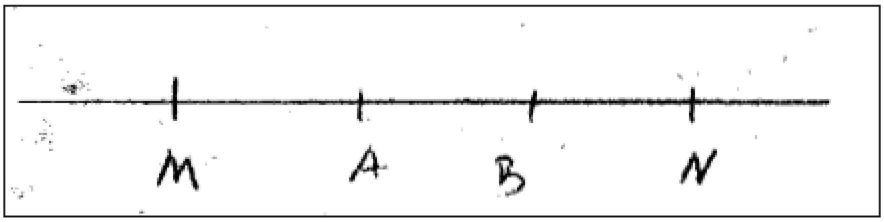
SULLA NON DIMOSTRABILITÀ DEL POSTULATO EUCLIDEO DELLE PARALLELE.

IMMAGINE PROIETTIVA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA.

Abbiamo visto qualche esempio di Postulati che possono essere sostituiti al Postulato euclideo della unicità della parallela e qualche esempio delle proposizioni che si possono dedurre per via elementare quando si lasci cadere questo Postulato. Vogliamo ora garantire che il sistema delle proposizioni che si possono così dedurre sarà esente da contraddizioni, che cioè è compatibile, per esempio, il sistema formato dai Postulati di Hilbert del I, II, III e V gruppo e dalla negazione del postulato di unicità della parallela. In tal modo avremo dimostrato che quest'ultimo è indipendente dagli altri, perché se non lo fosse l'affermare gli altri equivarrebbe ad affermare implicitamente anche il Postulato della Parallela, e quindi saremmo condotti ad un assurdo se affermassimo gli altri negando questo.
Giungeremo allo scopo cercando una "immagine" della Geometria non euclidea, cioè trovando degli enti che realizzano gli enti della Geometria stessa. Ci limiteremo al caso degli enti della Geometria piana e supporremo che sia data la Geometria Euclidea: in tal modo la validità della Euclidea porterà con sé anche la validità della non euclidea, perché nella prima si può trovare una immagine della seconda. Ci serviremo dei concetti della Geometria Projettiva.
Consideriamo una punteggiata r e fissiamo su di essa una coppia di punti M e N che diremo *coppia assoluto* sulla r. Consideriamo ora due punti A e B che appartengono allo stesso segmento della r (tra i due determinati sulla r stessa dalla coppia assoluto) e definiamo "distanza dei due punti " nel modo seguente:



(1) $dist\ (AB) = k\ \log\ (MNAB)$, essendo k una costante reale.

Questa definizione (del tutto arbitraria) è giustificata dal fatto che la distanza, anche nella accezione abituale del termine, è un invariante numerico della coppia di punti relativo ad un certo gruppo di trasformazioni; per esempio (per rimanere sulla retta) la distanza di due punti A, B è un numero che risulta invariante di fronte al gruppo delle traslazioni della retta, cioè alle proiettività della retta in sé che sono paraboliche, avendo l'unico punto unito all'infinito.

Tale gruppo è un gruppo semplicemente infinito di proiettività tutte permutabili tra loro, ognuna delle quali è determinata dalla condizione di portare un punto A in un determinato punto A'. Nel caso della definizione da noi data si tratta ancora di un gruppo semplicemente infinito di proiettività tutte permutabili tra loro, proiettività che in questo caso sono iperboliche ed hanno per punti uniti M ed N. Se fissiamo un sistema di coordinate ascisse sulla retta e poniamo m ed n le ascisse dei punti M ed N rispettivamente, si ha che tutte le proiettività suddette hanno l'espressione

$$(2) \quad \frac{x' - m}{x' - n} = h\,\frac{x - m}{x - n}\,.$$

Abbiamo anche qui che esse sono (come abbiamo annunciato) tutte permutabili ed ognuna di esse è determinata dalla condizione di portare un punto A in un determinato punto A'.

