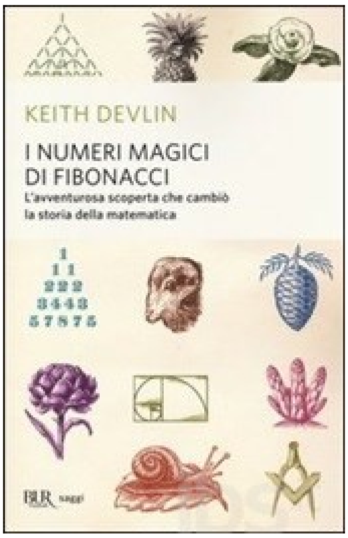
**Leonardo da Vinci. Royal Collection**

Progetto per un articolo sull'empirismo in matematica

Vorremmo presentare nel presente scritto alcuni spunti didattici per insegnanti, allo scopo di fornire loro degli argomenti che possono essere considerati appartenenti alla cosiddetta 'Matematica ricreativa', ma che possono servire come punti di partenza per alcuni esercizi che riteniamo interessanti, e soprattutto per presentare alle scolaresche dei collegamenti inconsueti tra argomenti che appaiono abitualmente tra loro lontani e distaccati. Trarremo occasione da ciò che esporremo per presentare anche qualche considerazione a proposito dell'insegnamento della geometria.

Il punto di partenza per le nostre considerazioni ci sarà dato da un giochetto che viene spesso presentato nei periodici di ricreazione e che dà luogo al fenomeno del cosiddetto 'quadratino che sparisce'; è noto da tempo che questo giochetto e le relazioni matematiche che ad esso si ricollegano è apparentato con la teoria di quelli che vengono tradizionalmente chiamati i 'Numeri di Fibonacci'.

La teoria di questi numeri è nota, ed il loro collegamento con il giochetto geometrico nominato è pure conosciuto da tempo; per informazioni in proposito rimandiamo alla sommaria bibliografia che presentiamo alla fine dell'articolo presente. Pertanto - ripetiamo - ciò che stiamo per esporre non vuole assolutamente avere il carattere di novità; ma gli spunti didattici che questi argomenti possono offrire ai docenti possono essere non del tutto abituali. Come si vedrà, le nozioni richieste per seguire la trattazione non superano i primi elementi della teoria delle equazioni di II grado e delle funzioni trigonometriche elementari. Nel seguito daremo qualche spunto didattico riguardante i numeri di Fibonacci, considerati come soluzioni di una equazione alle differenze finite; poi applicheremo alcune delle proprietà incontrate al problema del quadratino che scompare, ed infine faremo alcune considerazioni a proposito della geometria sperimentale e della teoria geometrica in generale.




**BUR Saggi 2013**

2 - I numeri di Fibonacci rappresentano un interessante esempio di successione definita da una relazione finita tra elementi della successione stessa, ossia da

quella che si suole indicare come una equazione alle differenze finite. Per poter presentare questo nostro punto di vista, possiamo ricercare i fondamenti del concetto di successione e della sua determinazione.

Come è noto, la osservazione della ripetibilità indefinita di atti di pensiero è stata fatta fino dall'antichità; ne è una prova la esistenza dei celebri paradossi di Achille e la tartaruga e del moto, che risalgono alla filosofia eleatica. Se prendiamo in considerazione uno di questi paradossi, per esempio quello detto 'del moto', ci troviamo il germe del concetto di successione, cioè della ripetibilità indefinita del medesimo atto di pensiero che conduce ad una situazione sempre analoga a quella precedente, senza che sia possibile uscirne. Invero nel cosiddetto paradosso del moto si arguisce che non sia possibile andare ad un punto *B* partendo da un determinato punto *A*, perché si deve prima passare da *A* al punto *M* che è medio tra *A* e *B* e qui ci si ritrova con la situazione di partenza, perché è necessario passare attraverso il punto medio tra *M* e *B* e così via......

Nell'ordine di idee che vorremmo considerare qui, ci troviamo di fronte alla possibilità di ripetere indefinitamente un medesimo atto di pensiero, che nella fattispecie si manifesta come il ritrovarsi esattamente in una situazione analoga a quella di partenza, dopo aver eseguito (o dopo aver immaginato di aver eseguito) un determinato atto che a prima vista poteva essere considerato come risolutivo di una determinata situazione. Questa situazione, che era stata intuita dalla filosofia greca, è stata codificata nel concetto moderno di 'successione'.

