Reimpaginato da file, febbraio 2014

Lettera al Direttore.

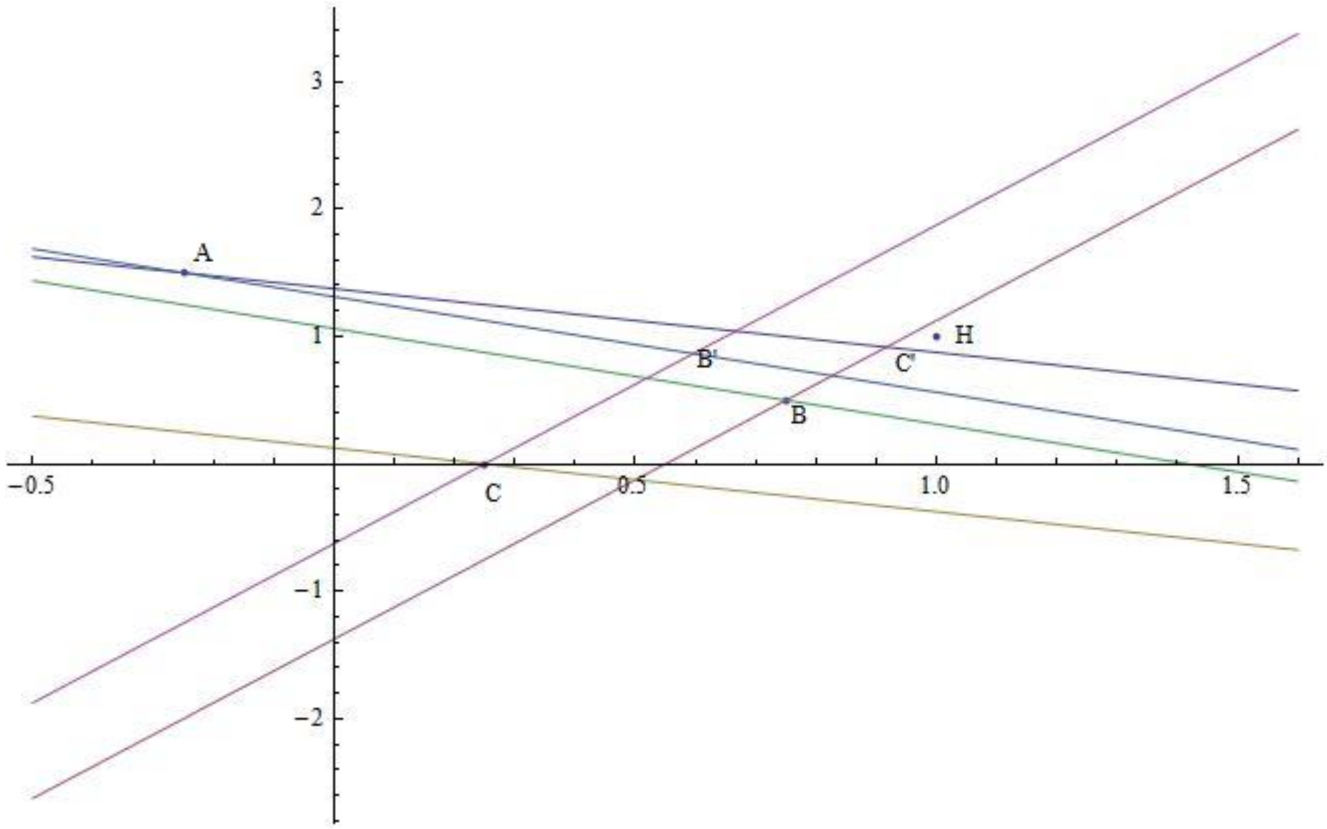
“L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate”

Nel Vol.22B, N. 2 (aprile 1999) della Rivista “L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate”, a pag. 183 et sqq., sono comparse alcune pregevoli soluzioni di un quesito apparso a pag. 386 dell’agosto 1998 (problema 08-2). A pag. 186, in chiusura dell’esposizione delle soluzioni, si leggono le parole: *“Naturalmente restiamo in attesa di una dimostrazione per via sintetica: se qualcuno riuscirà a trovarla la pubblicheremo.”* In presenza di un invito così cortese, mi permetto di presentare alcune considerazioni sul quesito, che riporto qui, per comodità dell’eventuale Lettore:

Testo del problema. È dato il triangolo *ABC* ed il punto libero *H* sul piano. Si consideri il lato *AB* si costruisca il punto *C’* tale che il triangolo *ABC’* abbia *H* come ortocentro. In modo analogo si costruiscano i punti *A’* e *B’*. Dimostrare che i due triangoli *ABC* ed *A’B’C’* hanno la stessa area.

Costruisco il punto *C’* come intersezione delle due rette seguenti: la perpendicolare per *A* alla retta <*BH*> e la perpendicolare per *B* alla retta <*AH*>. In modo analogo costruisco anche *A’* e *B’*.