Consideriamo ora il punto A come fisso ed immaginiamo variabile il punto B. Si verifica immediatamente che qualora il punto B tenda ad uno dei punti M o N che costituiscono la coppia assoluto la distanza da noi definita tende all'infinito. Quando poi il punto B cade nell'altro dei due segmenti determinati sulla retta dai punti dell'assoluto il birapporto ($MNAB$) diviene negativo e quindi la distanza non risulta più reale. Si può esprimere in altre parole lo stesso fatto dicendo che la definizione da noi data di distanza viene ad introdurre sulla retta due punti a distanza infinita (punti che chiameremo *punti impropri* della retta) e dei punti non raggiungibili - se vogliamo rimanere nel campo dei numeri reali; chiameremo questi punti *punti ideali* della retta. Si noti poi che lo scambio dei due punti M ed N tra loro porta a scambiare il birapporto nel suo reciproco e di conseguenza il log nel suo contrario: le distanze cambiano di conseguenza segno e pertanto la scelta di un ordinamento, per i due punti M ed N, equivale alla scelta di una orientazione sulla retta r. Diremo che con le convenzioni stabilite abbiamo fissato una “metrica proiettiva” sulla retta.

Dal punto di vista analitico, sempre avendo stabilito sulla r un sistema di ascisse, possiamo pensare la coppia assoluto determinata dalla equazione

$$(3)\ \ a\,x^2 + 2bx + c = 0\ ,$$

e indichiamo semplicemente con $\gamma(x)$ il polinomio quadratico che è a primo membro della equazione (3). Indichiamo con x ed y le coordinate di A e B rispettivamente, e consideriamo un punto qualunque P della retta; ponendo

$$(4)\ \ (ABP) = t$$

abbiamo che l’ascissa p di P si può esprimere in funzione di x, y e t nel modo seguente:

$$(5)\ \ p = (x - ty)/(1 - t).$$

In particolare le ascisse dei due punti M ed N corrisponderanno a quei valori di t che sono radici dell’equazione

$$(6)\ \ \gamma\left(\frac{x-ty}{1-t}\right) = 0.$$

Poniamo

$$(7)\ \ (ABM) = t_1\ ,\ (ABN) = t_2\ ;$$

allora è

$$(8)\ \ (MNAB) = (ABMN) = (ABM)/(ABN) = \frac{t_1}{t_2}\,.$$

Ora esplicitando l’equazione (6) si ottiene

$$(9)\ t^2\,\gamma(y) - 2t\,\gamma(x|y) + \gamma(x) = 0\ ,$$

dove è stato indicato con il simbolo $\gamma(x|y)$ il cosiddetto *polinomio polare*, cioè il polinomio

$$(10)\ \gamma(x|y) = a\,x\,y + b\,(x+y) + c\,.$$

Con calcoli immediati si ottiene

$$(11)\ \ \Delta = [\gamma(x|y)]^2 - \gamma(x)\cdot\gamma(y) = (y-x)^2\cdot(b^2 - ac) = (y-x)^2\ \Delta_0,$$

avendo chiamato per brevità Δ_0 il discriminante della (3); e quindi

$$(12)\ \ \frac{t_1}{t_2} = \frac{\gamma(x|y)+(y-x)\sqrt{\Delta_0}}{\gamma(x|y)-(y-x)\sqrt{\Delta_0}} = 1 + 2\,\frac{\sqrt{\Delta_0}\,(y-x)}{\gamma(x|y)-(y-x)\sqrt{\Delta_0}}\,.$$

In definitiva quindi:

$$(13)\ \ dist(AB) = k\ \log\left(1 + 2\,\frac{(y-x)\sqrt{\Delta_0}}{\gamma(x|y)-(y-x)\sqrt{\Delta_0}}\right)$$

La formula (13) è di particolare interesse in quanto permette di verificare che cosa avviene quando i punti M ed N tendono a coincidere; si ha allora che Δ_0 tende a zero e quindi la distanza data dalla (13) tende a zero, qualunque sia la coppia x ed y, se il fattore k viene tenuto costante.