Prendiamo le mosse da un certo insieme numerico, per esempio l'insieme *Q* dei numeri razionali; allora si può chiamare 'successione' di elementi di *Q* un insieme di elementi di *Q* che sono in corrispondenza biunivoca, cioè sono funzioni, degli elementi dell'insieme $N_0$ dei numeri naturali. In altra forma si potrebbe dire che, considerato l'insieme dei naturali $N_0$ = {0, 1, 2, 3, .. .., *n*, ......}, e data una funzione $\alpha : N_0 \to Q$, si chiama successione l'immagine di $N_0$ per $\alpha$, cioè l'insieme degli elementi di $Q$ che sono le immagini (cioè i corrispondenti degli elementi di $N_0$) per la funzione $\alpha$. Come è noto, l'insieme $\alpha\ (N_0)$ viene indicato con vari simboli, per esempio con le notazioni $a_n$ , oppure singolarmente con l'elenco degli elementi

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\dots, a_n ,\dots\dots$$

Un'ulteriore analisi potrebbe portarci a domandare quale sia il significato della (1); alcune posizioni filosofiche, abbastanza ragionevoli, conducono a negare ogni significato alla (1) all'infuori dei casi in cui ad ogni simbolo $a_n$ sia attribuito un corrispondente significato di operazione concreta che porta a calcolare $a_n$ a partire dal numero intero naturale *n*. Secondo questa concezione, per esempio, la successione dei numeri che corrispondono alla successione di cui si parla nel paradosso del moto è data, in funzione del numero *n* indice dell'ordine, dalla formula $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Tuttavia si può osservare che non ogni successione si può pensare definita da una formula che assegna esplicitamente $a_n$ in funzione del numero d'ordine *n*: è possibile infatti pensare ad una successione indefinita di atti di pensiero che sia determinata in modo che ogni atto di pensiero sia definito da qualche atto di pensiero precedente. In questo ordine di idee pensiamo che uno dei primi esempi (se non il primo in senso assoluto) di procedure di questo genere sia fornito da quelli che vengono abitualmente chiamati i 'Numeri di Fibonacci'. Gli storici riportano che questi numeri furono inventati dal matematico pisano Antonio Begollo detto 'Il Fibonacci' in relazione al problema del calcolo del numero dei discendenti di una coppia di conigli.

Non ci interessa qui dirimere la interessante questione storica che tratta del vero nome di questo acutissimo matematico toscano, a cui va attribuito il merito di aver introdotto nella società occidentale le convenzioni arabo-indiane per la rappresentazione dei numeri interi; il lettore volonteroso può trovare le notizie su un manuale di storia della matematica. A noi interessa considerare la cosiddetta successione di Fibonacci (cioè la successione infinita dei numeri di Fibonacci) dal punto di vista che abbiamo esposto sopra: infatti il matematico pisano definì la sua successione con una legge che lega ogni numero ai due precedenti, semplicemente stabilendo che ogni elemento della successione sia dato dalla somma dei due che lo precedono, e che i primi due elementi siano lo zero e il numero 1 (uno).

Pertanto la successione dei numeri di Fibonacci può essere definita dalle relazioni seguenti. Indicando con *Z(n)* il numero di Fibonacci che corrisponde all'intero naturale *n*, si ha

(2) · $$\begin{cases} Z\,(n+2) = Z\,(n+1) + Z(n) \\ Z(0) = 0\,;\; Z(1) = 1 \end{cases}, \quad n \in N_0$$

È chiaro che le condizioni (2) permettono di calcolare concretamente ogni numero della successione, con un procedimento elementare, che può anche essere facilmente programmato con una piccola calcolatrice tascabile. Tuttavia pare che sia interessante trovare l'espressione esplicita dei numeri *Z(n)* in funzione dell'intero *n*; e questa osservazione porta a considerazioni del tutto elementari a proposito delle cosiddette equazioni alle differenze finite, che si prestano a dare alcuni interessanti spunti didattici. Invero le equazioni (2) definiscono la funzione *Z(n)* sull'insieme *N* attraverso quella che si suole chiamare una 'equazione alle differenze finite' del secondo ordine: infatti la prima delle (2) lega tra loro tre valori degli elementi della successione *Z(n)*, e cioè gli elementi che corrispondono a due successivi intervalli dell'argomento *n*: quello tra *n* ed *(n + 1)* e quello tra *(n + 1)* e *(n + 2)*.