OSSERVAZIONE 1. Analizzando le operazioni che si eseguono per costruire il triangolo *A’B’C’* si può osservare che le rette <*AB’*> ed <*A’B*> sono parallele tra loro, poiché sono entrambe perpendicolari alla retta <*HC*>. Analogamente si osserva che sono parallele tra loro le coppie di rette <*BC’*> e <*B’C*>, <*CA’*> e <*C’A*>.



Ciò conduce a pensare che la dimostrazione richiesta possa essere conseguita facendo riferimento ad un ambito più vasto di quello della geometria euclidea, e precisamente a quello della geometria affine. Infatti, operando sul piano una trasformazione affine, coppie di rette parallele tra loro rimangono tali, e coppie di aree uguali rimangono tali, anche se le relazioni di perpendicolarità possono andare perdute. Pertanto il problema proposto potrebbe essere risolto sulla base di un teorema appartenente alla geometria affine, teorema che, per esempio, potrebbe essere enunciato nel modo seguente:

Siano dati in un piano due triangoli *ABC* ed *A'B'C'*, in posizione tale che siano tra loro parallele le coppie di rette:

(1) <*AB'*> ed <*A'B*> ; <*BC'*> e <*B'C*> ; <*CA'*> e <*C'A*>.

I due triangoli hanno aree uguali. (Cfr. fig. 1)

Un cenno sommario di una possibile procedura di dimostrazione potrebbe essere il seguente: indichiamo con *O* il punto di intersezione tra le rette <*AB'*> e <*BC'*>, analogamente indichiamo con *Q* il punto di intersezione tra le rette <*BC'*> e <*CA'*> e con *P* il punto di intersezione tra le rette <*CA'*> e <*AB'*>. Allora l'area del triangolo di vertici *A*, *B*, *C* si ottiene sottraendo da quella del triangolo di vertici *O*, *P*, *Q* le aree dei tre triangoli seguenti: quello di vertici *O*, *A*, *B*, quello di vertici *P*, *C*, *A* e quello di vertici *Q*, *B*, *C*. Analogamente l'area del triangolo di vertici *A', B', C'* si ottiene sottraendo dall'area del triangolo di vertici *O*, *P*, *Q* le aree dei tre triangoli seguenti: quello di vertici *O, B', C'*, quello di vertici *P, A', B'* e quello di vertici *Q, C', A'*.

La determinazione delle aree dei sei triangoli suddetti non offre difficoltà concettuali; per esempio possiamo ricordare ciò che è stato detto sopra, e cioè che le trasformazioni affini non alterano le relazioni di parallelismo né i rapporti tra le aree.

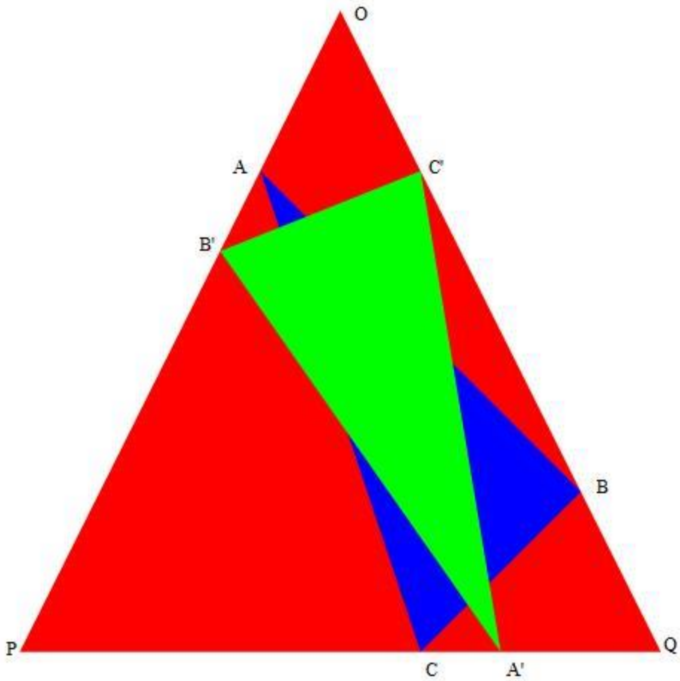


Figura 1. I punti sono: O = (0, 2), P = (-1, 0), Q = (1, 0); A = (-1/4, 3/2), B = (3/4, 1/2), C = (1/4, 0); A' = (1/2, 0), B'=(-3/8, 5/4), C' = (1/4, 3/2).

Possiamo quindi supporre che, per nostra comodità, con una trasformazione affine il triangolo di vertici *O*, *P*, *Q* sia trasformato in modo che l'angolo in *O* sia retto ed i due segmenti *OP* ed *OQ* abbiano lunghezze uguali (Cfr. Fig. 2); in queste condizioni la verifica dell'uguaglianza delle aree dei triangoli che ci interessano risulta facile, e pertanto non la riportiamo qui. Ci limitiamo a ripetere ancora che questa verifica, che a prima vista appare relativa ad un caso del tutto particolare, ha valore generale in forza delle considerazioni ripetutamente svolte sulla invarianza di certe proprietà della figure in seguito a trasformazioni affini.

