muove per esempio il Commandino, il primo dotto che tradusse Euclide in lingua italiana, e lo commentò; lo stesso Commandino giustifica la forma negativa della frase euclidea, per il fatto che "i principi sono differenti delle cose di cui sono principi, e pertanto ad essi convengono i discorsi negativi" [l].

Come si vede, i commenti classici all'opera di Euclide ponevano dei problemi filosofici, e ne davano le soluzioni, in termini che la moderna epistemologia non considera più validi. Inoltre, all'opinione che considera la frase euclidea come una definizione della natura del punto si può obiettare che mai nel seguito dell'opera Euclide conclude una dimostrazione richiamandosi a quella presunta definizione. Forse sarebbe più prudente considerare la frase come un richiamo all'esperienza, come un avvio all'immaginazione che deve costruirsi l'immagine del punto; e ciò potrebbe anche essere sostenuto osservando che la parola greca che Euclide utilizza è "semeion", che potrebbe essere tradotta letteralmente con il termine "segno".

La didattica abituale utilizza delle frasi che invitano ad immaginare degli oggetti sempre più piccoli, con una sorta di passaggio al limite con l'immaginazione. Questa abitudine radica nelle menti una visione della geometria come quella di una scienza che viene qualificata e determinata dai propri oggetti, che non sono reali, tangibili e materiali, ma si ottengono da quelli materiali mediante processi di immaginazione e, come suol dirsi, di idealizzazione. È appena necessario osservare che questo modo di vedere la geometria conduce poi a considerare l'intera dottrina come lo studio delle proprietà di un determinato ente, che qualcuno identifica con lo "spazio geometrico" o con altri oggetti fantasiosamente designati. Vale la pena di dire subito qui che questo modo di vedere le cose è stato sottoposto ad una crisi definitiva e irreversibile dalla costruzione delle geometrie non-euclidee. Questo evento fondamentale della storia della matematica ha costretto i matematici ad abbandonare l'idea della geometria come quella di una dottrina definita e qualificata dai suoi oggetti: infatti se esistesse un oggetto della geometria, nel senso in cui ingenuamente qualcuno immagina il preteso "spazio geometrico", questo non potrebbe tollerare di essere descritto e conosciuto con dottrine tra loro contraddittorie. Occorrerà quindi costruire un'altra visione della geometria, aderente ai risultati della critica.

Ritorneremo su questo argomento ripetutamente nel seguito. Qui ci limitiamo ad osservare che il termine greco "semeion", di cui abbiamo detto poco fa, non necessariamente deve essere interpretato come riferito ad un oggetto, o come descrivente un corpicciolo, ma potrebbe anche essere inteso come invito a fissare l'attenzione su un posto che si può segnare ed indentificare senza che necessariamente esso sia immaginato come un oggetto materiale, per quanto piccolo ed indivisibile.

Osserviamo inoltre che, in coerenza con ciò che abbiamo detto, G. Peano, nelle sue costruzioni di sistemi di assiomi per la geometria, scrive frasi di questo genere: "Si può segnare un punto", con espressioni che, a nostro parere, sono più aderenti alla concezione originale di Euclide di quanto non lo siano altre presentazioni correnti.

Vorremmo anche dire che questo modo di vedere le frasi di Euclide, che ne fa delle descrizioni piuttosto che delle definizioni nel senso logico rigoroso del termine, apre la strada ad una concezione della geometria che vede questa dottrina qualificata dalle sue procedure piuttosto che dai suoi contenuti; procedure che conducono a razionalizzare e strutturare coerentemente e teoricamente il nostro modo di porci rispetto all'ambiente fisico che ci circonda: cioè rispetto agli oggetti materiali, ai fenomeni di trasmissione dell'energia (per esempio raggi di luce) o infine rispetto ai campi di forze in cui siamo abitualmente immersi. E ciò giustifica ulteriormente la concezione della geometria come "primo capitolo della fisica" (cioè della conoscenza razionale del mondo che ci circonda) con cui abbiamo intitolato questo capitolo.

Osserviamo infine che il trattato euclideo, già dal suo inizio, ci pone di fronte al problema di cui abbiamo già parlato nel capitolo precedente, che consiste nel domandarsi quali siano gli oggetti della matematica, e come sia possibile determinarli. Secondo la concezione classica di scienza, la definizione che inizia l'esposizione costituisce anche il principio logico, dal quale si debbono trarre le conseguenze, che discendono necessariamente da quello. Ciò è possibile in geometria, quando dalla definizione di una figura si traggono logicamente le sue proprietà, per via di dimostrazione. E ciò forse è anche giustificato dal fatto che gli oggetti della geometria appaiono alla nostra immaginazione come trasparenti, quasi scarnificati; e queste immagini sembrano supplire alla definizione logica degli oggetti, e quasi tengono il posto delle ipotesi esplicative, che entrano come costitutivi essenziali di ogni spiegazione razionale dell'esperienza, come è stato detto nel capitolo precedente. Ma questa procedura non è facilmente applicabile quando si tratti dei fondamenti della dottrina: infatti anche la logica classica prescriveva che la frase che esprime la definizione debba essere più chiara del termine definito; cioè che la definizione deve poter spiegare il significato di un termine per mezzo di altri termini supposti già noti. Ma l'operazione non può essere condotta all'infinito, come già ha osservato Blaise Pascal [2].

Consegue di qui che i concetti fondamentali di una dottrina debbono essere precisati con altre procedure, che siano diverse dalla definizione formale classica, la quale era conseguita, come è noto, "per genus et differentiam", cioè precisando due insiemi (il genere e la specie, il secondo contenuto nel primo) ai quali l'ente da definirsi appartiene. Ma i concetti fondamentali della matematica non possono essere definiti in questo modo, proprio perché ottenuti con esperienze del tutto primitive ed elementari. Occorre invece limitarsi ad una descrizione, o ad un richiamo a quelle esperienze elementari e fondamentali su cui si costruisce il concetto.

5 - Nel Capitolo I abbiamo sfiorato il problema del significato dell'infinito in Matematica; abbiamo anche detto che l'insieme dei punti di un segmento viene abitualmente immaginato come infinito, nel senso che noi immaginiamo di poter identificare nel segmento tanti punti, tutti diversi tra loro, senza che mai un atto di questo genere possa essere considerato come l'ultimo. Questa immagine è strettamente collegata anche con il problema della struttura del continuo, alla quale pure abbiamo accennato e sulla quale ritorneremo. Abbiamo anche osservato che, nel caso della geometria, esiste un'altra circostanza nella quale interviene il concetto di infinito. Appare infatti chiaro che, nella terminologia euclidea, il termine "retta" indica un insieme di punti che oggi viene abitualmente indicato con il termine "segmento". Ora, nella proposizione N. 23 che abbiamo riportato sopra, Euclide parla di prolungabilità indefinita della retta; appare lecito pensare che, a questo punto, la fantasia produca l'immagine di punti a distanza sempre crescente, e di conseguenza anche l'immagine dell'infinito in estensione. Ripetiamo la nostra opinione che questa concezione sia anche frutto della fantasia, la quale elabora le nostre sensazioni e le nostre esperienze; e che, in questa operazione venga formata l'immagine della retta che viene chiamata "infinita", nel senso che a questo termine viene spesso attribuito nelle trattazioni abituali odierne.

È questa dunque un'immagine che riguarda l'esistenza di punti della retta ad una distanza sempre superiore a quella da noi raggiungibile con le nostre possibilità di spostamento. E, più in generale ancora, la nostra fantasia ci presenta la possibilità di esistenza di punti (nel senso euclideo di "luoghi"), che sono comunque distanti da noi. È forse questa costruzione fantastica che ci conduce ad immaginare lo "spazio geometrico" come un immenso vuoto senza confini di cui abbiamo già detto; immagine che viene anche adottata da molti fisici e cosmologi, ma che presenta poi, all'analisi razionale, delle difficoltà molto dure da superare.

6 - La trattazione euclidea, dopo la presentazione degli enti di cui si tratterà nel seguito, introduce le relazioni fondamentali che li legano. Questa presentazione viene fatta enunciando delle proposizioni che vengono date senza dimostrazione. Esse vengono chiamate "Postulati", con un termine che è stato oggetto di analisi approfondite e di numerosi commenti. Infatti, il termine greco utilizzato da Euclide ha un significato analogo al termine latino (che ha ispirato poi il termine italiano) e significa "richiesta". Quasi che l'Autore non intendesse imporre le verità di queste proposizioni, né affermarne apoditticamente la rispondenza ad una realtà esteriore, ma semplicemente richiedesse al lettore di accettare le proposizioni stesse con un atto di assenso. I postulati enunciati sono i seguenti.

POSTULATI

1 - Si ammette di poter tirare da ogni punto ad ogni <altro> punto una linea retta;
2 - e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;
3 - con ogni centro e con ogni distanza descrivere un circolo;
4 - e che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5 - e che se una retta incontrando due rette, fa angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti.

È stato osservato che queste proposizioni sono di natura diversa da quelle che vengono abitualmente chiamate "assiomi" e che la filosofia classica considerava come assolutamente evidenti, e necessarie per ogni ulteriore ragionamento. Infatti, a differenza dagli assiomi generalissimi della filosofia, queste proposizioni riguardano soltanto gli enti della geometria; inoltre i primi tre riguardano operazioni o manipolazioni che noi immaginiamo di poter eseguire; il quarto riguarda la relazione di uguaglianza tra angoli retti, che sono stati definiti sopra (nella proposizione 10). L'ultimo postulato è quello che riguarda la relazione di parallelismo tra rette; esso viene chiamato quasi per antonomasia "quinto postulato" o anche soltanto "postulato di Euclide". È noto che esso ha dato luogo a ricerche e controversie secolari; queste hanno avuto esito nel secolo diciannovesimo con la costruzione di sistemi geometrici che non si fondano sul postulato euclideo (o su altri equivalenti); come è noto, tali sistemi vengono chiamati "geometrie non-euclidee", e la geometria classica, che pone il postulato euclideo tra le proprie proposizioni iniziali, viene chiamata anche "geometria euclidea"; denominazione che mette in risalto l'importanza di questo postulato in tutta la costruzione teorica classica.

Ritorneremo in seguito ripetutamente ed espressamente su questi argomenti; ci limitiamo qui ad osservare che, in qualche modo, la domanda sul mutuo comportamento di due rette quando i loro punti si allontanano dalla zona che noi controlliamo con la sensazione immediata, o addirittura con la manipolazione concreta e la misura degli angoli, nasce in modo naturale, data l'impostazione e la struttura del trattato euclideo. E l'enunciato dato da Euclide potrebbe proprio essere visto come la estensione, al di là del campo delle nostre sensazioni immediate, del risultato di osservazioni che noi facciamo su enti alla nostra portata: infatti le misure sugli angoli che le due rette considerate formano con la trasversale sono delle operazioni che noi immaginiamo di poter fare; pertanto il postulato enuncia le conseguenze, estese a distanza comunque grande, di ciò che noi possiamo osservare alla nostra portata.

Infine, osserviamo ancora una volta che negli enunciati euclidei si fa menzione dell’operazione di prolungamento indefinito del segmento. Quindi il problema dell'infinito, nella trattazione euclidea, non viene affrontato direttamente, ma viene risolto semplicemente con riferimento all'immaginazione geometrica. Per i commenti rimandiamo a ciò che abbiamo detto a questo proposito nelle pagine precedenti.

7 - Ai postulati Euclide fa seguire delle proposizioni che chiama "Nozioni comuni"; esse sono enunciate nella seguente forma:

NOZIONI COMUNI
1 - Le cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro.
2 - E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.
3 - E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.
4 - E le cose sovrapponentisi l'una all'altra sono eguali tra loro.
5 - E il tutto è maggiore della parte.

Va osservato che i commentatori e gli esegeti non sono d'accordo sul numero delle proposizioni che Euclide enuncia come nozioni comuni; [QUI OCCORRE CONSULTARE FRAJESE E HEATH].

Non rientra nei nostri scopi l'analizzare e dirimere queste questioni; infatti a noi interessa qui soltanto la presentazione della concezione che la scienza classica aveva della geometria; concezione che è stata adottata per secoli, perché, come abbiamo già detto, il trattato euclideo è stato per lungo tempo considerato come il paradigma della esposizione chiara ed irrefutabile della verità. Ed i trattatisti successivi si sono spesso rifatti ad Euclide come ad un modello, ed hanno invocato la sua testimonianza ed i suoi enunciati come principi, da cui partire per le loro trattazioni. Noi pensiamo infatti che non a caso una celebre opera di Baruch Spinoza sia intitolata "*Ethica ordine geometrico demonstrata*" (1677); la geometria infatti, ed in particolare l'opera di Euclide, ha quei caratteri di appello all'esperienza diretta, di trasparenza dei suoi oggetti e di irrefutabilità delle conclusioni che sono state considerate per molto tempo gli ideali di ogni conoscenza umana. Come si vede, i contenuti delle nozioni comuni hanno una maggiore generalità di quelli dei postulati; sulla loro validità non sono stati sollevati dubbi, prima che Galileo presentasse il suo celebre commento sulla nozione N. 5, che riguarda i rapporti tra il tutto e la parte, in relazione agli insiemi infiniti [3].

Inoltre, si osserva che le nozioni 2, 3, 4 parlano di "aggiungere, sottrarre", "sovrapporre". Non si può evitare di domandarsi con quali modalità si può immaginare di eseguire queste operazioni; in particolare il portare a sovrapporsi due "cose" è sempre stato interpretato come una operazione eseguibile con un trasporto rigido. Quindi si potrebbe concludere che le esperienze dalle quali, per astrazione, sono state fatte emergere queste proposizioni siano quelle che riguardano la manipolazione dei corpi rigidi. Su questa osservazione dovremo ritornare quando parleremo dei cosiddetti "criteri di uguaglianza" dei triangoli; proposizioni, queste, che sono alla base di tutta la trattazione euclidea.

8 - Dopo la precisazione del significato dei termini, e l'enunciazione dei postulati e delle nozioni comuni, l'opera euclidea prosegue con la dimostrazione dei teoremi, che dimostrano rigorosamente le proprietà delle figure che sono state definite, oppure vengono di volta in volta presentate. Dedicheremo le riflessioni dei capitoli successivi all'analisi del metodo seguito dalla geometria classica nel conquistare la validità delle proprie conclusioni, all'evoluzione di quel metodo ed alle crisi che la geometria ha vissuto. Ci interessa qui osservare, ancora una volta, che, nella concezione classica della geometria, le proposizioni enunciate e dimostrate possedevano il carattere di verità in certo senso oggettiva: in altre parole tali proposizioni erano viste come enunciati di proprietà vere di certi enti effettivamente esistenti, cioè delle figure geometriche. In particolare, i postulati erano accettati in forza della loro presunta evidenza, cioè come proposizioni la cui aderenza alla realtà non avesse bisogno di dimostrazione ma soltanto di constatazione. È noto tuttavia che il quinto postulato fu oggetto molto presto di critiche; ma queste vertevano non sul contenuto della proposizione, ma sul modo in cui tale contenuto era presentato; cominciò quindi abbastanza presto quella lunga serie di tentativi di dimostrazione del quinto postulato, che si succedettero fino al secolo diciannovesimo e che furono l'occasione di cambiamento radicale della concezione della geometria, del suo significato e della sua portata.