Diremo che col tendere a zero del discriminante Δ_0 la metrica proiettiva degenera. Si può tuttavia evitare che la distanza tenda allo zero per tutte le coppie A e B facendo variare in modo opportuno il fattore k; ciò ha particolare interesse quando tenda a zero il discriminante Δ_0 ed insieme tendano a zero i coefficienti a e b della (3); si ha allora che le proiettività *iperboliche* considerate poco fa tendono alle proiettività *paraboliche* che hanno l'unico punto unito coincidente con il punto improprio della retta. E che danno origine alla abituale nozione di distanza, come abbiamo osservato. In questo caso si ha anche che $\gamma(x|y)$ tende alla costante c; supponiamo dunque di far variare i1 moltiplicatore k in modo che si abbia:

$$(14)\ \lim_{\Delta_0\to 0}\ k\sqrt{\Delta_0} = h\ ,$$

(essendo h una costante arbitraria diversa da zero); supponendo che nella (13) (fissati che siano x ed y) sia Δ_0 così piccolo che si possa sviluppare in serie il logaritmo, si ha (in questo caso):

$$(15)\ \lim_{\Delta_0\to 0}\ dist\ (AB) = \ lim\ \frac{2}{c}(y-x)\ k\ \sqrt{\Delta_0} = \frac{2h}{c}\ (y-x)\,.$$

Si ottiene di qui che la ordinaria definizione di distanza, che si basa sul gruppo di proiettività paraboliche particolari di cui abbiamo parlato, si può considerare come ottenuta mediante un opportuno passaggio al limite da una metrica proiettiva. Diremo pertanto che la maniera abituale per misurare le distanze sulla retta dà una *metrica parabolica*.

Una immediata generalizzazione della trattazione precedente si ha nel caso in cui l'equazione $\gamma(x) = 0$ ammetta radici immaginario - coniugate; allora il birapporto in (1) assume un valore immaginario puro. Si ha infatti, avendo posto $n + im = \ e^{i\vartheta}$, l'uguaglianza $\frac{n+im}{n-im} = e^{2i\vartheta}$, essendo ϑ = arctg (m/n), oppure ϑ = arcos $(m/\sqrt{m^2+\ n^2})$.

Quindi in questo caso, assumendo il coefficiente moltiplicativo uguale a $\frac{h}{2i}$ con h numero reale, si ha ancora che il numero $\frac{h}{2i}\log\frac{n+im}{n-im}$ è reale.

Una metrica così fatta viene chiamata *metrica proiettiva ellittica* e viene usata abitualmente nella misura degli angoli. Invero si ponga

$$(16)\ \ \gamma(x) = x^2 +\ 1 = 0\ ;$$

si ha in particolare $\Delta_0 = -1$, e quindi, per i due elementi $x = 0$ e y, si ha $\gamma\ (x|y) = 1$, e di conseguenza

$$(17)\ dist\ (0, y) = \frac{h}{2i}\log\frac{n+im}{n-im} = h \text{ artg } \vartheta\ .$$

Ponendo h = 1 ed interpretando x e y come coordinate tangenti nel fascio si ha quindi l'abituale misura degli angoli, come avevamo annunciato.

La formula (17) coincide sostanzialmente con la ben nota *Formula di Laguerre*, che viene abitualmente dimostrata nelle trattazioni elementari per far rientrare la Geometria Elementare nella Proiettiva.

Come è ovvio, quando sulla forma è stabilita una metrica ellittica, non esistono elementi impropri e non esistono elementi ideali: la forma viene ad avere estensione finita, come accade per il fascio di rette nella abituale metrica angolare.

METRICA PROIETTIVA NEL PIANO.