La procedura per risolvere le equazioni (2) è classica: essa conduce a cercare di soddisfare alle equazioni stesse mediante la espressione (*)

(3) $$Z(n) = t^n\,;$$

la sostituzione nella prima delle (2) porta a concludere che *t* deve essere una radice della equazione algebrica di secondo grado

(4) $$t^2 - t - 1 = 0.$$

Indichiamo per comodità con $\alpha$ e $\beta$ le due radici della (4) ponendo quindi:

(5) $$\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \;\;;\;\; \beta = (1 - \sqrt{5})/2\,,$$

con le condizioni ovvie

(6) $$\alpha\beta = -1 \quad ; \quad \alpha + \beta = 1\,.$$

Poiché la prima delle equazioni (2) è lineare, si verifica che anche la funzione di *n*

(7) $$Z(n) = a\,\alpha^n + b\,\beta^n$$

con *a* e *b* costanti soddisfa alla equazione stessa. La seconda e la terza delle condizioni (2) permettono di determinare i valori delle costanti *a* e *b*, e si ottiene quindi in definitiva la espressione esplicita dei numeri della successione di Fibonacci in funzione di *n*:

(8) $$Z(n) = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}\,.$$

Ancora dalle condizioni (6) si traggono due utili relazioni che legano tre numeri di Fibonacci corrispondenti ad interi successivi, e quattro numeri di Fibonacci corrispondenti a quattro interi successivi. Riportiamo qui tali identità, che sono di facile verifica, considerando che, fondandosi sulle (6), si ottiene con semplici passaggi algebrici:

(9) $$\alpha^2 + \beta^2 = 3 \quad ; \quad \alpha^3 + \beta^3 = 4\,.$$

Le identità di cui parlavamo pocanzi sono le seguenti :

(10) , (11) $$\begin{cases} Z(n)\,Z(n+2) - [Z(n+1)]^2 = (-1)^{n+1} \\ Z(n)\,Z(n+3) - Z(n+1)\,Z(n+2) = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

Su queste identità di facile verifica e che non richiedono, per essere dimostrate, che le ordinarie conoscenze di algebra e la utilizzazione delle (6), sono fondate le considerazioni geometriche le quali legano i numeri di Fibonacci ad un noto giochetto di presunta 'sparizione' di una parte di una figura geometrica per decomposizione e ricomposizione di questa. Dedicheremo il prossimo paragrafo a questo interessante giochetto, e qui ci limitiamo ad osservare che i numeri di Fibonacci, in forza delle (10) e (11) forniscono ovviamente infinite soluzioni delle equazioni di analisi indeterminata di secondo grado, che si possono scrivere nella forma seguente:

(12) $$x^2 + xy - y^2 = 1$$

(13) $$x^2 + xy - y^2 = -1$$

Invero, in forza delle (10), la (12) si risolve ponendo

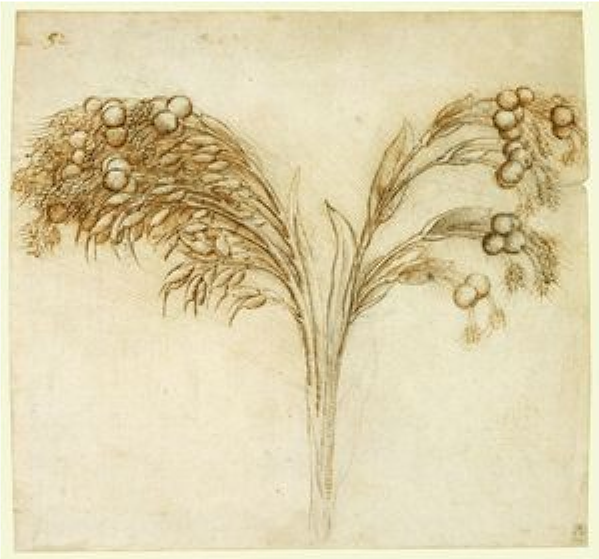
(14) $$x = Z(2m-1),\ y = Z(2m),\quad m \epsilon N,\quad m \geq 1\,,$$

e la (11) ponendo

(15) $$x = Z(2m),\ y = Z(2m+1),\quad m \epsilon N,\quad n \geq 1.$$

Diamo qui di seguito i primi numeri di Fibonacci, sui quali il Lettore potrà verificare direttamente il sussistere delle relazioni che abbiamo scritto sopra. Anche il calcolo di questi numeri può costituire un utile esercizio che il docente può presentare ai discenti nel caso in cui questi posseggano una macchinetta tascabile, meglio se programmabile.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |



**Leonardo da Vinci Royal Collection**

14 aprile 1984

Ndr *Appunti dattiloscritti rieditati, giugno 2015. Il testo è incompleto. Uniamo un secondo breve testo posteriore, che riprende l'argomento*.

(*) C.F. Manara. *Successioni ed equazioni alle differenze finite*. Period. Mat. (4), 41 (1963), 129-160.

**Leonardo da Vinci Royal Collection**

# LIMITI DEL DISEGNO E NUMERI DI FIBONACCI

## 1 - Insidie della cosiddetta geometria pratica.

1. I legami della geometria con l'esperienza sono una delle ragioni per cui la dottrina geometrica è molto importante per la formazione scientifica. E non appare un caso il fatto che il primo trattato rigoroso di scienza che la storia umana ricordi (il trattato degli "Elementi" di Euclide) ha dei contenuti prevalentemente geometrici. È anche ben noto il fatto che la geometria ha sempre utilizzato i disegni, considerati come simboli dei concetti che vengono definiti e che fondano le deduzioni: il disegno suggerisce spesso le procedure di dimostrazione e le strategie di risoluzione dei problemi. A questo proposito scrive M. Marchi: «È necessario che le figure acquistino una loro forma di "concretezza"; è necessario in una parola poter operare su di esse come in una specie di manipolazione ideale e fantastica. Il modo più spontaneo e naturale di ottenere una tale realizzazione concreta è attraverso il disegno. Tale fatto non deve meravigliare, perché il disegno ha un valore suggestivo che richiama alla nostra fantasia quel patrimonio di dati sensoriali che erano presenti alla nostra mente al momento del sorgere stesso del concetto legato alla figura...» [Mario Marchi. Geometria: Verità o verosimile? Nuova Secondaria. N. 9 (15 maggio 1997), anno XIV. pp.81-85].

Ma una corretta pratica didattica ha sempre suggerito all'insegnante colto ed accorto di insistere sul fatto che la sola deduzione rispettosa delle leggi della logica può fondare la validità delle conclusioni. Questo fondamentale concetto è spesso ribadito con la presentazione di vari disegni che provocano illusioni ottiche, o di disegni che vengono chiamati "impossibili". Pare chiaro che le situazioni di apparente disagio [spesso soltanto temporaneo] create dalla vista di questi disegni possono essere superate riflettendo sui meccanismi che la nostra mente mette in opera in occasione della recezione di sensazioni visive; in particolare, nei casi delle cosiddette "figure impossibili", si potrebbe dire che spesso la nostra immaginazione costruisce una interpretazione spaziale delle sensazioni visive ricevute. E la sensazione inquietante nasce dal fatto che le sensazioni ricevute dalle "figure impossibili" non si inquadrano nell'insieme delle ricostruzioni spaziali a cui siamo abituati.

Il fenomeno appare in qualche modo correlativo a quello della grande difficoltà incontrata da alcuni soggetti nell'interpretare in tre dimensioni i disegni in prospettiva, o comunque tracciati in modo da suggerire o facilitare l'immaginazione di una sensazione spaziale. Questa difficoltà non è certo alleviata dall'abitudine, purtroppo diffusa in certa manualistica [anche a livello universitario], di presentare dei disegni che non rispettano i canoni della geometria proiettiva.

Non intendiamo proseguire il cammino in questa direzione, che ci porterebbe a discussioni riguardanti la psicologia. Vorremmo invece riflettere su altri casi di disegni, che sono punti di partenza di certi paralogismi che vengono spesso indicati nei manuali elementari come "sofismi geometrici". Alcuni di questi cosiddetti sofismi partono da disegni volutamente errati o interpretati in forma indebita. Altri invece si fondano su una pretesa "evidenza" del disegno. E l'aspetto istruttivo di questi esempi consiste appunto nella possibilità di superare molti controlli sperimentali; pertanto la spiegazione della situazione paradossale deve necessariamente essere affidata soltanto alla deduzione ed al calcolo. E questa osservazione può forse indurre a riflessioni che possono far da contrappasso ad alcuni atteggiamenti didattici secondo i quali la geometria dovrebbe limitarsi ad essere "pratica" di manipolazione e di esecuzione di disegni.