[QUI DOVREBBE FINIRE IL CAPITOLO. I SUCCESSIVI DOVREBBERO ESSERE DEDICATI AL METODO (ANALISI E SINTESI, GEOMETRIA ANALITICA) ED ALLA CRISI DEL SECOLO XIX]

[NOTE A FINE DEL CAPITOLO]

[1] "...essendo che li principij siano differenti da quelle cose, delle quali essi sono principij, ed essendo che le loro negationi dimostrino in un certo modo la natura di quelli, non senza cagione hanno ritrouato l'orationi negatiue convenire ad essi principij, il che afferma Proclo con l'autorità di Parmenide ...."

Degli/Elementi/d'Euclide I libri quindici/ con gli scholii antichi/ Volgarizzati già d'ordine del famosissimo matematico/ Federigo Commandino da Urbino. Etc. - In Pesaro, Appresso Flaminio Concordia, MDCXIX.

[2] Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible: car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir, en supposeraient de précédents pour servir à leur

explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraint d'autres qui les précédassent; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières.

Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut pas définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. D'où il parait que les hommes sont dans une impuissance naturelle et immuable de traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli. [Blaise Pascal. *De l'ésprit géométrique et de l'art de persuader*. Qui Pascal parla del metodo ideale e rigoroso della matematica, che consiste nel definire ogni termine e nel dimostrare rigorosamente ogni proposizione; ma osserva che ciò non può essere fatto per ogni termine e per ogni proposizione.]

[3] "SALVIATI Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinte le lor radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate". [Da "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Giornata I.]

Galileo, per bocca del personaggio Salviati del dialogo, aveva fatto vedere che esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme infinito dei numeri naturali e quello dei loro quadrati; e che il secondo è ovviamente un sottoinsieme del primo. Pertanto l'esempio addotto dimostra che è possibile stabilire un corrispondenza biunivoca tra un insieme infinito ed un suo sottoinsieme proprio; e quindi, se il primo insieme viene considerato come il "tutto" ed il secondo come una "parte" del tutto, e l'esistenza di una corrispondenza biunivoca viene considerata come verifica dell'esistenza di una relazione di "uguaglianza" tra insiemi, l'esempio mostra che un "tutto" può essere uguale ad una sua "parte"; si ottiene così una palese contraddizione con la nozione comune N. 5.

Naturalmente, nel caso della geometria elementare, si immagina che la verifica dell'uguaglianza tra due figure venga fatta mediante trasporto rigido, come si osserva nel testo; in questo caso la nozione comune N. 5 riproduce i risultati di una osservazione immediata; quindi l'aspetto paradossale della osservazione nasce dalla estensione del significato del termine "uguaglianza".

N.D.R. Nel Sito si trovano molti interventi di Carlo Felice Manara su temi epistemologici. In particolare un rapido riassunto dei temi presentati in queste Dispense si trova in
Epistemologia della matematica. Scuola e Didattica, ottobre 1988, pp. 34-39.

A. Mazzotta. Fierté. B. Pascal

III - LA GEOMETRIA. IL METODO

NOTA I. QUI ANDREBBERO RIPRESE MOLTE IDEE DEL MIO ARTICOLO DI "KARZEL" SULL'ASSIOMATICA, OPPURE MESSE NELL'APPOSITO CAPITOLO SULL'ASSIOMATICA.

NOTA II - IN QUESTO CAPITOLO ANDREBBERO RIPRESE LE ARGOMENTAZIONI SU ANALISI E SINTESI, SULLA SIMBOLOGIA, SULLA GEOMETRIA ANALITICA E SUI METODI DI NOTAZIONE DI PEANO, HAMILTON ECC. RICORDARSI DI CHASLES E DELLA SUA VISIONE STORICA DEL METODO. PERCHÉ LA DISCUSSIONE SUL METODO RITORNA PERIODICAMENTE COME SINTOMO DELLA CRISI E DELLA SVOLTA.

1 - Nel capitolo precedente abbiamo sommariamente presentato l'impostazione che Euclide dà all'esposizione del pensiero geometrico a lui contemporaneo; egli segue la linea di enunciare in forma esplicita le proposizioni che si ritengono chiare e di dimostrare poi rigorosamente le altre. Abbiamo anche osservato che il giudizio di chiarezza sulle proposizioni enunciate senza dimostrazione è fondato su una loro pretesa evidenza, cioè sull'aderenza degli enunciati ad una realtà esteriore, alle proprietà delle figure, dei risultati delle manipolazioni che noi immaginiamo di eseguire su di esse; in altre parole le proposizioni iniziali sono accettate perché enunciano delle proprietà evidenti di certi oggetti che sono appunto considerati gli oggetti della geometria, oppure espongono dei risultati di operazioni o manipolazioni considerate elementari ed immediatamente note.

Ritorneremo in seguito sul problema fondamentale delle proposizioni iniziali di una teoria matematica. Proseguiamo qui nell'analisi del secondo momento del procedimento di costruzione della teoria, momento che abbiamo identificato nella deduzione. Si può osservare che, nel caso dell'esposizione euclidea, la deduzione avviene in forma verbale, secondo i canoni della logica che sono stati codificati dal pensiero greco ed in particolare da Aristotele. Osserviamo a questo proposito che, nel caso della matematica, il processo di deduzione è legato anche con le convenzioni ed i simboli che si adottano per rappresentare i concetti. Anche su questo argomento, che abbiamo già toccato, ritorneremo ampiamente nel seguito. Nel caso della geometria il simbolo degli oggetti geometrici è sempre stato considerato la figura, che fa appello all'intuizione visiva ed alla fantasia rappresentatrice.

È noto che il problema epistemologico del significato e della portata di questa simbolizzazione è stato affrontato già dal pensiero greco: fondamentale a questo proposito è il celebre passo di Platone in cui il filosofo afferma esplicitamente che l'oggetto dello studio del matematico (geometra) non è affatto la figura tracciata, ma il concetto del quale la figura è simbolo; l'oggetto dello studio del matematico è, per esempio, "il quadrato in sé", cioè il concetto di quadrato, che può essere dominato soltanto dalla mente e non dai sensi [1]. Non intendiamo soffermarci qui sul significato metafisico delle parole di Platone, né decidere se l'espressione "quadrato in sé", e le altre analoghe, intendano indicare un'esistenza effettiva degli enti di cui si parla; ci basti osservare che l'enunciato platonico, a nostro parere, presenta chiaramente la qualità di simbolo della figura che il geometra traccia, ed anzi di simbolo inadeguato; inoltre ci pare di poter dire che, nelle parole di Platone, l'oggetto dello studio del geometra non è neppure quell'immagine che la fantasia costruisce, a partire dalla sensazioni; ma l'oggetto della conoscenza certa è un concetto, posseduto dalla ragione e non dalla fantasia, ed i suoi collegamenti necessari con gli altri concetti, collegamenti accertati dalla logica, cioè con una operazione puramente mentale.

A proposito di figure, si potrebbe qui ricordare che il padre di Blaise Pascal (matematico non disprezzabile a sua volta) diede al geniale figlio la definizione della geometria come "dottrina che insegna a tracciare le figure giuste ed a trovare le proporzioni che intercedono tra loro"; ed è noto che i biografi del grande Blaise raccontano che a questa definizione il padre aggiunse anche la proibizione di occuparsi ulteriormente di geometria, ed in particolare di leggere Euclide. Ma che il genio precoce di Blaise lo condusse, sulla base di quella sola definizione, a costruirsi le prime proposizioni della geometria di Euclide, assegnando alle figure dei nomi da lui stesso inventati. [2]

Pertanto la frase con cui Etienne Pascal si liberò dalle insistenti domande del figlio, che voleva sapere che cosa fosse la geometria, appare a prima vista contradditoria alla posizione platonica; ma la contraddizione è soltanto apparente, perché per fare le "figure giuste" occorre ragionare e dedurre.

D'altra parte, abbiamo già osservato che la matematica si distingue dalle altre scienze per il fatto che le sue deduzioni non sempre possono essere sottoposte al controllo dell'osservazione. Abbiamo osservato ciò in relazione agli insiemi infiniti di cui la matematica tratta; ma possiamo anche far riferimento alla geometria; a questo proposito ricordiamo che si possono costruire delle situazioni apparentemente paradossali, le quali confermano ciò che abbiamo ricordato or ora; una situazione cosiffatta si presenta per esempio con le abituali costruzioni che conducono alla "sparizione di un quadratino"; costruzioni che entrano nel repertorio delle diffuse pubblicazioni di volgarizzazione. [3].

2 - Abbiamo detto poco fa che, nella geometria greca, la deduzione avviene quasi esclusivamente in forma verbale, secondo le leggi e le procedure della logica classica. Aggiungiamo ora che la geometria greca, e la riflessione filosofica, hanno approfondito la ricerca metodologica, indagando sul significato e sul valore delle procedure che conducono all'accertamento della verità o alla sua scoperta, così come alla risposta ineccepibile ai problemi che si pongono. Il risultato di queste riflessioni è stato enunciato con la precisazione delle due procedure di analisi e di sintesi; procedure che si trovano esposte da Euclide. [Euclide. Elementi. Lib. XIII. Gli storici sono propensi a giudicare le frasi in cui si trovano gli enunciati relativi come interpolate. Cfr. per es. Thomas L. Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. New York (Dover Publications), 1956. Vol. I , C. IX, 6, pag. 138]. Riportiamo qui le parole con le quali Federigo Enriques, grande matematico e filosofo della scienza, presenta le procedure di cui parliamo:

"*La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa analisi si comincia a supporre che il problema P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza dei precedenti, finché si giunga ad un problema R che si sappia risolvere.*

La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc. "

[*NdR.* Da Enciclopedia Italiana. Istituto Treccani, voce Analisi. Riportato in: *Geometria e logica*. Nuova Secondaria, 4 (dicembre 1983), pp. 38-40 e 57. Vedere Sito.]

Queste procedure, così chiaramente analizzate ed esposte dai Greci, conservano ancora oggi la loro validità sostanziale, anche se la loro realizzazione assume aspetti diversi da quelli che conseguono alla utilizzazione delle regole della logica verbale classica.

3 - Abbiamo accennato alla presenza di concetti riguardanti l'infinito nella geometria di Euclide, ed abbiamo osservato che la loro genesi è probabilmente da far risalire alla immaginazione di oggetti che si trovano a distanze sempre maggiori dall'osservatore. Tuttavia, la geometria greca si trovò a dover trattare anche dei problemi che riguardano l'infinitamente piccolo, e che quindi toccano anche da vicino il concetto di continuo e le sue proprietà fondamentali. Questi problemi si presentano in modo spontaneo quando si prendano in considerazione le figure geometriche aventi un contorno curvilineo. Il caso più importante di una figura cosiffatta è ovviamente il cerchio, che è stato oggetto di indagini fondamentali da parte di Archimede. Si deve al geniale siracusano la codificazione della procedura che oggi viene chiamata "di exaustione"; essa consiste nel dimostrare l'uguaglianza di due grandezze dimostrando che la loro differenza può essere resa minore di una quantità arbitraria.

Appare evidente il fatto che una procedura di questo tipo deve necessariamente scontrarsi presto o tardi con la ripetizione indefinita di certe operazioni o di certi ragionamenti (per esempio di confronto); pertanto non fa meraviglia il fatto che questa problematica conduca da una parte all'analisi del significato e della validità delle procedure infinite, e dall'altra all'analisi dell'infinitamente piccolo, cioè all'analisi della struttura intima del concetto di continuo geometrico e dei suoi fondamenti. Ovviamente la geometria greca non aveva gli strumenti per condurre a fondo la soluzione di questi problemi; quindi il genio di Archimede fonda le sue deduzioni sulla considerazione delle immagini che la fantasia costruisce (come si è detto) a partire dalle sensazioni. Per esempio, Archimede non si pone il problema di dare senso alla espressione "lunghezza della circonferenza" oppure "area del cerchio": per lui queste espressioni hanno un senso ovvio, che è conferito loro dall'esperienza elaborata dalla fantasia, la quale costruisce quelle immagini di cui si parlava. Quindi per lui il solo problema esistente era quello di dare le misure di questi enti, sulla cui esistenza non aveva dubbi. Ed occorre anche dire che la soluzione da lui data dei problemi per lui interessanti è profondamente rigorosa: infatti egli stabilisce delle procedure che si possono validamente ripetere all'infinito, e che permettono di assegnare degli intervalli di valori numerici, sempre più piccoli, intervalli entro i quali sono contenuti i valori che gli interessa determinare.

Ritrovamenti storici recenti hanno anche permesso di conoscere i procedimenti euristici sui quali si basano le sue soluzioni; è noto che tali procedimenti fanno di lui un validissimo precursore del calcolo infinitesimale moderno. Il fatto che egli esponga i propri risultati con procedure che si potrebbero dire "classiche" dimostra da una parte la validità del suo senso critico, e dall'altra il fatto che all'epoca non era disponibile un efficace sistema di simboli linguistici e di procedure deduttive (quello che si potrebbe chiamare un "linguaggio") adatto per esporre con chiarezza e sicurezza i risultati, pur validi, a cui egli era pervenuto. A distanza di secoli, Blaise Pascal, a proposito del problema della cicloide (che egli chiamava "roulette") assumerà una posizione analoga: egli infatti scrive che utilizza il linguaggio degli "indivisibili" (che costituiva una novità alla sua epoca), ma che fa questo soltanto per comodità di esposizione, perché i risultati che egli presenta si possono stabilire con rigore anche con i metodi classici, i quali, nel caso in esame, erano i metodi di exaustione codificati da Archimede.

4 - Abbiamo osservato che la Geometria greca poteva disporre degli strumenti deduttivi forniti dalla logica classica, e non aveva un proprio sistema di simboli adatti alla rappresentazione degli enti ed alla deduzione delle loro proprietà. La validità di questa nostra osservazione appare evidente quando si osservi che la matematica dovette aspettare decine di secoli per avere degli strumenti simbolici efficaci e validi. Infatti, soltanto l'introduzione nella società occidentale delle convenzioni arabo - indiane per la rappresentazione dei numeri, e la nascita dell'algebra come dottrina autonoma, fornirono il terreno fertile sul quale poté germogliare e svilupparsi l'insieme di convenzioni per la rappresentazione simbolica degli enti geometrici che oggi prende il nome di geometria analitica.