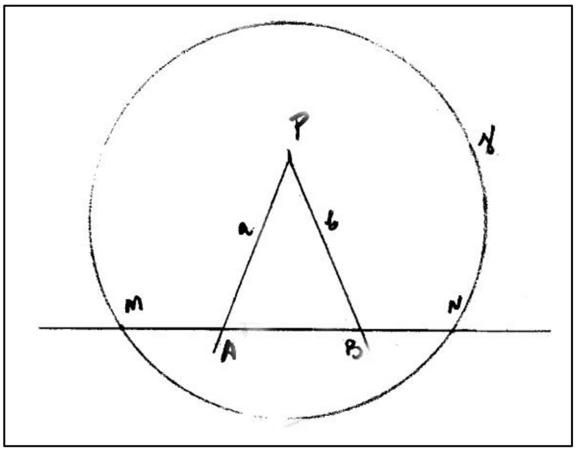
Le cose dette permettono di impostare anche la trattazione di una metrica proiettiva sulle forme di seconda specie. Tratteremo molto brevemente il caso del piano punteggiato. Supponiamo che sia data nel piano una conica a punti reali γ, per esempio per fissare le idee una circonferenza

$$(1)\ \ \gamma\ (x, y) = \ x^2 +\ y^2 -\ r^2 = 0.$$

Consideriamo come punti i soli punti interni alla γ e conveniamo di misurare la distanza tra due punti A e B mediante la metrica proiettiva determinata sulla retta AB dalla coppia di punti M, N intersezioni della γ con la retta stessa. Poniamo cioè

$$(2)\ \ dist(A, B) = \ k\log(MNAB), \text{ essendo k una costante reale.}$$

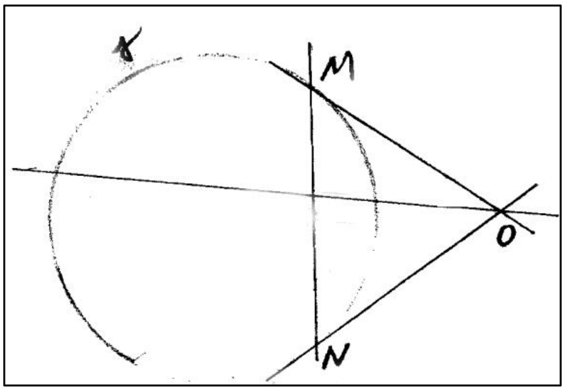
Analogamente, considerato un punto P (cioè, in base alle nostre convenzioni, un punto interno) e due rette a e b per esso, consideriamo le due tangenti alla γ per P, cioè i due elementi della γ - considerata come inviluppo - appartenenti



al fascio P e definiamo l'angolo delle due rette a e b con la metrica ellittica determinata nel fascio da tali due rette. Ci riserviamo di determinare in modo opportuno la costante moltiplicativa h, logaritmo del birapporto in questo caso. Chiamando piano l'insieme di tutti i punti, cioè l'insieme dei punti interni alla conica γ, si può verificare che nel piano sono soddisfatti tutti i Postulati dei gruppi I, II, III, V di Hilbert, almeno quelli riguardanti il piano; inoltre nel piano esiste un insieme di punti impropri, dato dalla conica γ ed un insieme di punti ideali, dato dai punti esterni alla γ.

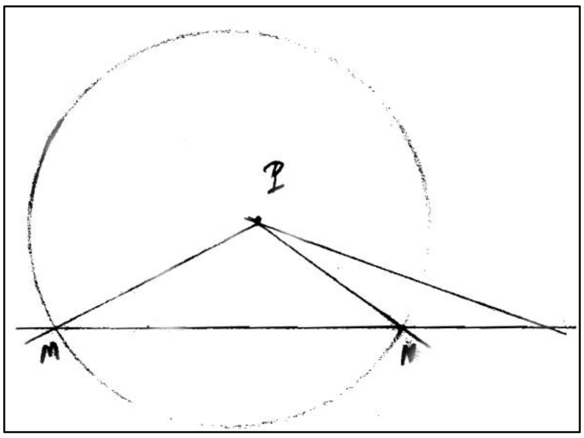
I "Movimenti" nel nostro piano sono le trasformazioni che mutano in sé la conica γ, che viene chiamata *conica assoluto* della metrica iperbolica piana, e che non alterano la distanza tra due punti definita dalla (2) e la metrica angolare. Quindi i movimenti sono le omografie che mutano in sé la conica assoluto. Tra i movimenti vi sono in particolare i ribaltamenti, cioè le omologie armoniche che tengono fermi tutti i punti di una retta passante per due punti M ed N della conica e di conseguenza tutte le rette passanti per il polo *0* di essa.