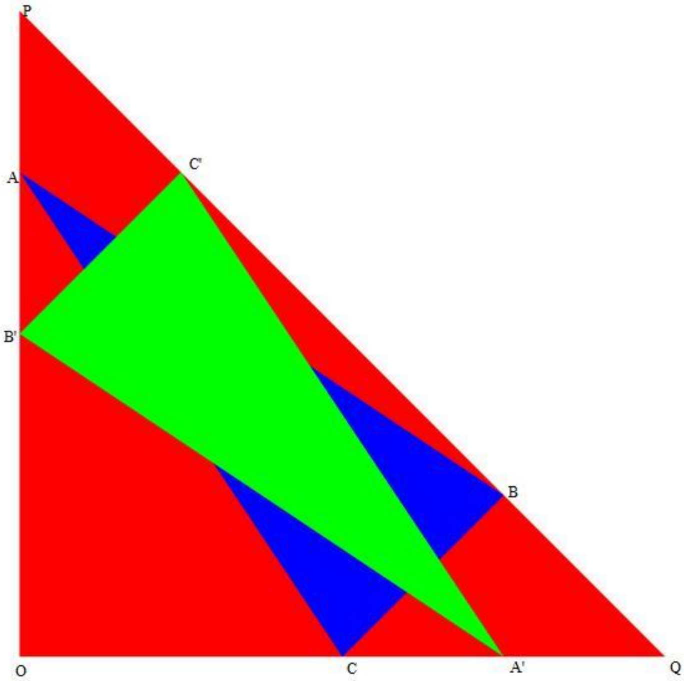


Figura 2. I punti sono: O = (0, 0), P = (0, 1), Q = (1, 0); A = (0, 3/4), B = (3/4, 1/4), C = (1/2, 0); A’ = (3/4, 0), B’ = (0, 1/2), C’ = (1/4, 3/4).

OSSERVAZIONE 2. Qualora si accetti di estendere ulteriormente l’ambito delle considerazioni che conducono alla soluzione del problema proposto, si può immaginare di ampliare il piano affine in un piano proiettivo. L’inverso di un classico teorema di B. Pascal (*) permette di accertare che, in forza delle ipotesi (1), l’esagono semplice i cui vertici sono, nell’ordine:

(2) *A, B’, C, A’, B, C’*

ha i suoi vertici su una conica, che indicheremo con *Γ*, (Cfr. fig. 3) e che la retta impropria (retta all’infinito) del piano risulta essere la “Retta di Pascal” dell’esagono stesso.

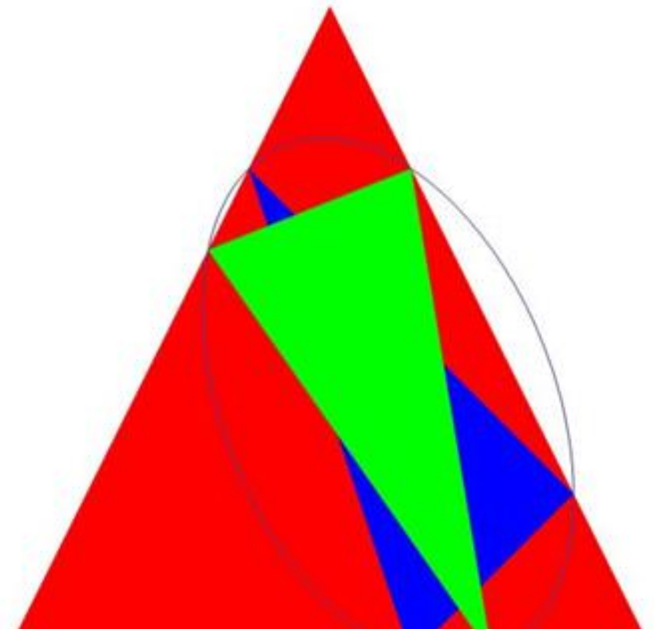


Figura 3. La conica Γ per i punti *A, B’, C, A’, B, C’* della fig.1.

Sempre in base a considerazioni abbastanza elementari nell'ambito scelto, si ha che esiste una unica e ben determinata omografia del piano su se stesso che porta la Γ in sé , facendo corrispondere i tre punti *A*, *B*, *C* rispettivamente ai tre punti *A', B', C'*. Tale omografia porta in se stessa la retta impropria del piano ed è quindi una affinità. Si verifica poi con facilità che tale affinità, nelle ipotesi poste, conserva le aree.
(*Aprile 1999*)

C. F. Manara

NdR.
(*) (Da Wikipedia)
Siano A1, A2, A3, A4, A5, A6 sei punti nel piano e siano B1, B2, B3 i punti comuni, rispettivamente, alle rette A1-A2 e A4-A5, alle rette A2-A3 e A5-A6, alle rette A3-A4 e A6-A1.
I sei punti iniziali appartengono ad una conica se, e soltanto se, i tre punti B1, B2, B3 appartengono ad una retta, chiamata **retta di Pascal**.