Non ci interessa dirimere qui la questione sulla priorità storica di invenzione di questi strumenti concettuali: se cioè tale priorità spetti a Renato Cartesio oppure a Pierre Fermat. Infatti, qui ci interessa soprattutto mettere in evidenza due circostanze storiche che a noi appaiono essenziali per la nascita di questo nuovo ramo della scienza matematica. La prima consiste nell'abbandono della tecnica classica, fondata sulla geometria ed ispirata da questa dottrina, con la quale si rappresentavano le operazioni su grandezze: infatti, in questo modo di vedere, il prodotto di due segmenti veniva rappresentato mediante l'area di una figura piana, ed il prodotto di tre segmenti corrispondeva al volume di un solido. La tridimensionalità del nostro spazio impediva quindi la pratica di rappresentare, in modo intuitivo e visibile, il prodotto di fattori che fossero in numero maggiore di tre. L'abbandono di questo modo di vedere, e la scelta di far corrispondere ad ogni numero un segmento di cui quello rappresenta la lunghezza permisero quindi di dar senso o, meglio, di rendere immaginabile, anche il risultato di una operazione di prodotto che coinvolgesse più di tre fattori. La seconda circostanza fondamentale consiste nel fatto che la possibilità di rappresentare dei numeri, indipendentemente dal loro significato geometrico, e quindi in modo staccato dall'immagine geometrica classica, permetteva di costruire un sistema di simboli che condussero poi a quello che viene chiamato il "calcolo letterale", cioè alla rappresentazione di operazioni su numeri indeterminati; operazioni le quali dunque dovevano essere presentate soltanto attraverso le loro proprietà formali, cioè attraverso le proprietà che non dipendono dai singoli numeri considerati. In altre parole, stava nascendo l'algebra, nel senso moderno del termine; dottrina che allora si presentava come atta a dare la possibilità di operare su grandezze non conosciute (la "cosa", come aveva detto Niccolò Tartaglia) e di trarre le conseguenze da certe premesse, in forza delle sole proprietà che conseguono dal fatto che i numeri obbediscono tutti a certe determinate leggi.

Queste circostanze fondamentali hanno condotto a quel sistema di convenzioni che vengono insegnate anche oggi: secondo queste convenzioni un punto dello spazio viene rappresentato con tre numeri, che sono chiamati le sue coordinate; con questi strumenti, una relazione tra punti o, più in generale, tra figure, si traduce con relazioni tra numeri, per esempio con diseguaglianze o con eguaglianze. In particolare, un luogo di punti viene rappresentato con una equazione; il fatto che il punto appartiene al luogo viene tradotto con il fatto che le coordinate del punto soddisfano ad una certa equazione; quindi un problema geometrico viene tradotto in un sistema di equazioni, e le coordinate del punto o dei punti che soddisfano al problema vengono ottenute con i metodi dell'algebra o dell'analisi matematica.

Pertanto, il procedimento per la risoluzione di un problema ricalca sostanzialmente il procedimento di analisi che era stato codificato dalla geometria e dal pensiero greci, e di cui abbiamo già parlato. La novità sostanziale è costituita dal fatto che la deduzione, in questo caso, è sostituita da calcoli, cioè dalla applicazione (quasi automatica e meccanica) delle regole sintattiche del simbolismo adottato per rappresentare gli enti e le loro relazioni. È lecito credere che il nome di "geometria analitica" dato a questo insieme di convenzioni e di procedure voglia esprimere proprio il fatto che con la loro adozione la procedura classica di analisi, di cui abbiamo detto, viene ricondotta ad un calcolo, e quindi resa semplice e sicura, quasi meccanica ed automatica. Il progresso, rispetto alla procedura classica, non consiste dunque nel cambiamento del metodo fondamentale e delle sue basi logiche, ma nell'adozione di una procedura di deduzione che è assolutamente sicura e facilmente controllabile.

È appena necessario ricordare che, accanto alla procedura deduttiva, eseguita in questi casi con le regole dell'algebra, occorre sempre mettere in opera anche la procedura di sintesi; in questo caso tale procedura viene chiamata "discussione" dei risultati; infatti, ricordando le parole di Enriques esposte sopra, la procedura di analisi (e quindi, in questo caso, il calcolo) fornisce soltanto le condizioni necessarie per la esistenza delle soluzioni di un dato problema; le condizioni sufficienti vanno ricercate confrontando il risultato della deduzione eseguita con il calcolo e le richieste del problema stesso.

Alle osservazioni fatte finora aggiungiamo anche che l'invenzione della geometria analitica costituisce, a nostro parere, un primo esempio di realizzazione di quel carattere di "chiave di lettura della realtà" che la matematica ha assunto nei secoli successivi. In questo caso la realtà è costituita dagli oggetti della geometria, che sono particolarmente semplici e, per cosi dire, trasparenti. E forse non è imprudente pensare che la tendenza di Cartesio, di considerare la realtà perfettamente conoscibile, e di identificare la materia con l’estensione, abbia la sua origine nella tendenza ad estendere a tutta la realtà materiale quei metodi così efficaci che egli aveva escogitato per gli oggetti della geometria.

[PARLARE DI ALTRI SISTEMI DI COORDINATE, UNA VOLTA ROTTO IL GHIACCIO. E DELLE COORDINATE LAGRANGIANE, E DELLE COORDINATE DI GAUSS].

5 - Abbiamo osservato che il metodo logico dell'analisi, codificato da Euclide e da Aristotele e Pappo, è alla base delle procedure della geometria analitica; abbiamo anche detto che l'aspetto fondamentale di questi metodi, nuovi rispetto alle procedure tradizionali, consiste soprattutto nella possibilità di eseguire la deduzione (momento essenziale per la procedura di analisi) non in forma verbale, ma con l'applicazione, per cosi dire automatica e meccanica, delle regole sintattiche del linguaggio adottato. Vorremmo aggiungere qui che l'adozione delle convenzioni della geometria analitica permette di risolvere in modo nuovo il problema della simbolizzazione, che abbiamo sfiorato poco sopra parlando delle figure e del loro significato in geometria. A questo proposito si potrebbe osservare che, con i metodi e le convenzioni della geometria analitica, si ottiene una simbolizzazione degli oggetti geometrici che è molto più precisa, fedele ed efficace di quella che si ottiene con la figura tradizionale; tuttavia questa simbolizzazione fa ricorso all'impiego di certi elementi convenzionali: con linguaggio moderno, e riferendoci per semplicità agli ordinari sistemi cartesiani, potremmo identificare tali elementi nel sistema di riferimento e nella scelta delle unità di misura dei segmenti. Pertanto, con una espressione suggestiva, anche se poco precisa, potremmo dire che si guadagna in precisione e certezza ma si perde in efficacia di rappresentazione intuitiva. Infatti, con l'impiego dei metodi della geometria analitica, la rappresentazione e la deduzione, che conduce alla conoscenza degli oggetti della geometria, richiedono due operazioni concettuali, che si potrebbero chiamare, imitando autorevoli volgarizzatori, una operazione di "cifrazione" ed una, conseguente, di "decifrazione"; con questi termini si vuole ovviamente indicare l'operazione di simbolizzazione degli enti con le convenzioni stabilite, e la interpretazione dei risultati della deduzione, ottenuta con il calcolo algebrico, o con i metodi dell'analisi infinitesimale. Questa doppia operazione presenta a volte qualche difficoltà per alcuni soggetti, perché, ripetiamo, è meno direttamente intuibile rispetto al classico tracciamento della figura, quando sia possibile.

Inoltre, come abbiamo osservato or ora, la rappresentazione degli enti geometrici con le convenzioni della geometria analitica introduce necessariamente degli elementi arbitrari di riferimento; nasce quindi il problema di distinguere, tra le informazioni che si hanno e si deducono con il calcolo, quali siano gli elementi dovuti alla scelta convenzionale degli enti di riferimento (e quindi, in linea di principio, variabili con questa) e quali siano gli elementi veramente intrinseci agli oggetti geometrici che si rappresentano e si studiano. Questo problema, nei casi più semplici, ed in particolare nel caso delle abituali coordinate cartesiane, viene risolto facilmente con riferimento al cosiddetto "significato geometrico" delle coordinate, cioè sostanzialmente ricorrendo alla struttura, supposta nota, degli oggetti da rappresentare. Ma si ripresenterà in modo metodico quando verranno adottate delle coordinate il cui significato non è cosi immediato, e per le quali invece il carattere di sostanziale convenzionalità si afferma come evidente. Infatti, assieme alle coordinate cartesiane abituali, possono essere adottate anche molte altre convenzioni per rappresentare gli elementi geometrici, convenzioni che di volta in volta possono apparire come più comode, come si suole dire: si pensi per esempio alle coordinate geografiche (longitudine e latitudine) che ci servono abitualmente per determinare la posizione di un punto sulla superficie terrestre.

Più in generale, con l'inizio di quella che si suole chiamare "geometria differenziale" (cioè l'applicazione geometrica dei metodi dell'analisi infinitesimale), divenne chiara la possibilità di rappresentare un punto (per esempio su una superficie) con dei parametri numerici, che hanno scarso significato geometrico; tali parametri vengono anche chiamati "coordinate gaussiane" dal nome del grande C. F. Gauss che inaugurò questi metodi nello studio delle superfici. Un fenomeno analogo si è verificato nell'ambito della meccanica razionale: infatti il Lagrange, nella sua "Meccanica analitica", aveva ampliato di molto il concetto classico, puramente geometrico, di "coordinate", utilizzando metodicamente certi parametri liberi (che oggi, in omaggio a lui, vengono spesso chiamati anche "coordinate lagrangiane"), sufficienti per determinare lo stato di un sistema, ma non sempre immediatamente legati a visualizzazioni geometriche, come avviene invece con le ordinarie coordinate cartesiane. Si rese quindi evidente la necessità di inventare delle procedure che permettessero la ricerca di proprietà intrinseche degli enti geometrici studiati. Questa necessità portò alla costruzione dei metodi che vennero chiamati di "calcolo differenziale assoluto" o di "calcolo tensoriale". Non è un caso il fatto che su questi metodi si basa la esposizione della teoria della relatività generale di Albert Einstein; in questo modo infatti si cerca di rappresentare ciò che vi è di obbiettivo nelle osservazioni e nelle leggi fisiche, indipendentemente dai differenti aspetti sotto i quali la realtà materiale ci si presenta: tale diversità di aspetti è infatti dovuta alla diversità degli osservatori ed alle differenti convenzioni che ciascuno di essi può legittimamente utilizzare per rappresentare i fenomeni della fisica.

6 - Abbiamo detto che l'opportunità, e quasi la necessità, di distinguere metodicamente le informazioni che ci vengono dalla scelta arbitraria di un sistema di riferimento da quelle che veramente hanno un significato obbiettivo è stata l'occasione dell'invenzione dei metodi geometrici chiamati di "calcolo differenziale assoluto". Occorre ricordare che altri matematici hanno cercato di risolvere gli stessi problemi battendo strade diverse, costruendo dei sistemi di simboli e dei sistemi di regole (che fornissero la sintassi dei simboli inventati) in modo tale da raggiungere quella che si potrebbe chiamare la "presa diretta" sugli enti della geometria (ed anche della meccanica), evitando il ricorso alla scelta di sistemi di riferimento, spesso distaccati dalla realtà che si vuole rappresentare e studiare.

Un metodo di analisi razionale della realtà che si ispira a queste idee fu escogitato da H. Grassmann ed esposto da lui in un'opera intitolata "*Ausdehnungslehre*" [1844, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, comunemente indicato come *Ausdehnungslehre* , che traduciamo come "teoria dell'estensione" o "teoria delle grandezze estensive"]; quest'opera non ebbe immediatamente il successo che si meritava, per la sua novità (ovviamente rispetto ai tempi) e forse per l'utilizzazione metodica di un "prodotto alterno", che era inconsueto per l'algebra dei tempi. Soltanto nei decenni successivi si comprese la novità dell'impostazione grassmanniana, alla quale per esempio dichiara esplicitamente di ispirarsi Giuseppe Peano, che propose, per conto suo, un calcolo geometrico, diretto appunto a simbolizzare direttamente gli enti geometrici, le loro relazioni e le nostre operazioni su di essi, senza passare attraverso le convenzioni della geometria analitica abituale. [G. Peano. Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di Grassmann, Torino, 1888]. In altro ordine di idee K. G. von Staudt elaborò un "calcolo geometrico" che mirava appunto a costruire un sistema di simboli per così dire diretti degli enti della geometria proiettiva [*Geometrie der Lage*, (1847); *Beiträge zur Geometrie der Lage,* (1856-60)].

Pensiamo che allo stesso ordine di idee siano da attribuire il calcolo dei quaternioni, inventato da William Rowan Hamilton nel 1843 ed i vari sistemi di calcolo vettoriale, che ancora oggi sono adottati per trattare gli oggetti della meccanica razionale e della fisica.

7 - Abbiamo cercato di far vedere che, con l'invenzione della geometria analitica, l'algebra ha fornito gli strumenti di rappresentazione e di deduzione alla geometria. Questo fatto ha stimolato in modo essenziale il progresso di tutta la matematica; vorremmo qui limitarci a ricordare, a titolo di esempio, che l'utilizzazione dei metodi analitici in geometria ha costituito anche uno stimolo per lo sviluppo della problematica relativa alla rappresentazione del continuo geometrico, problematica sulla quale ritorneremo. Inoltre, quasi certamente per l'influenza del pensiero di Cartesio, è maturata nei matematici la consapevolezza dell'importanza del metodo per la ricerca della verità e per la sua esposizione. Sintomatica ci pare il fatto della comparsa, nel 1837, dell'opera di Michel Chasles, che ha trovato importante esporre l'evoluzione storica dei metodi della geometria, come presentazione dell'evoluzione e della maturazione dell'intera dottrina.