Definiremo *perpendicolari* alla retta *MN* tutte quelle che passano per il polo *0* di essa, cioè quelle che sono invarianti per i ribaltamenti aventi *MN* come retta di punti uniti. In base al teorema di reciprocità si ha immediatamente che rette



perpendicolari sono rette coniugate rispetto alla conica assoluto; sceglieremo quindi la costante reale h della metrica ellittica subordinata dalla conica γ su ogni fascio in modo che la misura dell'angolo formato da due rette coniugate rispetto alla conica assoluto sia $\pi/2$. In tal modo l'intero angolo giro avrà misura 2π, come è il caso abituale.

Altri movimenti particolari sono le traslazioni della retta *MN* su sé stessa: esse sono le omografie che subordinano sulla γ le proiettività iperboliche aventi M ed N come punti uniti; ovviamente tutte le traslazioni cosiffatte mutano perpendicolari alla *MN* in rette che sono ancora perpendicolari. Consideriamo ora nel piano una retta *MN* ed un punto P fuori di essa; si verifica immediatamente che per P passano delle rette che sono secanti rispetto alla *MN*, cioè incontrano il segmento *MN* in punti interni alla γ, e delle rette che sono non secanti, che cioè incontrano il segmento *MN* in punti ideali, fuori della conica γ. Le rette delle due specie sono separate dalle due rette *PM* e *PN* che sono chiamate parallele per P alla retta *MN*; esse sono da riguardarsi come rette che incontrano la retta *MN* in punti impropri, o anche come rette che formano angolo zero con la *MN*, in quanto la

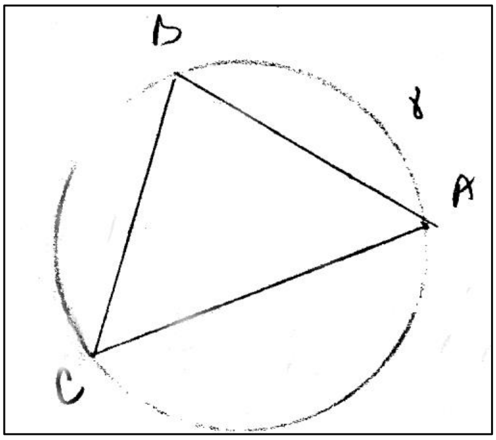


metrica angolare nel fascio M oppure nel fascio N degenera e quindi dà misura zero per ogni coppia di elementi del fascio.

Si ritrovano immediatamente in questa immagine tutti i risultati di Geometria non euclidea che abbiamo trovati per via elementare. In particolare le rette di un fascio ideale sono quelle che passano per un punto ideale, cioè fuori della γ, e la perpendicolare comune è la polare del centro del fascio rispetto alla γ stessa.

Le immagini degli ipercicli si trovano pure facilmente, osservando che tutte le omografie che mutano in sé una retta *MN* e mutano in sé la conica assoluto (traslazioni) mutano pure in sé tutte le coniche del fascio-schiera di coniche bitangenti alla γ nei punti *M* ed *N*; tali coniche (o meglio quelle che sono interne alla γ) rappresentano quindi gli ipercicli aventi come "base" la retta *MN*. Ancora il Teorema di reciprocità assicura che in ogni punto di un iperciclo la tangente è perpendicolare alla retta del fascio ideale che passa per esso ed è relativo alla "base" dell'iperciclo stesso.