Un esempio che si incontra spesso viene presentato come il fenomeno della "sparizione del quadratino". Tuttavia di solito viene presentato un solo caso di questo pseudofenomeno; invece, a nostro parere, potrebbe essere molto istruttivo osservare che la classica successione detta "di Fibonacci" offre lo strumento per costruire infiniti esempi di paradossi geometrici. Si ha così la possibilità di arricchire la didattica abituale di un collegamento interessante tra un esempio classico di algoritmo infinito e l'illustrazione geometrica che gli è strettamente collegata.

## 2 - I numeri di Fibonacci

È noto che la successione $\{a(n)\}$ detta "di Fibonacci" è definita dall'equazione alle differenze finite di II ordine:

(1) $a(n+2) = a(n+1) + a(n)\ ;\ n \geq 0;$

scegliendo (come si fa abitualmente) le condizioni iniziali:

(2) $a(0) = 0\ ,\ a(1) = 1,$

si hanno i ben noti valori:

(3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0, | 1, | 1, | 2, |
| 3, | 5, | 8, | 13, |
| 21, | 34, | 55, | 89, |
| 144, | 233, | 377, | 610, |
| 987, | 1597, | 2584, | 4181, |

............................

Posto:

(4) $D(n) = a(n+2) \cdot a(n) - \left(a(n+1)\right)^2,\ \ n > 0, D(n) = \begin{vmatrix} a(n+2) & a(n+1) \\ a(n+1) & a(n) \end{vmatrix},$

si dimostra che si ha:

(5) $(D(n))^2 = (-1)^2.$

Indichiamo infatti con:

(6) $x,\ y,\ x+y,\ x+2y$

una qualunque quaterna di elementi successivi della tabella (3), e poniamo:

(7) $X = x(x+y) - y^2\ ;\ Y = y\,(x+2y) - (x+y)^2\ ;$

si verifica che è:

(8) $X + Y = 0.$

(È immediato vedere che si ha: $\begin{vmatrix} a(n+2) & a(n+1) \\ a(n+1) & a(n) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a(n+1) & a(n) \\ a(n) & a(n-1) \end{vmatrix}$ ).

E la (5) si verifica immediatamente ponendo al posto dei numeri (6) i quattro numeri della prima riga della tabella (3).

## 3 - Il fenomeno del quadratino in più.

Come abbiamo annunciato, le proprietà dei numeri di Fibonacci permettono di costruire a volontà dei casi di situazioni paradossali; situazioni che vengono spesso annunciate con titoli provocanti. Uno di questi, che si legge frequentemente, è: «64 = 65?». La presentazione abituale viene fatta nei termini seguenti.

Si consideri il quadrato di vertici $O, P, Q, R$, costituito da $8 \cdot 8 = 64$ quadratini [fig.1] e lo si suddivida in due triangoli, di vertici *ACR ed OAR*, ed in due trapezi, di vertici $APSB$ e $BSQC$.