[Michel Chasles, matematico francese (Épernon 1793 - Parigi 1880). Pubblicò nel 1837 l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Saggio storico sull'origine e lo sviluppo dei metodi in geometria), nel quale fondò la sua ricerca sulle nozioni di dualità, di omografia e di involuzione, sviluppando lo studio delle coniche, delle quadriche e delle superfici rigate e, in generale, delle trasformazioni proiettive. In cinematica a Chasles si deve l'introduzione dei concetti di asse istantaneo di rotazione e di slittamento. Molto importanti sono due suoi teoremi: il primo afferma che in una corrispondenza algebrica tra due forme sovrapposte di prima specie, rappresentate da polinomi di grado m e n, gli elementi uniti, cioè gli elementi che vengono mutati in se stessi dalla corrispondenza, sono in numero $m + n$. Il secondo afferma che per una figura piana che nel suo piano, in un certo istante, si muove di moto rotatorio attorno a un punto C (il centro di istantanea rotazione) le normali alle traiettorie di ciascuno dei suoi punti A, B, D, E passano per C. Conoscendo, in un moto rigido piano, il movimento di due punti risulta quindi individuata in ogni istante la posizione del centro di istantanea rotazione. www.sapere.it]

Concluderemo le considerazioni sull'importanza del metodo in geometria ricordando l'apporto essenziale che, in questo ordine di idee, è stato dato da Felix Klein; l'opera in cui questo matematico ha esposto le sue idee in proposito è ormai diventata classica, ed è spesso citata con l'espressione "Programma di Erlangen"; essa infatti contiene la prolusione programmatica che il Klein fece ai suoi corsi presso l'università tedesca di Erlangen [1872 - Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen – Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti]. In questa dissertazione il geometra tedesco istituisce una classificazione metodologica dei vari tipi di "geometria"; e consegue questo scopo presentando ognuna di queste "geometrie" come la ricerca di proprietà invarianti delle figure di fronte a certi gruppi di trasformazioni. Pertanto, il Klein risolve metodicamente quel problema (di cui abbiamo già detto) della ricerca della obbiettività, delle proprietà delle figure indipendentemente da ciò che appare attraverso la loro rappresentazione convenzionale. Si potrebbe dire che il Klein chiarisce il fatto che un gruppo di trasformazioni immerge una figura in una certa classe di equivalenza; quindi il concetto di "uguaglianza" tra figure viene presentato come relativo alle trasformazioni alle quali intendiamo sottoporre le figure stesse, ed i vari capitoli della geometria vengono metodicamente classificati e messi in relazione tra loro in base ai gruppi di trasformazioni: più precisamente una data geometria viene qualificata non dai propri oggetti, come vorrebbe una visione elementare e superficiale, ma dalle proprietà invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni che fonda la geometria stessa. Vedremo in seguito come numerose ed importanti siano le conseguenze di questa impostazione teorica. Qui ci limitiamo ad osservare come anche queste illuminanti idee kleiniane traducano, con i formalismi dell'algebra e della logica formale, la metodologia fondamentale che, come abbiamo visto, era stata analizzata da Aristotele.

F. Klein (1872)*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programma presentato alla Facoltà filosofica e al Senato dell'Università del re Federico-Alessandro a Erlangen, Erlangen, Deichert. Rist. con l'aggiunta di note nei *Math. Annalen*, 43 (1893) e in [Klein 1921-23], pp. 460-497. [Trad. it. di G. Fano, Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti, *Annali di Matematica pura e applicata*, vol. XVII (1889-90), pp. 307-343; una seconda trad. ital. è quella recente a cura di A. Bernardo, *Il programma di Erlangen* (Introd. di E. Agazzi), Brescia, La Scuola, 1998]. Da una nota di Laugel alla prima conferenza su Lie risulta che fu tradotta in inglese da [M.W.] Haskell per il *Bulletin of the New York Mathematics Society*, t. II (1892-93), pp. 215-249, e che ne fu fatta una traduzione francese da [H.] Padé nel 1891 nel t. VIII, s. III, [pp. 87-102 e 173-199] degli *Annales de l'École Normale [Supérieure]*.

Da Pietro Nastasi – Pristem/Storia 3-4 2000

[1] "I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano.
Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano o disegnano, e di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse nell'acqua), cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero." [Platone. La repubblica (510, d e, 0].

[2]....Il priait souvent mon père de lui apprendre les mathématiques. Mais il le lui refusait en lui proposant cela comme une récompense. <….>. Mon frère, voyant cette résistance, lui demanda un

jour ce que c'était que cette science, et de quoi on y traitait. Mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire les figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles, et en même temps lui défendit d'en parler davantage, et d'y penser jamais. [Da "La vie de monsieur Pascal écrite per Madame Périer, sa sœur"].

[3] Come è noto, la più comune di queste situazioni paradossali si ottiene decomponendo opportunamente un rettangolo i cui lati hanno le misure 5 e 13 (in una data unità, e poi ricomponendo i pezzi in modo da formare un quadrato di lato 8 (nella stessa unità); si ottiene così la presunta "sparizione di un quadretto"; un facile calcolo mostra che la ricomposizione dei pezzi ottenuti dalla decomposizione del quadrato non è perfetta, e che esiste un parallelogrammo, non coperto dai pezzi ottenuti dalla decomposizione, e la cui area è uguale a quella di un quadratino; pertanto non è avvenuta alcuna sparizione. Si verifica facilmente che l'operazione può essere ripetuta assumendo opportunamente come misure del lato del quadrato e dei lati del rettangolo tre numeri della successione di Fibonacci. Si ottengono così dei risultati sempre più verosimili, nel senso che la esistenza del parallelogrammo di cui sopra è sempre più difficilmente rilevabile. Il che conferma l'opinione, che abbiamo già espresso, secondo la quale l'esperienza non può sempre essere il tribunale di ultima istanza, che giudica sulla validità dei ragionamenti della geometria.
[*NdR*. Si può vedere nel Sito *Il quadratino mancante*, nella sezione DIVULGAZIONE -> FRAMMENTI]

IV - LA GEOMETRIA. IL PROBLEMA DEL CONTINUO GEOMETRICO

[QUI ANDREBBERO RIPORTATE LE CONSIDERAZIONI DELLA CONFERENZA DELL'ISTITUTO LOMBARDO] 082192

(*NdR*. Vedere nel Sito: Inedito 9103. *Il problema del continuo geometrico*. Appunti per la conferenza del 1991-02-21, all'Istituto Lombardo, nel ciclo *Scienza e vita nel mondo attuale*. Conferenza non pubblicata. *Appunti reimpaginati giugno 2013*).

IVa - IL PROBLEMA DEL CONTINUO NELLA GEOMETRIA CLASSICA

1 - Si potrebbe dire che il problema del continuo geometrico è nato con la geometria stessa: il primo teorema che l'umanità abbia conosciuto, e precisamente la proposizione che va sotto il nome di teorema di Pitagora, coinvolge, con le sue conseguenze, anche la struttura di quello che è stato da molti considerato come l'oggetto della geometria, cioè il cosiddetto “spazio geometrico”. Infatti, dal teorema di Pitagora si deduce l’esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro, come il lato e la diagonale del medesimo quadrato; e da qui si deduce facilmente la non esistenza di un atomo, di un grano, di un “quanto” di quello spazio geometrico di cui si diceva. In altre parole, questo risulta indefinitamente divisibile, senza che si possa giungere ad un suo elemento costitutivo, un suo “atomo”; e tale indefinita divisibilità sarà oggetto di meditazioni nei secoli successivi, in particolare quando si cercherà di precisare il concetto di continuità e di esprimerlo in forma rigorosa.
Questa peculiarità del presunto oggetto della geometria pare che abbia suscitato, anche all'epoca di Pitagora, varie perplessità e polemiche, che hanno attirato l'attenzione degli storici e dei cacciatori di curiosità storiche. Tra le varie proposizioni di questo tipo abbiamo addirittura potuto leggere che Pitagora è stato perseguitato dai sacerdoti suoi contemporanei, perché con il suo teorema aveva dimostrato che Dio non esiste.

2 - La proposizione di Pitagora non è la sola che abbia richiamato l'attenzione dei pensatori: sono rimaste celebri infatti, nella storia della filosofia, le proposizioni paradossali che hanno attinenza con lo spazio e in particolare quelle, portate alla luce dalla filosofia Eleatica, che vanno sotto il

nome di paradosso del moto e di paradosso di Achille.

Una enunciazione del primo paradosso vorrebbe che una freccia non possa mai raggiungere il proprio bersaglio, e ciò sotto la forza della seguente argomentazione: la freccia per giungere al bersaglio deve giungere prima a metà del cammino, e poi deve raggiungere la metà del cammino rimanente, e poi ancora la metà del cammino rimanente e così via, all'infinito; quindi la freccia non raggiungerà mai il bersaglio; analogamente il paradosso del piè veloce Achille che insegue la tartaruga viene enunciato osservando che, mentre Achille copre la distanza tra il suo punto di partenza e quello della tartaruga, quest'ultima si è spostata; pertanto, quando Achille giunge nel punto in cui inizialmente era la tartaruga, questa non si trova più in quel posto, ed il problema dell'inseguimento si ripropone, e così via, all'infinito.

Queste proposizioni, ed altre che ad esse si riattaccano, hanno stimolato per secoli la riflessione di molti scienziati e filosofi; il fare la rassegna di tutte le argomentazioni che sono state svolte durante tutta la storia del pensiero umano e riguardano questi argomenti è un’impresa quasi disperata, che non intraprendiamo qui. Ci limitiamo quindi ad osservare che questa problematica, posta dalla filosofia greca, è molto profonda, perché raggiunge i fondamenti stessi della nostra capacità di argomentare e di ragionare in forma rigorosa; infatti l'evoluzione critica della matematica, avvenuta nel secolo diciannovesimo e tuttora in atto, ha mostrato chiaramente come il problema del continuo sia strettamente legato a quello dell'infinito, o in particolare, al significato ed alla validità degli algoritmi infiniti. E questo appunto era il punto fondamentale delle critiche che gli Eleati elevavano ai concetti fondamentali della geometria; tra gli altri, al concetto di moto, ed in particolare a quello di movimento rigido, che - come vedremo - è alla base della costruzione euclidea della geometria.

È stato osservato del resto che il ricorso a procedure infinite si incontra anche in altri passi dell'opera euclidea. Per esempio Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, a proposito della definizione di rapporto tra due grandezze che si incontra nel libro V degli "Elementi" di Euclide, scrivono: "Occorrono concettualmente infinite verifiche di concordanze di segni: Eudosso <al quale viene attribuita la costruzione della teoria delle proporzioni> non ha potuto evitare, escludere, l'infinito nel determinare (o definire) il rapporto tra due grandezze incommensurabili: lo ha però imbrigliato, nel senso che ha ideato un procedimento, contenuto in uno schema fisso invariabile".

3 - Come abbiamo detto, ritorneremo in seguito a considerare il problema dell'infinito matematico in relazione al continuo geometrico; qui vorremmo soltanto aggiungere che la critica Eleatica ha messo in luce, a nostro parere, anche un altro problema che verrà delucidato dall’evoluzione logica della matematica del secolo XIX; precisamente il fatto che un medesimo oggetto matematico possa essere considerato da diversi punti di vista, e quindi possa dare luogo a diverse teorizzazioni; nel caso in esame, per esempio, il continuo lineare, per esempio la retta, può essere visto secondo la mentalità euclidea, per la quale i segmenti sono degli oggetti ben determinati, che possono essere spostati, confrontati, sommati ecc., oppure possono dar luogo ad un’analisi che ne ricerchi quelli che sono, per così dire, i loro elementi. Analisi che necessariamente sfocia nella problematica relativa all'infinito.

4 - Abbiamo considerato brevemente la problematica della geometria greca in relazione alla questione del continuo geometrico; la critica successiva ha messo in luce altre questioni, riguardanti l'opera di Euclide, che coinvolgono direttamente il problema della continuità; questioni di cui dovremo brevemente occuparci qui, per poter comprendere appieno gli apporti della critica successiva, anche relativamente recente.

La prima questione riguarda l’esistenza di punti, che si ottengono come risultati di costruzioni, ma la cui esistenza non si deduce per dimostrazione da alcuna delle proposizioni precedenti. Il primo (ma non l'unico) caso in cui tale questione si presenta viene incontrato nella proposizione prima del libro primo, laddove viene costruito il triangolo equilatero. Nella procedura relativa si prende in considerazione il punto di intersezione di due circonferenze, ognuna delle quali ha dei punti interni e dei punti esterni all'altra.

La critica recente (CITARE HEATH NEI PUNTI IN CUI TALE OSSERVAZIONE È FATTA) ha rilevato in questo punto una lacuna, perché l'esistenza di tali punti (come si è detto) non risulta da alcuna proposizione precedente. Si desume da qui che per la mentalità della geometria greca, ed in particolare di Euclide, il disegno immaginato, e la costruzione eseguita erano garanzie sufficienti della esistenza degli enti di cui si tratta. In altre parole, si potrebbe dire che, per Euclide, la costruzione materiale (anche soltanto immaginata) degli oggetti della geometria non suscitava obiezioni; il che potrebbe anche essere presentato dicendo che nella mentalità euclidea le operazioni che vengono effettuate mediante movimento rigido continuo fanno parte del patrimonio di nozioni comuni che vengono ritenute valide senza ulteriore prova.

È superfluo osservare quanta parte abbia l'immaginazione nella costruzione di questi concetti: è noto infatti che l'antichità classica non ignorava l'esistenza di teorie atomistiche, che presentavano la materia come costituita da atomi indivisibili; come conseguenza, le stesse teorie dovevano riguardare al concetto di continuo geometrico come il risultato della nostra immaginazione, che colma le lacune effettivamente esistenti negli oggetti, anche se impercettibili ai nostri sensi. Si direbbe che questa problematica non abbia fatto presa su Euclide, così come non ha influito sulla geometria successiva, che prende ovviamente i suoi contenuti idealizzandoli dalle esperienze sensibili, accettando quindi il continuo come un dato che non viene ulteriormente analizzato.

5 - Un secondo punto dell'opera euclidea nel quale è dato di rilevare una lacuna si incontra nel libro V, e precisamente nella proposizione 17, in cui viene dimostrata la proprietà delle proporzioni che viene abitualmente richiamata con l'espressione "Regola del dividendo".

Si potrebbe dire, con linguaggio moderno, che in questo ambito le considerazioni di Euclide riguardano il concetto generale di grandezza, e le operazioni sulle grandezze. A questo proposito è stato osservato che la dimostrazione euclidea si basa sull'ipotesi che esista una grandezza che è la quarta proporzionale dopo tre grandezze date. È noto che la costruzione di una grandezza cosiffatta può essere data quando si tratti di segmenti, ma risulta non eseguibile in generale, con gli strumenti ed i mezzi che sono implicitamente accettati nella trattazione euclidea.

Fra i tentativi che vennero fatti per colmare questa lacuna nell'opera di Euclide, ricorderemo quello di Girolamo Saccheri e di Augusto De Morgan. Nel caso di Saccheri è noto che di solito si ricorda l'opera del geniale gesuita pavese per il tentativo di colmare il "neo" della proposizione riguardante la parallela; ma è interessante osservare che egli, nella stessa opera, si incarica di cancellare anche il neo riguardante l'esistenza della grandezza quarta proporzionale dopo tre date; e lo fa ricorrendo a considerazioni che si basano sostanzialmente su proposizioni di continuità, ed utilizzando questa proprietà come ce la presenta l'immaginazione e pertanto svolgendo delle argomentazioni che alla nostra mentalità risultano inconcludenti.

Nel caso di De Morgan invece l'immaginazione fonda un equivoco di altro tipo: invero questo Autore si preoccupa di garantire l'esistenza della grandezza che gli interessa accettando che una grandezza, quando passa crescendo da un valore ad un altro, deve prendere tutti i valori intermedi; tra i quali vi è appunto, secondo l'Autore, quello di cui gli interessa dimostrare l'esistenza. Si tratta ovviamente di una petizione di principio, che a nostro parere è spiegabile con l'invadenza dell'immaginazione, la quale spesso induce in errore anche autori che in altre occasioni danno prova di essere capaci di grande sottigliezza.