Dalle immagini degli ipercicli si passa molto facilmente a quelle dei cicli: invero se consideriamo un fascio proprio, cioè avente il suo centro *0* interno alla conica assoluto, potremo chiamare *rotazioni* del piano tutti i movimenti che mutano in sé la conica assoluto e tengono fermo il fascio *0*; essi quindi tengono ferma anche la polare di *0* rispetto alla γ, polare che in questo caso è una retta tutta di punti ideali e che incontra la γ in due punti immaginario - coniugati. Tutti questi movimenti mutano in sé non solo la γ, ma anche tutte le coniche del fascio-schiera che si ottiene facendo combinazione lineare della conica γ e della polare di *0* contata due volte. Infine il caso degli oricicli si ottiene come caso limite, quando il punto *0* tende a cadere sulla γ e quindi la sua polare diventa la tangente alla γ stessa in *0*.
I movimenti in questo caso sono le omografie che mutano in sé la γ e subordinano su di essa le proiettività paraboliche aventi come unico punto unito *0*; esse mutano in sé anche tutte le coniche iperosculanti la γ in *0*, coniche che formano un fascio ottenuto facendo combinazione lineare della γ e della polare di *0* (in questo caso la tangente in *0* stesso) contata due volte.



Pertanto le tre specie di cicli appartengono ad uno stesso genere: sono coniche di fasci cui appartiene anche la γ, ottenuti in ogni caso facendo combinazione lineare della γ e di una retta contata due volte. Osserviamo infine che in questa immagine si trovano immediatamente i triangoli di area massima: essi sono i triangoli i cui vertici *A, B, C* sono punti della conica assoluto. Si verifica immediatamente che tutti i triangoli cosiffatti sono equivalenti, cioè sono trasformabili l'uno nell'altro mediante movimenti. Inoltre un qualunque triangolo di questo tipo ha la somma degli angoli uguale allo zero, in base a ciò che è stato detto.
Gli enti che abbiamo costruiti forniscono una immagine di enti che soddisfano ai Postulati della Geometria non euclidea (piana) purché siano validi i Teoremi di Geometria euclidea; quindi la validità della Geometria euclidea fornisce la prova della validità della non euclidea. Di più, in questa immagine si ha la possibilità di ottenere anche la geometria euclidea come caso particolare. Per esempio in relazione alla conica assoluto (1) si vede immediatamente che facendo tendere il raggio *r* all'infinito la conica degenera come luogo nella retta impropria contata due volte, e come inviluppo nella coppia di punti ciclici. Pertanto, in base agli sviluppi del paragrafo precedente, facendo tendere all'infinito in modo opportuno anche il moltiplicatore *k* che compare nella (2) c'è la possibilità di ottenere la metrica abituale euclidea come metrica parabolica su ogni retta, e di ottenere inoltre su ogni fascio la metrica angolare solita. In questo passaggio al limite, come abbiamo già osservato, viene introdotto un ulteriore elemento arbitrario e precisamente il modo di far tendere all'infinito col raggio *r* il parametro moltiplicatore *k* della (2); l'esistenza di questo ulteriore elemento arbitrario rispecchia la possibilità di scelta della unità di misura dei segmenti in Geometria ordinaria sulla base di convenzioni che non sono strettamente matematiche, ovvero in altre parole rispecchia il fatto che le trasformazioni che sono alla base della Geometria Elementare sono le similitudini, costituenti un gruppo a 4 parametri e non a 3, come i movimenti nel piano ora costruito.

La trattazione svolta fin qui suggerisce ulteriori generalizzazioni; sempre rimanendo nelle forme di seconda specie si ha la possibilità di considerare una conica assoluto a punti tutti immaginari. Viene così introdotta una metrica ellittica tanto per la misura delle lunghezze che per la misura degli angoli. Non vi sono parallele per un punto ad una retta e la geometria che così si ottiene viene chiamata Geometria Ellittica.