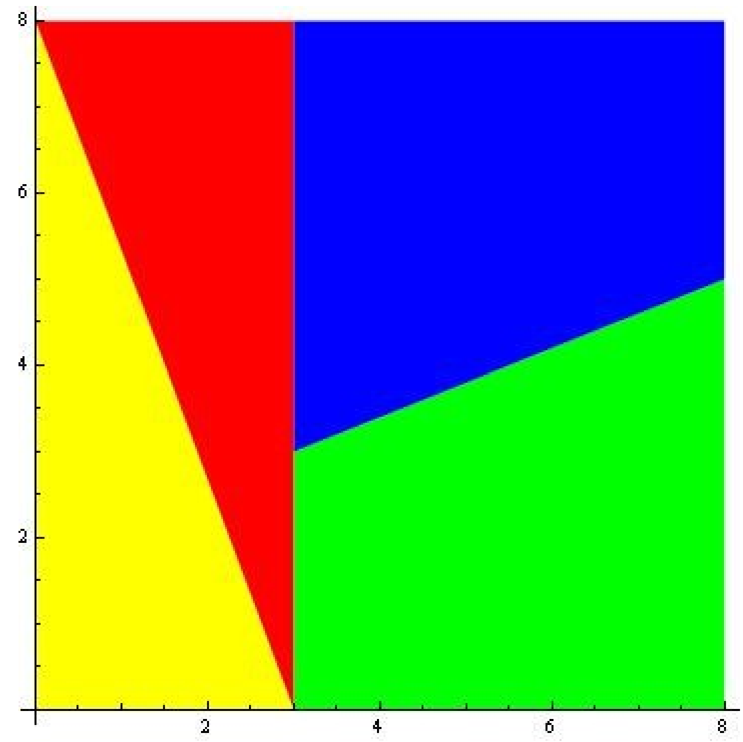


**Figura 1. O(0, 0), A(3, 0), R(0, 8); C (3, 8); P(8, 0), S(8, 5), B(3, 3); Q( 8, 8)**

Assumendo il lato dei quadratini come unità di misura delle lunghezze, risulta evidente dal disegno che si ha:

(9) $$OA = CR = AB = SQ = 3\,;\ AP = PS = QC = CB = 5.$$

Immaginiamo ora di accostare il triangolo di vertici $OAR$ al primo dei trapezi [quello di vertici $APSB$], come risulta dalla fig. 2.

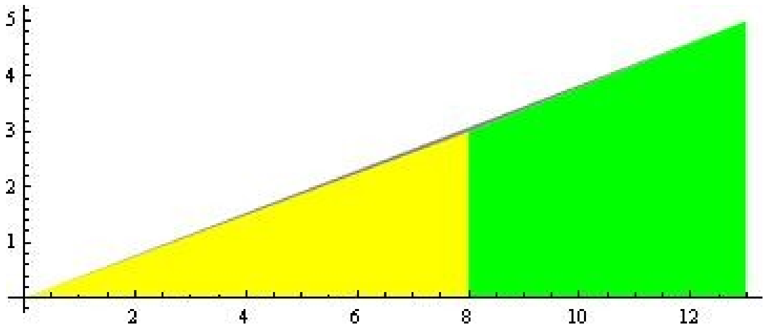


**Figura 2**

Si ottiene così una figura che ha tutta l'aria di essere un triangolo rettangolo, i cui lati sono:

(10) $$AP = 8 + 5 = 13\,;\ PS = 5,$$

e che è sensibilmente uguale alla metà di un rettangolo di area $5 \cdot 13 = 65$. Dunque i 64 quadratini originari sono "diventati" 65 con la decomposizione e la successiva ricomposizione dei pezzi!!

La facile soluzione dell'apparente paradosso si fonda sull'osservazione che i tre punti $O$, $A$, $S$ della fig.2 non sono allineati, e quindi la figura costruita non è un triangolo rettangolo, ma un quadrangolo concavo. La cosa è verificabile sperimentalmente senza difficoltà gravi, anche solo eseguendo un disegno accurato. La conferma rigorosa si ottiene osservando che la tangente dell'angolo $AOR$ vale $3/8$ , mentre la tangente dell'angolo $SOR$ vale $2/5$.

Con calcoli elementari di trigonometria, che non stiamo a riprodurre, si giunge a valutare l'angolo tra le due rette, che è di poco superiore ad 1 grado (sessagesimale) e 15 primi.

Si può ora osservare che la verifica sperimentale di cui abbiamo detto poco sopra può essere resa sempre più difficile quando si scelgano, per la decomposizione del quadrato, dei triangoli e dei trapezi le cui dimensioni sono fornite dalle righe della tabella (3) successive alla prima. Per esempio, scegliendo i numeri della quarta riga, si avrebbero un quadrato ed un rettangolo la cui aree sono date rispettivamente da:

(12) $377^2 = 142129$ e $233 \cdot 610 = 142130$.

In questo esempio la differenza delle tangenti degli angoli è dell'ordine di $1{,}14 \cdot 10^{-5}$. Ed è forte a questo punto la tentazione di dire che "praticamente" in questo caso il triangolo rettangolo "è la metà" del rettangolo.