6 - Occorre dire che tutta la geometria greca ha manifestato di non rendersi conto della problematica di esistenza, che si incontra nei problemi or ora ricordati ed in altri. Ci limitiamo a ricordare che Archimede, nella misura dell'area del cerchio, non si pone il problema se abbia senso parlare di questa grandezza, cioè se abbia addirittura senso parlare di quest'area; ma semplicemente affronta il problema di determinarla; analoga posizione egli prende nel caso della quadratura del segmento di parabola, ed in generale quando egli applica il procedimento ingegnosissimo di esaustione. È ben noto tuttavia, dalle recenti scoperte sull'opera sul Metodo di Archimede, che egli si servì di procedimenti euristici, che lo portarono a calcoli analoghi a quelli che noi oggi

eseguiamo con l'operazione del calcolo di un integrale definito. Precisamente sappiamo che egli immaginò il segmento di parabola diviso in fettine sottilissime, che egli somma per trovare il valore dell'area della figura a contorno curvilineo, eseguendo poi il passaggio al limite. Tuttavia, il procedimento pare sia stato da lui adottato soltanto in sede di ricerca e di invenzione, che cioè sia stato considerato da lui come avente carattere tipicamente euristico; ma egli si premurò di dimostrare la validità dei risultati con dimostrazioni per esaustione. Analoga posizione viene assunta, come è noto, da Blaise Pascal circa venti secoli dopo; infatti egli afferma (nell'opera sulla cicloide, da lui chiamata “roulette”) di utilizzare il linguaggio degli indivisibili, con una posizione intuitiva quindi analoga a quella di Archimede; ma egli aggiunge che la certezza della validità dei risultati gli è data soltanto dalle dimostrazioni rigorose per esaustione, tipiche della geometria classica.

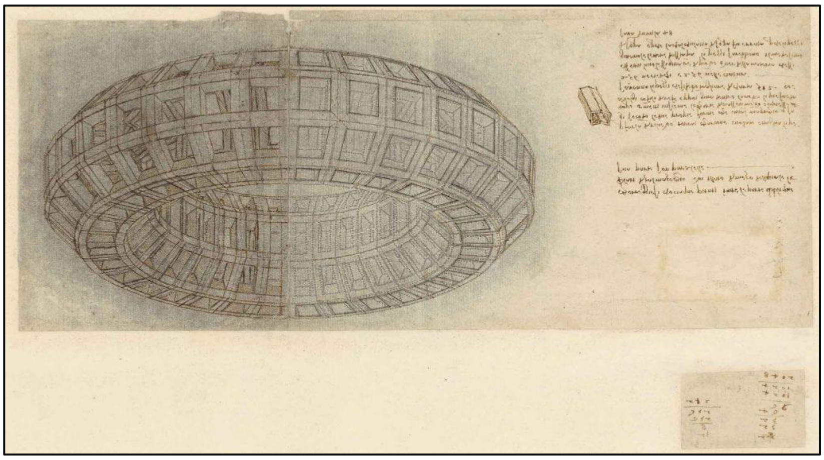
Analoghe osservazioni si possono fare a proposito delle soluzioni che i Greci diedero di certi problemi immaginando che si potessero tracciare delle curve che intersecate con rette opportune, permettano di determinarne la soluzione, come è il caso della cissoide di Diocle o della quadratrice di Ippia; ovviamente essi non pongono il problema dell’esistenza delle soluzioni; il che ci fa pensare che, come abbiamo detto, la costruzione eseguita o immaginata costituisce per loro anche l'accertamento dell'esistenza degli elementi geometrici considerati.

7 - Si potrebbe quindi dire che la matematica greca in certo senso non ha manifestato interesse al problema del continuo geometrico, così come noi oggi lo consideriamo. Ciò non ha tuttavia impedito alla filosofia greca di prendere coscienza del problema e di cercarne (in qualche modo) le soluzioni; il che può essere indizio del fatto che la filosofia greca era profondamente interessata al problema della certezza della conoscenza, certezza di cui la matematica appare essere uno strumento validissimo. E d'altra parte la matematica si presentava anche come strumento di conoscenza della Natura; ed in particolare la geometria poteva assumere l'aspetto di “primo capitolo della fisica” (secondo l'arguta espressione di F. Enriques), cioè come il primo passo verso la determinazione razionale dei nostri rapporti con il mondo materiale, sia pure idealizzato attraverso i procedimenti della geometria.

Abbiamo visto che la filosofia Eleatica aveva posto dei problemi sul continuo e sull'infinito, presentandoli come problemi di geometria e di cinematica. Aristotele prese in considerazione il problema del continuo, esprimendo con estrema chiarezza certe caratteristiche di questo oggetto mentale; infatti, (volendo esporre le cose con la nomenclatura odierna) egli precisa che il continuo di una certa dimensione è irriducibile a quelli di dimensione minore, nel senso che non è costituito da questi come la casa è costituita dai suoi mattoni; invece gli elementi di dimensione minore sono sì nel continuo ma come suoi termini. Quindi per esempio il segmento non è costituito da punti, disposti in fila come perle di una collana, ma i punti sono termini del segmento; e se un segmento viene diviso in due mediante un punto intermedio, questo appartiene come termine ad una sola delle due parti.

Questa posizione suona sorprendentemente analoga a quella che prenderà secoli dopo Richard Dedekind, enunciando il postulato di continuità della retta mediante la partizione di tutti i suoi punti in due classi (opportunamente determinate mediante relazioni di ordine) e postulando che esista un punto di separazione, il quale tuttavia appartiene ad una sola delle due classi considerate.

Come è noto, la problematica ritornerà alla ribalta con la matematica rinascimentale, ed in particolare con Bonaventura Cavalieri, il quale parlerà di "somma di tutte le linee che costituiscono una superficie"; ed è noto anche che sulla teoria degli indivisibili di Cavalieri e sulla loro natura si è accesa una polemica rimasta ormai classica, sulla quale dovremo tornare nel seguito.



Leonardo Da Vinci. Codice Atlantico. Milano, Pinacoteca ambrosiana

IVb - LE QUESTIONI CLASSICHE DEL CONTINUO NELLA MATEMATICA DEL RINASCIMENTO

[B. CAVALIERI E GLI INDIVISIBILI, LA SCODELLA DI GALILEO, B. PASCAL E LA SUA POSIZIONE RISPETTO AGLI INDIVISIBILI. IL CALCOLO INFINITESIMALE. NEWTON, LEIBNIZ E C. L'INTUIZIONE DELLA CONTINUITÀ FISICA, MATERIALE E IL SUO RUOLO NELLA COSTRUZIONE DEL CALCOLO INFINITESIMALE. RUGGERO BOSCOVICH.]

1 - È noto che l'impiego metodico degli strumenti matematici nelle scienze della Natura influì in modo determinante sulla crisi scientifica del Rinascimento; a sua volta, la crescita impetuosa della scienza rese necessaria la costruzione di nuovi strumenti per la matematica, e provocò addirittura il nascere di nuovi rami di questa scienza.

Pensiamo di essere nel vero se diciamo che una circostanza determinante di questa rivoluzione scientifica e culturale è rappresentata anche dalla introduzione nella nostra civiltà occidentale delle convenzioni indiane, a noi trasmesse dagli Arabi, per la rappresentazione dei numeri. Pensiamo che sia giusto vedere in questa introduzione l'origine della matematica moderna; infatti si diede così agli scienziati la possibilità di esprimere con opportuni simboli gli enti della matematica, evitando il ricorso al linguaggio comune, e riducendo la deduzione ad una applicazione delle leggi sintattiche dei simboli adottati.

NOTA. A proposito di continuità, Ernst MACH - Die Mechanik in ihrer Entwikelung historisch-kritich dargestellt, tradotto in italiano da Dionisio Gambioli col titolo: I principi della Meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo (Milano, 1909), dice esplicitamente (pag. 129 della edizione italiana): "*Galileo, in tutte le sue deduzioni, segue un principio di una grande fecondità scientifica, che giustamente si può chiamare "principio di continuità", il quale consiste nel modificare, gradatamente e quando è possibile, le circostanze di un caso particolare qualunque, di cui si è potuto fare un'idea chiara, accostandosi sempre, tanto quanto è possibile a questa idea precedentemente acquistata. Nessun altro metodo potrà permettere la comprensione dei fenomeni naturali con più sicurezza e semplicità, con minore fatica o minor sforzo intellettuale*".

La pagina riportata di Mach si riferisce agli esperimenti che Galileo faceva sulla caduta di gravi; il Mach descrive gli esperimenti di Galileo, che fa scendere un corpo lungo un piano inclinato, in modo che acquisti velocità, e lo fa risalire lungo un altro piano inclinato, posto di fronte al primo; il corpo risale alla stessa altezza che aveva prima della discesa, ma diminuendo sempre di più con continuità l'inclinazione del secondo piano (quello della risalita) si ha che il rallentamento del corpo che risale è sempre minore; quando il secondo piano diventa orizzontale, il corpo non rallenta più, ma prosegue con la stessa velocità che aveva alla fine della discesa. Mach afferma che così Galileo scopre la legge d'inerzia.

Le analisi psicologiche che Mach riporta riguardano la difficoltà che Galileo, e gli scienziati suoi contemporanei, ebbero nel distaccarsi dalle idee aristoteliche sul moto dei corpi, perché il moto circolare, per ragioni metafisiche, era considerato come il più perfetto dei moti. Ma qui ci interessa analizzare i fondamenti psicologici da cui parte Galileo per questa esperienza basata sulla continuità; ovviamente c'è una presunzione della continuità fisica (per così dire) che, come proprietà fondamentale della materia, viene accettata come procedura di indagine. Precisamente Galileo accetta pacificamente che un cambiamento, considerato come piccolo, delle circostanze sperimentali non possa dare dei bruschi cambiamenti visibili e rilevabili nei fenomeni osservati, e non si pone il problema di definire o precisare dei criteri per giudicare che un cambiamento sia “piccolo”; in altri termini, Galileo accetta come un fondamento per la costruzione di un modello della materia e della meccanica il detto "Natura non facit saltus", ed accetta l'immagine di continuità della materia che ci è fornita dall’elaborazione fantastica della nostra esperienza sensibile.

Ovviamente non intendiamo qui istituire una critica del pensiero galileiano; ci interessa soltanto far rilevare quanto grande sia stata l'importanza dell'immagine del continuo nella costruzione della meccanica razionale classica; il travaglio critico intercorso ci ha reso ben coscienti del fatto che questa immagine costituisce un modello della realtà materiale, che vogliamo descrivere e dominare con gli strumenti della matematica: la maturazione della critica dei fondamenti non ha condotto al ripudio del modello, ma ha reso evidente la necessità di presentarlo come tale, senza attribuirgli una portata assoluta di conoscenza.

IVc - I PROBLEMI DEL CONTINUO GEOMETRICO NEL SECOLO XIX

Per inquadrare in modo soddisfacente la problematica del continuo geometrico nel secolo XIX è forse necessario dare un breve cenno delle crisi evolutive che la geometria ha vissuto in tale periodo; crisi che sono state di grande importanza anche per le altre branche della matematica ed hanno stimolato il cammino di questa scienza verso il suo assetto attuale. Tuttavia, non tutti gli episodi di crisi evolutiva hanno interessato direttamente il problema del continuo: per esempio la costruzione delle geometrie non euclidee non ha avuto conseguenze dirette sulla problematica del continuo geometrico, anche se ha cambiato radicalmente la concezione della geometria e del suo oggetto. Invece la costruzione della geometria proiettiva ha suscitato dei problemi riguardanti la continuità: è ben noto infatti che Karl G. von Staudt ha fondato "ex novo" la visione della geometria con la sua opera fondamentale "Geometrie der Lage" [*Geometrie der Lage*, (1847); *Beiträge zur Geometrie der Lage*, (1856-60)], opera in cui egli introduce sistematicamente la corrispondenza proiettiva tra gli enti della geometria; è pure noto che tuttavia nella dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività lo Staudt svolge delle considerazioni che sostanzialmente fanno appello al concetto di continuità della retta, e che possono essere rese rigorose soltanto dopo che tale proprietà sia stata esplicitamente enunciata con appositi postulati.

Tuttavia, vale la pena di osservare che la questione del continuo geometrico nel secolo XIX è strettamente collegata con quella del concetto di continuità di una funzione. Non intendiamo approfondire qui queste questioni, che, ripetiamo, sono marginali rispetto a quelle del continuo geometrico; tuttavia non possiamo evitare di ricordare che la precisazione del concetto di limite e del concetto di funzione continua è stata realizzata con un continuo superamento del ricorso all’immaginazione per costruire invece degli enunciati linguistici, concettualmente ineccepibili, e logicamente rigorosi. Si potrebbe dire che questo superamento è una delle caratteristiche più importanti della matematica del secolo XIX, e viene raggiunto con la precisazione del concetto di limite, con la dimostrazione che l'ipotesi della continuità di una funzione non è sufficiente per l'esistenza della derivata, ed infine con la celebre costruzione, da parte di Giuseppe Peano, di una curva continua che riempie un intero quadrato.

<LA COSTRUZIONE RIGOROSA DEL CAMPO REALE RICHIEDE UN PROCEDIMENTO INFINITO, COME ABBIAMO VISTO ALL'INIZIO. IL PROBLEMA SI MORDE LA CODA. POSTULATI DI DEDEKIND E DI CANTOR. VARI PRESUPPOSTI NON SEMPRE

ESPLICITAMENTE ENUNCIATI. LA DEFINIZIONE "EPSILON DELTA" E QUELLA TOPOLOGICA DI OGGI>.

Come è noto, la precisazione del concetto di limite di una funzione è stata conseguita mediante quella definizione di continuità che alcuni trattatisti chiamano "definizione epsilon-delta", dal nome delle lettere greche tradizionalmente impiegate per indicare l'incremento della variabile indipendente e quello corrispondente della funzione. È superfluo osservare che questa definizione presuppone la possibilità di misurare i segmenti di retta, oppure di misurare le grandezze che sono interessate nella definizione, e che sono rappresentate da segmenti di retta, nelle ordinarie convenzioni cartesiane. Un'ulteriore generalizzazione del concetto di continuità fa intervenire, come è noto, dei concetti topologici, e quindi fa ricorso soltanto a concetti di appartenenza di certi elementi a certi insiemi. Non possiamo qui addentrarci nell'analisi di queste teorie, e vogliamo dedicare la nostra attenzione alla definizione di continuo geometrico ed alla sua rappresentazione rigorosa.