Un’immagine elementare di una Geometria cosiffatta si ha per esempio nella Geometria della stella, quando si chiamino "punti" le rette della stella e "rette" i piani della stella con la convenzione di chiamare "distanza tra due punti" l’angolo delle rette ed "angolo di due rette" la misura della sezione retta del diedro di due piani. Secando la stella con una sfera avente centro nel centro della stella stessa si ottiene la geometria della sfera; si noti tuttavia che la corrispondenza ottenuta tra punti della sfera e rette della stella non è biunivoca, se la si vuole considerare agente tra la totalità dei punti della sfera e la totalità delle rette della stella. Questa circostanza impone qualche cautela nella trattazione di proprietà globali delle figure considerate.

Ulteriori generalizzazioni si hanno in questo ordine di idee ponendosi nello spazio a tre dimensioni. Si può introdurre una quadrica assoluto a punti ellittici (per esempio una sfera assoluto) e considerare soltanto i punti interni ad essa, stabilendo su ogni retta una metrica proiettiva analoga a quella stabilita in precedenza nel piano. Si ottiene così una immagine della geometria non euclidea dello spazio che appare come la immediata generalizzazione di quella fin qui considerata. Oppure si può considerare una quadrica a punti tutti immaginari, ottenendo così una geometria ellittica dello spazio, analoga a quella cui abbiamo accennato poco fa. Anche in questo caso la ordinaria geometria euclidea si può ottenere come caso limite, facendo degenerare la quadrica assoluto in modo che come luogo di punti diventi il piano improprio contato due volte, e come inviluppo di piani diventi il circolo assoluto (nel senso abituale di questa espressione: circolo di tutti i punti ciclici dello spazio).

NdR

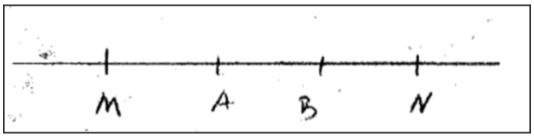
Reimpaginato dicembre 2013.
Si tratta di Appunti degli anni ’50 per lezioni di un corso, forse di Matematiche Elementari da un punto di vista superiore.

Note.

1) $(ABP) = AP/BP$

2) $(MNAB) = (MNA)/(MNB) = \dfrac{MA \cdot NB}{MB \cdot NA}$

3)



Valgono le disuguaglianze $0 < (MNAB) < 1$.

4) Formula di Laguerre.

How to Cite This Entry:
Laguerre formula. D.D. Sokolov (originator), *Encyclopedia of Mathematics.* URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Laguerre_formula

A formula for calculating the angle between straight lines in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces. Let X and Y be the points at infinity on two straight lines a and b, and let G and K be the points of intersection of these lines with the absolute of the space. Then the angle ϕ between these lines can be expressed in terms of the cross ratio $W(G, K, X, Y)$:

$$\phi = \left| \frac{i}{2} \ln W(G, K, X, Y) \right| .$$

For two-dimensional pseudo-Euclidean space, G and K are the direction vectors of the isotropic lines passing through the point of intersection of the lines a and b.

The formula was introduced by E. Laguerre .

A formula according to which, for all curves on a given surface that touch at some point, the quantity

$$\left(3 \frac{d\theta}{ds} + 2k_2 \right) \sin\theta \, k_1 - \left(\frac{d}{ds} k_1 \right) \cos\theta$$

is invariant, where k_1 and k_2 are the curvature and the torsion of the curve, θ is the angle between the principal normal of the curve and the normal to the surface, and s is the natural parameter on the curve. The formula was obtained by E. Laguerre (1870, see [2]).

References

[1] E. Laguerre, "Sur la théorie des foyers" *Nouv. Ann. Math.* , **12** (1853) pp. 57–66

[2] E. Laguerre, "Oeuvres" , **2** , Chelsea, reprint (1972)

[3] B.A. Rozenfel'd, "Non-Euclidean geometry" , Moscow (1955) (In Russian)

References

[a1] M. Berger, "Geometry" , **1–2** , Springer (1987) (Translated from French)

How to Cite This Entry:
Laguerre formula. D.D. Sokolov (originator), *Encyclopedia of Mathematics.* URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Laguerre_formula&oldid=11758

This text originally appeared in Encyclopedia of Mathematics - ISBN 1402006098