27 maggio 1997

NOTA . Paradossi della decomposizione ' ad occhio' ovvero

64 = 65 !!!!

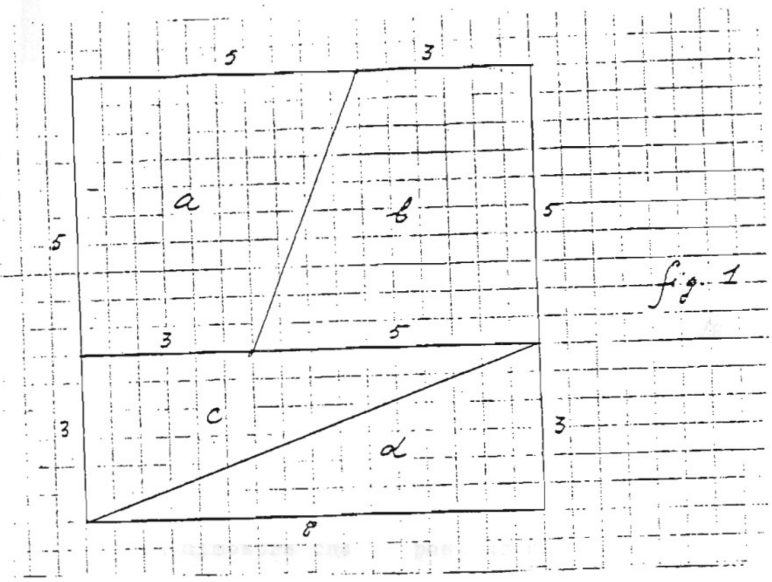



fig. 1

Il quadrato della figura 1 viene decomposto in 4 parti: a,b,c,d, le cui dimensioni sono date in figura. Esso ha chiaramente area uguale ad $8^2 = 64$ . Le parti vengono riarrangiate

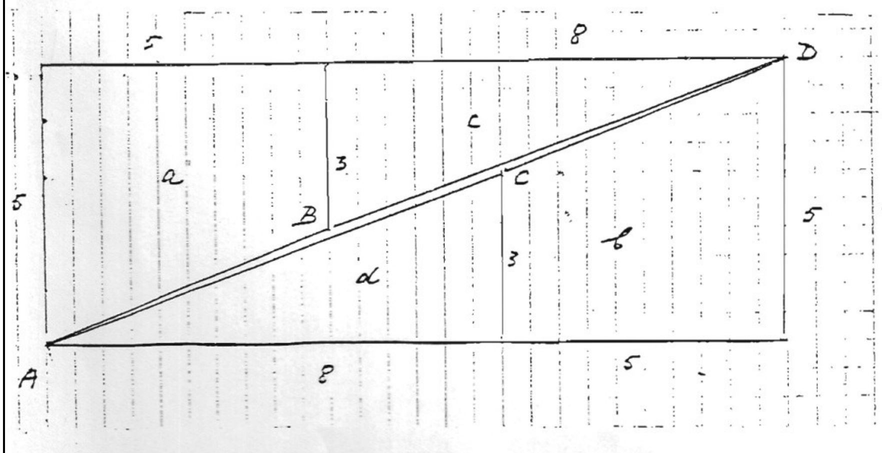



fig 2

come in figura 2 , dando un rettangolo i cui lati misurano 13 e 5 rispettivamente, e quindi ha area uguale a 13x5 = 65 !!

La soluzione del paradosso è data dalla osservazione che nella figura 2 i punti notati A,B,C,D non sono allineati, anzi sono i vertici di un parallelogrammo, che ha area esattamente uguale ad 1. Indipendentemente dalla precisione della figura, il fatto può essere verificato in modo elementare calcolando le pendenze delle rette AB, AD (non segnata in figura per non complicare il disegno) ed AC.
Esse valgono rispettivamente 2/5, 5/13, 3/8 e si ha immediatamente

$$2/5 > 5/13 \ngtr 3/8 \;.$$

Si dimostra che si possono costruire infiniti altri esempi, nei quali, cambiando le misure, si rende sempre più difficile verificare 'ad occhio' che i quattro punti A,B,C,D non sono allineati. Pertanto soltanto il ragionamento (in questo caso il calcolo delle pendenze) permette di risolvere il paradosso.

*Dattiloscritto reimpaginato giugno 2015*