È noto che questi scopi vennero raggiunti con varie procedure e con vari atteggiamenti; la teorizzazione del continuo geometrico (in particolare della retta, come ce la rappresenta la fantasia, elaborando i dati dei nostri sensi), viene oggi presentata tradizionalmente nei trattati scolastici in due modi, che hanno la loro origine nelle teorizzazioni di Richard Dedekind e di Georg Cantor. Abbiamo già avuto occasione di ricordare Dedekind, e di osservare quanto sia vicino alla concezione classica del continuo; concezione secondo la quale nel continuo potevano esistere degli elementi di specie diversa, che non lo costituiscono, ma che sono termini di elementi della stessa specie del continuo considerato: per esempio punti esistono in un segmento ma non lo costituiscono, e sono termini di segmenti contenuti nel segmento dato. Inoltre, un elemento esistente nel continuo appartiene soltanto ad uno di due eventuali sottoinsiemi che lo ammettono come termine comune: così per esempio un punto nel segmento può appartenere ad uno solo dei due segmenti contigui, dei quali è termine comune.

A queste considerazioni, ben note ai lettori dei testi elementari di geometria, vorremmo aggiungere soltanto alcune osservazioni: anzitutto che, nella abituale sistemazione didattica, l'enunciato della continuità viene presentato in relazione alla retta, suddividendo gli infiniti punti di questa in due classi, sul fondamento di una relazione di ordine totale, che si suppone già in qualche modo stabilita. In secondo luogo, ci pare chiaro che questo enunciato di continuità faccia intervenire degli insiemi infiniti: precisamente gli insiemi dei punti delle due semirette che vengono prese in considerazione, e identificate, come abbiamo detto, sulla base di una relazione di ordine totale.

È noto che nell'enunciato di continuità della retta che si fonda sulle idee di Cantor si considera una successione infinita di intervalli "inscatolati", come suole dirsi (tali cioè che ciascuno sia contenuto in tutti quelli che lo precedono nell'ordinamento della successione), e si postula l'esistenza di almeno un punto comune a tutti; se poi la lunghezza degli intervalli tende a zero, si dimostra che tale punto è unico. Anche a proposito di questo enunciato si potrebbe osservare che esso si fonda sull'esistenza di un ordine totale sulla retta, ed inoltre presuppone la possibilità di confrontare e misurare le lunghezze dei segmenti. Infine, anche in questo caso, non si può eliminare il ricorso a concetti ed a procedure che coinvolgono insiemi infiniti.

Esamineremo in seguito altri enunciati che riguardano il concetto di continuità geometrica. I due enunciati che abbiamo preso in considerazione finora ci introducono in modo naturale nel problema della rappresentazione del continuo, con strumenti del linguaggio matematico. È noto che il problema della rappresentazione del continuo geometrico è stato risolto completamente con la costruzione rigorosa del campo reale. Anche questa teoria fa parte ormai degli argomenti classici ed irrinunciabili della didattica matematica, anche elementare, pertanto non ci soffermeremo ad esporla e ci basti osservare ancora una volta che la costruzione rigorosa del campo reale non può fare a meno di algoritmi infiniti. Ciò appare immediatamente evidente a chi consideri per esempio la definizione che si dà di numero reale mediante le sezioni nel campo razionale (definizione che si ispira ovviamente agli enunciati di Dedekind), oppure a chi consideri le definizioni che si danno esplicitamente mediante algoritmi infiniti: coppie di successioni convergenti di numeri razionali, o classi di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri cosiffatti, o in altri modi.

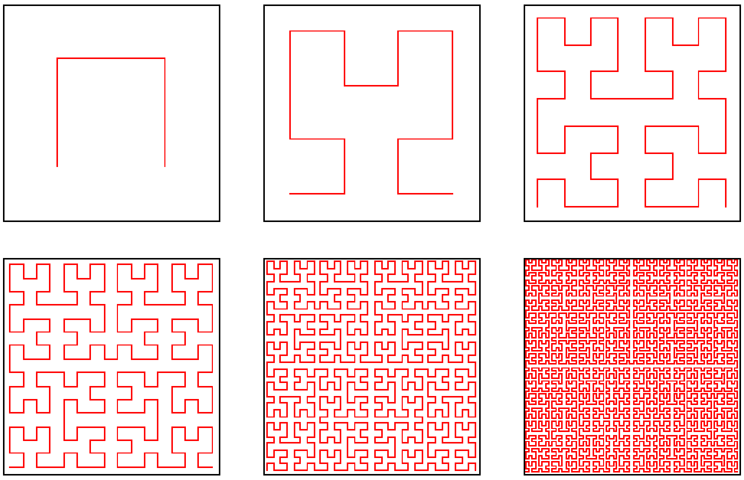
IVd - LA PROBLEMATICA DELLA MODERNA TEORIA DEI FRATTALI

<AGGANCIO CON LA REALTÀ (MISURA DELLE LINEE DI CONFINE O DELLE COSTE DI UN PAESE). L'INEVITABILE RICORSO ALLE PROCEDURE INFINITE E LA COSTRUZIONE DI NUOVI INVARIANTI. PER QUANTO RIGUARDA LA DIMENSIONE, GIÀ PEANO AVEVA FATTO OSSERVAZIONI PERTINENTI>.

È noto che la problematica riguardante il continuo geometrico ha risvegliato anche recentemente l'interesse dei ricercatori e del pubblico a causa della nascita di quegli oggetti che vengono ormai comunemente qualificati come "frattali". L'interesse dei non matematici è stato attirato dalla pubblicità che è stata fatta in relazione a figure quasi grottesche che qualcuno ha voluto pittorescamente attribuire ad un preteso nuovo modo di far geometria. Non giudichiamo qui della opportunità di questi tipi di volgarizzazione scientifica, ma non rinunciamo a fare qualche osservazione sul significato e sulla portata di questi nuovi studi.

Ci interessa anzitutto ricordare la problematica concreta in corrispondenza alla quale viene presentata la nascita di questa teoria da parte del suo autore, Benoit Mandelbrot. Infatti, in molti dei numerosi libri da lui scritti per presentare la nuova teoria, egli richiama alcune questioni pratiche, che male si inquadrano nelle procedure classiche e che invece possono venir trattate con i nuovi concetti. Si tratta per esempio di dare senso alla procedura di misura della lunghezza delle coste di un'isola (come la Gran Bretagna) o del confine comune di due nazioni vicine. La necessità di dar significato a certi concetti e di definirli in modo preciso ha portato gli autori delle nuove teorie a generalizzare il concetto di dimensione di un oggetto geometrico, accettando che questo carattere abbia anche un valore non intero.

L'idea fondamentale che sta alla base della definizione di questo carattere potrebbe essere brevemente esposta nel modo seguente. Per definire la lunghezza di una curva che chiameremo "regolare " si mette in opera una procedura classica: se pensiamo per esempio ad una circonferenza, tale procedura consiste nell'inscrivere in essa dei poligoni (non necessariamente regolari) convessi, fare tendere a zero la massima lunghezza dei lati di tali poligoni, e quindi far tendere all'infinito il loro numero; la lunghezza del perimetro di tali poligoni, quando si esegua il passaggio al limite, tende ad un valore ben determinato che viene assunto come misura della lunghezza della curva. È ben noto che questa procedura risale ad Archimede, nei suoi tratti essenziali. È possibile tuttavia costruire degli oggetti che possono essere chiamati "curve", perché ogni loro punto ha coordinate che sono funzioni continue di una variabile reale, per i quali la procedura descritta poco sopra non conduce a risultati finiti. Un oggetto cosiffatto è la celebre curva detta di Von Koch; un altro è la curva di Peano, di cui abbiamo già parlato. Infatti, quando si inscriva in un oggetto di questo genere una poligonale, la lunghezza di questa cresce oltre ogni limite al tendere a zero dei lati della poligonale stessa. È tuttavia possibile determinare una opportuna costante (che può assumere il significato di esponente) in corrispondenza alla quale il limite che si ottiene, al tendere a zero del massimo lato della poligonale, è finito. La costante vale 1 (uno) per le curve che abbiamo chiamate "regolari", e pertanto il suo valore coincide con quello abitualmente assunto come valore della dimensione dell'oggetto "curva". Tuttavia, nei casi più generali, la costante può assumere anche valori non interi, che costituiscono ovviamente delle caratteristiche geometriche dell'oggetto considerato.



Curva di Hilbert (variante della Curva di Peano). Da Wikipedia

V - LA GEOMETRIA. LE CRISI E L'EVOLUZIONE DEL SECOLO XIX

[QUI ANDREBBERO LE DESCRIZIONI DEI FILONI DI CRISI: QUELLA DELLA INTUIZIONE DEL CONTINUO, QUELLA DELLA ESTRAPOLAZIONE DELL'ESPERIENZA, QUELLA DELLA NOZIONE DI EGUAGLIANZA].

1 - Nei Capitoli precedenti abbiamo accennato brevemente ai problemi riguardanti l'oggetto della geometria, al metodo di questa scienza e ad una parte della sua problematica: precisamente quella che si riattacca alla immagine del continuo ed alla sua rappresentazione rigorosa con algoritmi infiniti. Tuttavia, queste questioni rappresentano solo una parte dell'evoluzione che la geometria ha vissuto nell'Ottocento; evoluzione che ha condotto questa scienza a cambiare radicalmente la propria immagine, influendo anche sull'assetto dell'intera matematica; pertanto ci soffermeremo qui ad analizzare questa evoluzione, che mi sembra esemplare per lo scopo che ci interessa. Precisamente cercheremo di far vedere come la geometria, soprattutto in forza dell'evoluzione di cui abbiamo detto, ha cambiato l'aspetto sotto il quale essa si presenta: infatti abbiamo visto che, secondo la visione tradizionale della geometria, si immaginava che questa scienza fosse qualificata dai propri oggetti; ma questa specificazione non poteva essere approfondita in modo valido: quando si cercava di precisare questi oggetti ci si trovava di fronte a varie risposte non molto soddisfacenti; tali infatti non sono le qualifiche tradizionali, che volevano definire la geometria come "scienza della estensione" oppure "scienza dello spazio", oppure "scienza della quantità continua" [RICORDARE LA DEFINIZIONE DI MATEMATICA DI D'ALEMBERT, SULLA ENCICLOPEDIA DI DIDEROT].

La nostra mentalità, dopo secoli di analisi critica dei fondamenti della matematica, non è oggi disposta ad accettare e a dare credito a frasi come quelle riportate, e ciò per varie ragioni: anzitutto per la difficoltà di definire secondo la procedura tradizionale, "per genus et differentiam", i concetti fondamentali, difficoltà di cui abbiamo già detto ampiamente nel Cap. II; ed in secondo luogo perché l'esistenza di varie "geometrie", diverse da quella tradizionale, come le geometrie non-euclidee (alle quali abbiamo accennato nel Cap. III), ha costretto i matematici a lasciar cadere ogni tentativo di ricercare un oggetto della geometria, che potesse servire a qualificare questa scienza; questa procedura può essere valida nel caso di altre scienze, come avviene, e per esempio, quando si cerca di qualificare la fisiologia, o la psicologia sociale. In questi casi infatti si può pensare alla esistenza di un oggetto, avente certe determinate proprietà, tale da poter fondare una conoscenza costruita con concetti e proposizioni coerenti tra loro; e questa coerenza della teoria che si costruisce per conoscere l'oggetto si presume fondata sulla coerenza intima, intrinseca dell'oggetto esistente della conoscenza. Ma nel caso della geometria è stato possibile costruire delle teorie contraddittorie tra loro, come la geometria euclidea e le non-euclidee, e tutte perfettamente legittime, cioè non interiormente contraddittorie. Ora, se esistesse un oggetto, coerente in sé, della geometria, che avesse una natura analoga a quella degli oggetti delle altre scienze che abbiamo nominato, questo oggetto non potrebbe tollerare delle teorie contraddittorie; una di esse sarebbe vera e le altre false. Ma abbiamo osservato ripetutamente che, nel caso della geometria, l'osservazione della realtà materiale non può essere considerata il tribunale di ultima istanza per la scelta di una teoria vera, tra le tante possibili: abbiamo visto infatti (nel Cap. III) che è possibile costruire delle situazioni paradossali, che trovano la loro risposta soltanto nel ragionamento o in particolare nel calcolo.

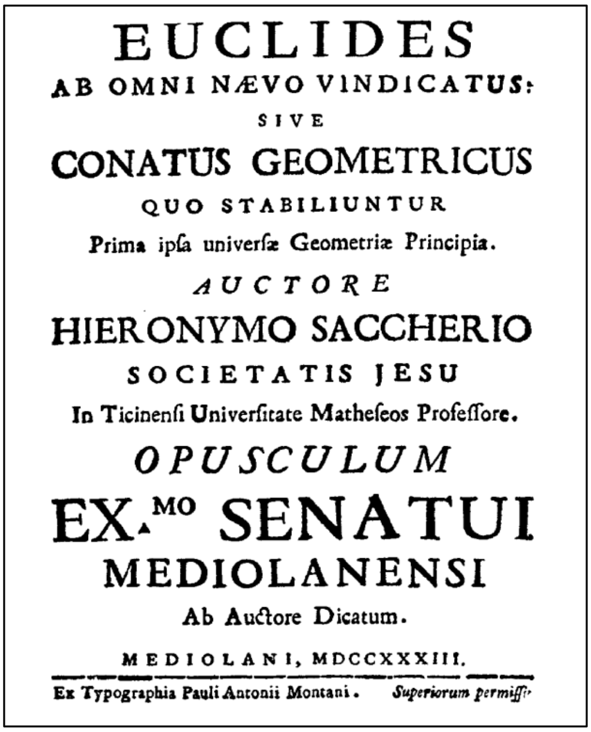
Ciò conferma la differenza specifica della matematica dalle scienze della Natura: infatti l'osservazione della realtà materiale non può mai raggiungere quella esattezza finale e definitiva che è invece l'esigenza fondamentale della conoscenza matematica, ed in particolare di quella geometrica. Occorre quindi cercare in altre direzioni la caratteristica specificante della matematica; ed a questa conclusione si è giunti, come abbiamo detto, attraverso una evoluzione critica che si è svolta in gran parte nel secolo diciannovesimo. Tale evoluzione ha avuto vari episodi salienti, sui quali rifletteremo; tuttavia, prima di iniziare il cammino, osserviamo che presenteremo tali episodi senza rispettarne sempre la scansione cronologica diacronica, e talvolta senza prendere posizione sulla dipendenza causale tra loro. In altre parole, la nostra sarà una presentazione alquanto schematica di una realtà storica che è stata, nei fatti, ben più complicata di quanto non sia possibile esporre nella nostra rassegna, necessariamente sommaria.

Ricordiamo infine che, parlando di "crisi", non intendiamo attribuire a questo termine un significato di fallimento, sconfitta, caduta, come si fa spesso nella stampa: invece intenderemo utilizzare il termine nel senso originario ed etimologico, che fa riferimento al termine greco il quale significa sostanzialmente giudizio; ed è noto che non ogni giudizio è necessariamente negativo, ma richiede invece una analisi, un approfondimento delle ragioni e delle origini. Questo sarà appunto il significato con cui adotteremo il termine di crisi, volendo cioè indicare la ricerca e l'analisi dei fondamenti delle teorie e delle costruzioni concettuali.

2 - Il primo episodio di crisi che vorremmo ricordare potrebbe essere indicato come la crisi della estrapolazione dell'esperienza dall'ambito finito all'infinito; vorremmo considerare come episodio scatenante di questa revisione critica l’invenzione delle geometrie non-euclidee, e soprattutto la dimostrazione della loro coerenza interna, e quindi della loro legittimità, in quanto teorie matematiche. Nel cap. II abbiamo esplicitamente osservato che la natura del quinto postulato di Euclide è chiaramente diversa da quella degli altri: infatti nel postulato si afferma che, se due rette complanari formano con una terza due angoli la cui somma è diversa da due retti, le due rette si incontrano; e di qui si dimostra anche, in forma elementare, che se le due rette formano con la terza due angoli la cui somma vale due rette, le due sono parallele tra loro; cioè, secondo la definizione euclidea, non si incontrano, comunque vengano prolungate all'infinito. In altre parole, col postulato della parallela si afferma il verificarsi di un certo evento (il non incontrarsi di due rette), come conseguenza di un fatto (il verificarsi di certe relazioni di quelle due rette con una terza). Ma si può osservare che la causa (il fatto che due angoli abbiano oppure no una certa somma) fa parte delle cose osservabili e, per così dire, alla portata di un osservatore che sta a distanza finita; invece l'esistenza dell'effetto viene affermata in modo assoluto, e si riferisce a circostanze e fatti che possono essere al di là della portata di ogni osservazione eseguibile.

Pare ragionevole affermare che in questa proposizione si può scorgere un’operazione della fantasia, la quale dilata la portata delle nostre osservazioni, e fonda quindi degli enunciati che non nascono dalla sola astrazione dalla esperienza eseguibile. È noto che già in epoca ellenistica si verificarono dei tentativi di dimostrare tale proposizione, cioè di cambiare la sua natura, da postulato facendola diventare teorema. Si può osservare che tali tentativi testimoniano della convinzione diffusa ed anzi generale tra i matematici sulla validità della proposizione euclidea; e dicendo "validità" si intende indicare l'aderenza della proposizione stessa ad una realtà esistente fuori di noi; beninteso una realtà che era quella dei presunti oggetti della geometria.

Tra i tentativi per la dimostrazione del postulato euclideo vi sono molti esempi di paralogismi; ed ancora oggi vari dilettanti di geometria e di logica si illudono di essere giunti a dimostrare la proposizione, senza accorgersi delle mende delle loro argomentazioni. Tra le dimostrazioni valide alcune sono conseguite enunciando esplicitamente, senza dimostrazione, una proposizione che viene accettata come postulato, in forza di una pretesa maggiore evidenza della proposizione stessa rispetto a quella enunciata da Euclide. In qualche altra trattazione l'Autore segue la stessa strada, ma non è sempre perfettamente cosciente di aver accettato senza dimostrazione una proposizione che egli ritiene evidente: quindi tale proposizione viene utilizzata nel corso della dimostrazione senza che l'Autore si sia curato di enumerarla esplicitamente tra i postulati [1].


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiſſu

http://mathematica.sns.it/opere/128

È noto che queste dimostrazioni hanno messo in luce numerosi postulati equivalenti al postulato di Euclide; tali cioè che il postulato stesso possa essere dedotto rigorosamente come teorema una volta che venga ammessa una di queste proposizioni. [2] Tra queste numerose argomentazioni spicca per originalità quella esposta da G. Saccheri [Girolamo SACCHERI S. J. 1667-1733] nella sua opera intitolata "Euclides ab omni naevo vindicatus", scritta nel 1733 [3]. In questo libro il dotto ed acuto gesuita intraprende, tra l'altro, a dimostrare la proposizione euclidea ragionando per assurdo. Non è questo il luogo per riportare le sue argomentazioni; ci limitiamo ad osservare che la strada scelta dal Saccheri per giungere al proprio fine dimostra da una parte una incrollabile convinzione nella validità obbiettiva della proposizione euclidea, e dall'altra parte testimonia della validità della osservazione che abbiamo ripetuto più volte, asserendo che nell'ambito della matematica la logica ha un posto privilegiato e addirittura fondamentale: in questo caso infatti una tipica procedura logica, come la riduzione all'assurdo, viene adottata per garantire la saldezza dei fondamenti di una dottrina essenziale a tutta la matematica, come era considerata la geometria ai tempi di cui stiamo parlando.

L'originalità della posizione di Saccheri sta anche nel fatto che egli batte una strada del tutto diversa da quella percorsa dagli altri Autori che si sono occupati validamente dell'argomento; egli infatti non sceglie delle proposizioni che giudica più evidenti (cioè più aderenti alla realtà) di quelle scelte da Euclide o da altri Autori, ma si mette in una posizione per cosi dire neutra rispetto alle varie teorie geometriche possibili, ed enuncia tre possibili ipotesi, dalle quali possono discendere varie teorie, o la geometria euclidea classica o altri sistemi geometrici. L'appello all'evidenza sarà da lui fatto più tardi, quando da due delle ipotesi avrà dedotto delle conseguenze che gli appaiono chiaramente assurde. Il fatto che quest'ultima parte dell'argomentazione del Saccheri sia errata non toglie all'Autore il merito di essere stato il primo ad enunciare e dimostrare una successione di proposizioni, rigorosamente concatenate, che partono da ipotesi contrarie al postulato euclideo della parallela (o ad un postulato equivalente).

3 - È noto che sul postulato della parallela si fonda la parte più importante della geometria tradizionale: su di esso si fonda per esempio il teorema il quale afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti; e su di esso si fonda la teoria della similitudine tra figure. Vorremmo tuttavia ricordare che in Euclide si trova dimostrata una proposizione la quale afferma che un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli non adiacenti. Questa proposizione sarebbe superflua, in presenza del teorema che dà la somma degli angoli di un triangolo; infatti da questo teorema si deduce subito che un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti; ed allora si argomenta subito che se l'angolo esterno è uguale alla somma di questi due, esso è chiaramente maggiore di ognuno di essi, perché in questo caso gli addendi sono supposti ovviamente positivi. Ma è interessante osservare che la dimostrazione del teorema dell'angolo esterno è data da Euclide senza ricorso al postulato della parallela, e prima che questo postulato venga utilizzato per calcolare la somma degli angoli interni del triangolo. Si direbbe che Euclide voglia raggiungere tutti i risultati che si possono conseguire senza ricorso al postulato della parallela.

4 - Nella prima metà del secolo diciannovesimo, due matematici, indipendentemente tra loro, costruirono dei sistemi di proposizioni geometriche fondati su postulati che negano il postulato euclideo della parallela [4]; poiché abbiamo visto che il postulato euclideo ha come conseguenza l'unicità della parallela ad una retta per un punto fuori di questa, nei sistemi di proposizioni costruiti in questo modo, da un punto fuori di una retta si possono mandare due parallele diverse ad una medesima retta. Entrambi i due matematici svilupparono i loro sistemi di concetti secondo il metodo classico, cioè senza utilizzazione del linguaggio algebrico; tuttavia venne sviluppata anche una trigonometria non euclidea; cioè dai ragionamenti, fatti con metodo classico e con deduzione verbale, sono anche state dedotte delle conclusioni riguardanti le misure delle lunghezze dei segmenti e le ampiezze degli angoli. Per comprendere il significato di questa operazione concettuale occorre ricordare che l'ordinaria trigonometria si riduce ad essere la traduzione in formule delle relazioni tra gli elementi di un triangolo, in modo tale che, date che siano le misure di certi elementi della figura sufficienti a determinarla (a meno di movimenti rigidi), gli altri elementi possano essere trovati numericamente con calcoli opportuni. La trigonometria ordinaria è fondata sulla geometria euclidea, ed anzi, come abbiamo detto poco sopra, si riduce ad essere una traduzione, con numeri, di certe proposizioni della geometria euclidea. È quindi chiaro che, in una dottrina geometrica che non sia quella euclidea, le procedure per determinare numericamente gli elementi di un triangolo siano diverse, e richiedano calcoli diversi da quelli che si svolgono nel caso euclideo. Quindi, partendo dal metodo classico, di deduzione verbale, si è giunti alla formulazione delle proprietà geometriche con il linguaggio dell'algebra e dell'analisi matematica. Questo fatto sarà il fondamento per il seguito delle ricerche riguardanti la geometria; inoltre questa formulazione delle proprietà geometriche col linguaggio dei numeri permetterà di vedere la geometria classica, euclidea, come caso limite della geometria non euclidea; e viceversa di vedere quest'ultima come una legittima generalizzazione della geometria euclidea.

Tuttavia, la semplice presenza di insiemi di proposizioni che hanno punti di partenza diversi da quelli classici non garantisce sul fatto che questi insiemi siano logicamente validi, cioè esenti da contraddizioni. A ben guardare, anche Saccheri aveva costruito un sistema coerente di proposizioni, ma con la convinzione che i punti di partenza fossero viziati e contradditori con la realtà; ma Saccheri pensava che le contraddizioni non fossero immediatamente visibili all'inizio della sua trattazione; e la sua intenzione era appunto quella di far sì che tali contraddizioni (della cui esistenza egli era certo) ad un certo punto della catena di deduzioni, diventassero clamorosamente evidenti.

Rimaneva pertanto sempre legittimo il dubbio che questi sistemi di proposizioni nascondessero delle contraddizioni, che erano momentaneamente non evidenti, ma che potevano diventare chiaramente evidenti col proseguire delle deduzioni; ed abbiamo visto che le deduzioni possibili da certe proposizioni sono potenzialmente in numero infinito. Un passo fondamentale in questo ordine di idee fu compiuto nella seconda metà del secolo diciannovesimo, con la constatazione della coerenza interna di questi sistemi di proposizioni, e quindi con la dimostrazione della loro legittimità come teorie matematiche.

Il risultato fu ottenuto con un procedimento che è rimasto classico, e che ha avviato un radicale cambiamento della concezione della geometria e dell'intera matematica. Tale procedimento si deve ad E. Beltrami [Eugenio BELTRAMI, 1835-1899] [5]; egli dimostrò che la trigonometria della geometria di Lobačevskij coincide con la trigonometria di certi triangoli tracciati su certe superfici dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale; la superficie di cui si parla è una superficie rotonda, che ha determinate caratteristiche (curvatura di Gauss negativa e costante da punto a punto) e viene chiamata "pseudosfera"; la coincidenza delle trigonometrie si verifica osservando che tre punti (abbastanza vicini tra loro) scelti sulla pseudosfera, determinano un triangolo i cui lati sono segmenti di certe curve speciali della superficie, chiamate "geodetiche". Orbene per le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli di queste figure (chiamate "triangoli geodetici") valgono le stesse formule che reggono le relazioni tra i triangoli della geometria del piano della geometria non-euclidea di Lobačevskij e di Bolyai. Abbiamo quindi delle strutture formali identiche; e questa identità delle strutture formali permette di concludere che gli enti della geometria non-euclidea hanno la stessa coerenza interna che è posseduta dalla superficie pseudosferica su cui abbiamo lavorato.

5 - Vorremmo ritornare sul procedimento seguito da Beltrami per garantire la coerenza logica del sistema geometrico di Lobačevskij; esso consiste nel costruire un modello del piano della geometria non euclidea, con i mezzi della geometria euclidea; tale modello è in certo modo visibile e tangibile [6], quindi reale, almeno della realtà degli enti della geometria; esso è costruito nello spazio tridimensionale euclideo, e quindi si potrebbe dire che la stessa geometria euclidea fornisce gli elementi per garantire la non contraddittorietà della non-euclidea. Naturalmente tale non contraddittorietà non è, come tale, dimostrabile in termini di logica: essa deve essere accettata in base alla constatazione della esistenza di qualche cosa che ubbidisce allo schema logico di cui si sta parlando; e questo "qualche cosa", del quale si constata l'esistenza, viene accettato come non contradditorio in sé. Questa procedura, che fa ricorso ai modelli, porta con sé un modo del tutto nuovo per concepire gli enti della geometria, ed in generale della matematica. In questa concezione il nome che si dà ad un determinato ente (per esempio "retta") non qualifica l'ente stesso: questo è determinato dall'insieme di rapporti che esso ha con gli altri enti, di cui si parla. Ciò avviene per esempio anche nel gioco degli scacchi: il nome di "re", dato ad un certo pezzo che ha una determinata forma, non ne costituisce la definizione; questa invece è fornita dall'insieme delle regole del gioco, le quali stabiliscono il sistema di rapporti che il pezzo stesso ha con gli altri, ai fini del gioco; una cosa analoga si verifica nei giochi delle carte: infatti una determinata carta, per esempio ancora il re, è definita di volta in volta dall'insieme delle regole del gioco che si sta svolgendo.

Nel caso della geometria, il termine "retta" non è sufficiente a definire rigorosamente un determinato ente, fino a quando non si siano date le leggi, quelle che si potrebbero chiamare le "regole del gioco", le quali legano il termine nelle proposizioni che si accettano nella teoria che si sta costruendo. Così nella costruzione di Beltrami viene chiamata "retta" una curva della superficie pseudosferica, di cui abbiamo già detto; tale curva è, nell'immagine euclidea, una geodetica, tuttavia è caratterizzata da due circostanze che caratterizzano pure le rette, in geometria euclidea ed in geometria non-euclidea; la prima è che la geodetica dà il cammino di minima distanza tra due punti (abbastanza vicini) della superficie; la seconda è che tali due punti determinano univocamente una ed una sola retta che li congiunge. [*NdR.* Altre informazioni e illustrazioni si possono trovare all'indirizzo http://mate.unipv.it/~cornalba/lezioni/beltrami.pdf]

Questa procedura logica si avvale anche del calcolo, e di tutta una teoria che è sviluppata in altri capitoli della matematica; pertanto si potrebbe dire, a rigore, che il problema della coerenza logica della geometria non-euclidea non è risolto a fondo con questa procedura, ma soltanto spostato, e caricato, per così dire, sulle spalle di questi altri capitoli. È questo un problema sul quale dovremo ritornare. Provvisoriamente, a questo punto, potremmo dire che la geometria non-euclidea ha lo stesso grado di certezza e di legittimità della euclidea, che fornisce gli strumenti per costruire un modello.

Aggiungiamo qui due osservazioni; la prima è che con la procedura che abbiamo sommariamente descritto si ponevano le basi per rivedere il concetto di definizione degli enti di cui si tratta. Abbiamo già sfiorato l'argomento in precedenza, affermando l'insufficienza delle procedure abituali di definizione quando si tratti degli enti fondamentali della matematica. La procedura che oggi si accetta viene chiamata "definizione implicita" o anche "definizione per assiomi" o "per postulati" o infine "definizione d'uso". Essa si consegue enunciando le proposizioni iniziali (e quindi non dimostrabili) che stabiliscono i rapporti fondamentali dei termini tra loro. Pertanto può accadere che questi sistemi di proposizioni iniziali possano avere diversi contenuti (nel senso intuitivo del termine), ovvero, come si suol dire, che i sistemi di proposizioni iniziali possano avere diversi modelli. Così il sistema di proposizioni iniziali della geometria di Lobačevskij può avere una interpretazione anche sulla superficie della pseudosfera. L'esistenza, accettata o in certo modo accertata, di un modello, viene accettata come garanzia della non contraddittorietà del sistema di proposizioni.

La seconda osservazione è che, a prima vista, la matematica, o in particolare la geometria, potrebbe essere giudicata una dottrina senza presa sul reale, analoga al gioco degli scacchi. Sarebbe quindi giustificata la frase paradossale e provocatoria di B. Russel, secondo la quale «La matematica è una dottrina in cui non si sa di che cosa si parla, e non si sa se ciò che si dice è vero». Effettivamente, la frase, sotto l'aspetto paradossale, non fa che esprimere ciò che abbiamo detto poco fa: infatti un sistema teorico può avere diversi modelli, e quindi il sistema stesso è tale che "non si sa di che cosa si parla", nel senso che, a priori, non ha un unico contenuto e referente reale, ma può averne molti; e "non si sa se ciò che si dice è vero" perché la matematica si interessa del legame logico formale tra premesse e conclusioni, e non tanto della rispondenza delle proprie proposizioni ad un reale supposto da loro indipendente.

Tuttavia noi pensiamo che esista una sostanziale differenza tra la matematica ed un gioco puramente convenzionale, come quello degli scacchi o come i giochi delle carte: noi pensiamo infatti che il primo stimolo alla formazione dei concetti matematici sia dato dall'esperienza, e quindi da un collegamento con il reale sensibile; il fatto che questo legame si allenti e diventi quasi invisibile quando le teorie matematiche si complicano e ingrandiscono non toglie, a nostro parere, il fatto che la matematica sia nata, e rimanga nel suo fondo, una chiave di lettura della realtà, ricercata e costruita per la comprensione di un mondo che è dato e non costruito in modo del tutto arbitrario.

[QUI OCCORRE PARLARE DI B. RIEMANN, E DEL TOTALE CAPOVOLGIMENTO DEL PUNTO DI VISTA, FAVORITO ANCHE DALLA ESISTENZA DELL'APPARATO DI ANALISI MATEMATICA CHE RIEMANN POTÉ FAR FUNZIONARE PER ESPORRE LE SUE NUOVE IDEE.] [PARLARE ANCHE DELLA LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE FORZE, CHE NON VALE IN GEOMETRIA NON EUCLIDEA, NELLA QUALE NON ESISTE PARALLELOGRAMMO].

NdR. Un'interessante bibliografia è disponibile in *La geometria. Problemi logici e didattici*. Scuola e Didattica, 3 (1984), pp. 49-64 (inserto redazionale). Vedere Sito.

[NOTE A FINE DEL CAPITOLO]

[1] Una procedura di questo tipo è seguita per esempio da A. M. Legendre nella sua opera intitolata "Elements de géométrie" [1794] che ebbe molte edizioni e servì per lungo tempo come testo di geometria elementare nelle scuole francesi. Il Legendre per dimostrare la proposizione euclidea della parallela si fonda sui criteri di uguaglianza dei triangoli ed osserva che in un triangolo isoscele l'angolo racchiuso tra i due lati uguali è funzione dei tre lati, e che quindi la sua misura (per esempio in gradi) è una funzione delle lunghezze dei lati stessi; funzione che "evidentemente" (secondo Legendre) non dipende dall'unità di misura scelta per misurare le lunghezze dei lati. Il Legendre non si avvede che con questa ammissione egli accetta la non esistenza di una unità di misura per così dire naturale per le lunghezze, e quindi accetta come evidente il fatto che esistano delle figure tra le quali intercede una relazione di similitudine che non è l'uguaglianza. Da questa ammissione segue facilmente la dimostrazione della proposizione euclidea; ed è noto d'altra parte che in geometria non-euclidea non esistono figure tra loro simili che non siano uguali. Ma l'ammissione, fatta di passaggio durante l'argomentazione, dell'esistenza di coppie di figure simili e non uguali costituisce ovviamente un postulato, il quale, in una trattazione rigorosa, avrebbe dovuto trovare la sua enunciazione esplicita tra i postulati, all'inizio della trattazione. Ciò del resto era stato fatto qualche secolo prima da John Wallis [1616 – 1703].

[2] Tra i tanti possibili postulati equivalenti a quello euclideo ricordiamo: 1) Quello (dovuto a Pappo) il quale afferma che il luogo dei punti di un piano che hanno tutti distanze uguali da una data retta qualunque è ancora una retta. 2) Quello, dovuto a G. Saccheri, che afferma che esiste un triangolo nel quale la somma degli angoli interni è uguale a due retti. Quello, dovuto a G. Bolyai, il quale afferma che, dati tre punti qualsivogliano non allineati, esiste sempre una circonferenza che passa per essi. Quello, dovuto a J. Wallis, il quale afferma che esistono coppie di figure simili ma non uguali fra loro (si veda la nota precedente).

[3] In italiano il titolo suonerebbe "L'Euclide emendato da ogni neo"; ed è interessante osservare che l'abitudine culturale dell'epoca identificava nella designazione l'autore con la sua opera, che era, come abbiamo detto, considerata come paradigmatica del ragionamento matematico; per cui dicendo "L'Euclide" si intendeva indicare l'opera.

[4] Janos BOLYAI (1802-1896) scrisse, in appendice di un'opera del padre Wolfgang un insieme di proposizioni intitolandolo: "Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem". La traduzione libera in italiano suonerebbe: "Appendice <al libro del padre> che mostra una scienza dello spazio assolutamente vera <perché> indipendente dalla verità o falsità dell'assioma XI di Euclide, che non si potrà mai decidere."

Nicola Ivanovich Lobačevskij (1792-1856), scrisse sugli "Annali" dell'Università di Kazan, una serie di contributi il cui titolo, tradotto, suona: "Nuovi principi di geometria, con una teoria completa delle parallele".

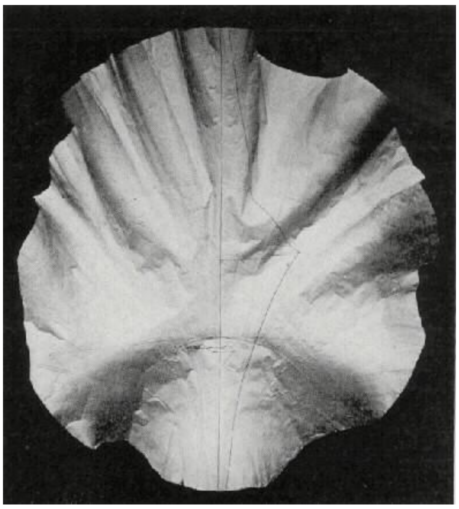
[5] È interessante ricordare che il Beltrami sviluppò le sue ricerche, che lo portarono alle argomentazioni esposte qui sopra, mentre era professore all'Università di Pavia; e nella biblioteca di questa università egli riscoperse l'opera, praticamente dimenticata, di G. Saccheri di cui abbiamo detto sopra. È merito del Beltrami l'aver compreso l'importanza epistemologica dell'opera del dotto Gesuita pavese, e l'aver fatto conoscere questa circostanza alla comunità scientifica internazionale. [*NdR*. E. Beltrami, *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatchewsky*, in *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, V (1889).

….Finally we should mention an important contribution by Beltrami to the history of mathematics. This appears in a 1889 publication in which Beltrami brought to the attention of the mathematical world Saccheri's 1733 study of the parallel postulate. He compared Saccheri's results with those of Borelli, Wallis, Clavius and the non-euclidean geometry of Lobachevsky and Bolyai.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Beltrami.html].

[6] Ricordiamo che il Beltrami costruì anche un modello materiale approssimato di superficie pseudosferica, incollando pazientemente molte strisce di carta opportunamente tagliate. Tale modello si trovava, ancora pochi anni fa, presso l'Istituto matematico dell'Università di Pavia, e credo che vi si trovi tuttora. Esso, quando è ripiegato, assume un aspetto, che giustifica il nome scherzoso di "cuffia della nonna" col quale veniva designato.

[*NdR. Si trovano fotografie della cuffia della nonna all'indirizzo* http://mate.unipv.it/~cornalba/lezioni/beltrami.pdf]



VI – GEOMETRIA. LA CRISI DEL CONCETTO DI UGUAGLIANZA

1 - Nel capitolo II abbiamo riportato le proposizioni che Euclide enuncia per presentare quelle che egli chiama "Nozioni comuni"; in una di queste frasi si parla di "cose uguali", e nel luogo citato abbiamo osservato che questa relazione di "uguaglianza tra cose" deve far riferimento ad un certo insieme di comportamenti, di operazioni, di trasformazioni, che si immagina di poter eseguire, per controllare il sussistere di questa relazione.

Riprendiamo qui il discorso, perché, come si vedrà, esso ha una grande rilevanza per la comprensione del pensiero matematico, ed anche per la comprensione dell'evoluzione storica della matematica, che ha condotto questa scienza al suo aspetto attuale. Riteniamo che sia importante l'analisi che stiamo svolgendo, perché la relazione di uguaglianza si presenta, a prima vista, come del tutto chiara; cioè ci appare come una di quelle relazioni che si constatano a vista, che si vedono, come suol dirsi, immediatamente "ictu oculi", e "prima facie". Tuttavia, una riflessione ulteriore convince che le cose non sono sempre così, e l'evoluzione del pensiero matematico nel secolo diciannovesimo dimostra l'importanza dell'analisi che intendiamo svolgere.

Del resto, come abbiamo detto, anche Euclide parla di "portare a coincidere due cose"; e questo portare a coincidere implica quindi il ricorso ad operazioni concrete, fisiche, che riguardino oggetti materiali. Questo aspetto della questione è stato messo in evidenza anche dalla riflessione di Arthur Schopenhauer [1], il quale ha lamentato il fatto che Euclide faccia riferimento ad operazioni materiali di trasporto, proprio agli inizi di un'opera che dovrebbe rimanere completamente ad un livello ideale. Ma pensiamo che obiezioni di questo tipo possano essere superate se si considera la geometria non come una dottrina completamente ideale ma come una scienza che descrive razionalmente il nostro concreto esistere nell'ambiente spaziale.

2 - In questo ordine di idee si potrebbe giustamente affermare che il concetto di uguaglianza è fondamentale per la geometria, nel senso euclideo del termine; invero nelle primissime proposizioni degli "Elementi" sono dati quelli che, nella trattatistica moderna, vengono chiamati abitualmente i "criteri di uguaglianza dei triangoli". Il primo di questi afferma che, dati due triangoli di vertici rispettivamente A, B, C ed A', B', C', se sussistono le uguaglianze tra le coppie di lati AB ed A'B'; AC ed A'C', e tra i due angoli che hanno rispettivamente i vertici in A ed in A', allora i due triangoli sono uguali. Si tratta quindi di un criterio, cioè di una condizione sufficiente: basta che sussistano le uguaglianze tra quegli elementi dei due triangoli, perché le uguaglianze sussistano tra i triangoli interi; l'argomentazione euclidea fa appello al trasporto, al far coincidere gli elementi; quindi anche la verifica del sussistere delle uguaglianze che sono nominate nelle ipotesi dei criteri si riduce a constatare che i segmenti e gli angoli citati possano essere portati a sovrapporsi. E alla domanda che riguarda le modalità del trasporto si deve rispondere in questo caso che tale modalità è il trasporto rigido.

Si presenta qui un'importante questione, riguardante i fondamenti psicologici sui quali viene costruita la geometria, nel senso elementare del termine. Infatti, se si vuole indagare a fondo sulla questione, ci si avvede presto del pericolo di aggirarsi in un circolo vizioso: perché, o si decide di dare il trasporto rigido come un concetto primitivo, che si rinuncia a definire, oppure ci si illude di definire il trasporto come un'operazione che conserva le figure uguali a sé stesse. E qui nascerebbe il circolo vizioso, perché il trasporto è stato invocato appunto per definire il concetto di uguaglianza. D'altra parte, se si vuole precisare che cosa si intende per oggetto rigido, bisogna limitarsi ad una descrizione, che presenta un oggetto cosiffatto come "duro" e tale da non cambiare sensibilmente di forma quando operino su di esso delle forze quali abitualmente noi possiamo esercitare con il nostro sistema muscolare.

È chiaro che, anche in questo caso, la fantasia costruisce l'immagine di una specie di corpo rigido ideale, che non muta la propria forma in qualunque circostanza. Ma, anche in presenza di questa immagine, il riferimento ad operazioni concrete di trasporto ci sembra non eliminabile. E queste operazioni concrete fanno necessariamente riferimento ad un insieme di sensazioni che chiama in causa il senso del tatto ed anche quell'insieme di informazioni di propriocezione che ci rende consci dei nostri sforzi muscolari, della posizione dei nostri arti in relazione al nostro corpo, e delle sensazioni che ci vengono dal campo gravitazionale terrestre, nel quale siamo immersi.

[1] *N.d.R.* A. Schopenhauer, seconda edizione del *Mondo come volontà e rappresentazione*, 1844. "…..Far appello alla coincidenza significa dunque abbandonare lo spazio puro, che è il solo elemento della geometria, e passare al materiale e all'empirico….."

VII - LA GEOMETRIA. PROBLEMI DELL'ASSIOMATICA

1 - Abbiamo visto nel Cap. II alcuni problemi riguardanti la definizione degli oggetti della geometria; abbiamo anche detto che l'impostazione moderna della geometria risente delle perplessità generate dai tentativi di definire gli oggetti secondo lo schema classico della definizione "per genus et differentiam" che era stata codificata dalla logica classica. Inoltre, abbiamo visto che la crisi del secolo XIX, e soprattutto l'invenzione delle geometrie non-euclidee, ha ormai reso impensabile il progetto di qualificare la geometria come qualificata da certi oggetti, come "lo spazio", oppure "l'estensione", oppure altri, come la "quantità continua".

[CONCETTO DI POSTULATI EQUIVALENTI E QUINDI STORIA DEL POSTULATO EUCLIDEO. QUESTIONI DI INDIPENDENZA, E VERIFICA DIRETTA DELLA PRESA DEI POSTULATI SULLA REALTÀ PERCEPITA].

[NdR C. F. Manara. *L'assiomatica classica e moderna*. Nuova Secondaria, 9, 10 (1992), 37-41.]

A. Mazzotta. *È un lungo cammino….*