Carlo Felice Manara

OSSERVAZIONI SUI MODELLI DI EVOLUZIONE DELLE POPOLAZIONI.

(Lezioni tenute presso l'Istituto di Entomologia agraria il 26 maggio 1995).
(073195 VII)

Indice

1 - Premesse metodologiche: gli strumenti della Matematica ed i modelli della realtà.

È noto che alcune scienze, in particolare la Meccanica razionale e la Fisica, formulano le loro ipotesi, e costruiscono le loro teorie (riguardanti certi fenomeni che avvengono nel tempo) esprimendo dei legami tra grandezze che sono rappresentate da funzioni della variabile temporale; ciò avviene fino dai primi momenti in cui la Meccanica razionale ha assunto (pressappoco dall'epoca di Galileo e di Newton) una forma squisitamente matematica; e l'Analisi matematica ha fornito alla scienza gli strumenti concettuali e simbolici per la formulazione delle leggi e per la soluzione dei problemi. È noto infatti che l'Analisi definisce ed utilizza il concetto di "derivata" di una funzione; e, come è noto, questo concetto viene applicato in Meccanica ed in Fisica per rappresentare il concetto fondamentale di "velocità"; e la ripetizione dell'operazione di derivazione conduce, come è pure noto, al concetto fondamentale di "accelerazione". Di conseguenza le equazioni differenziali (cioè i legami tra certe funzioni e le loro derivate) sono state tradizionalmente considerate come gli strumenti principali per esprimere e rappresentare i fenomeni che si svolgono nel tempo, e per risolvere i relativi problemi meccanici e fisici.

È facile osservare che i concetti principali dell'Analisi matematica classica sono abbastanza strettamente collegati con gli schemi forniti dall'immagine della continuità; schemi che sono stati ovviamente mutuati dalla Geometria, che li costruisce partendo dalle nostre sensazioni elementari. Tuttavia è anche facile osservare che non sempre lo schema della continuità si adatta facilmente alla realtà che si vuole rappresentare. Ciò accade, per esempio, nel caso della Matematica Finanziaria: infatti è noto che le somme di denaro variano per numeri interi di una unità monetaria elementare del numerario che si considera (per esempio in Italia numeri interi di lire); ed inoltre la coordinata temporale varia per numeri interi di giorni: abitualmente infatti in un'operazione finanziaria ordinaria ciò che conta (ai fini dei calcoli degli interessi) è la data e non l'ora ed il minuto in cui l'operazione è avvenuta. Tuttavia anche in questi casi si utilizzano ancora spesso gli strumenti forniti dall'Analisi matematica classica, pur avendo la coscienza che le informazioni ottenute dai calcoli formali e numerici hanno determinati margini di approssimazione. Infatti tali strumenti forniscono spesso delle informazioni attraverso numeri reali (e quindi anche non interi); si commettono quindi degli errori, i quali tuttavia vengono giudicati trascurabili in confronto con l'ordine di grandezza delle somme di denaro che vengono prese in considerazione. È bene tuttavia tener presente che non ha senso in Matematica parlare di numeri "piccoli" oppure "grandi" in assoluto: un giudizio cosiffatto coinvolge molti elementi di origine psicologica, ed è strettamente relativo alla singola questione che si sta trattando. Considerazioni analoghe si potrebbero svolgere nell'ambito della Statistica ed in particolare della dinamica delle popolazioni. Anche in questi problemi vengono abitualmente utilizzati gli strumenti dell'Analisi matematica classica (funzioni continue, derivate, equazioni differenziali), mentre i fenomeni osservati potrebbero essere efficacemente rappresentati anche con altri mezzi.

È noto che l'applicazione di strumenti matematici per problemi diversi da quelli posti dalla Meccanica e dalla Fisica può essere giudicata relativamente recente, rispetto all'impiego tradizionale, avvenuto nelle scienze in parola. Per esempio nell'Economia l'impiego metodico della Matematica superiore si potrebbe far risalire a Vilfredo Pareto; e nel caso della evoluzione delle popolazioni è nota l'opera pionieristica di Vito Volterra. Come abbiamo detto, gli strumenti matematici utilizzati da questi Autori sono stati scelti tra quelli forniti dall'Analisi matematica classica. Tuttavia la matematica offre al ricercatore delle scienze della Natura una certa varietà di strumenti concettuali e formali per la costruzione di modelli; l'adozione di uno tra essi non può essere dettata da criteri assoluti e validi in ogni caso e per ogni circostanza; e ciò anche perché la descrizione matematica di un fenomeno non può essere esaustiva. Pertanto le scelte che si fanno possono essere di varia natura, a seconda dello scopo che il ricercatore si propone e vuole conseguire.

Si potrebbe quindi concludere che non esistono strumenti matematici che debbano essere obbligatoriamente utilizzati in ogni caso: per ogni particolare problema è possibile scegliere alcuni strumenti matematici i quali forniscono le informazioni con quell'ordine di approssimazione che è richiesto dal problema e che è utile in quel determinato caso. Nel caso particolare della evoluzione e dello sviluppo nel tempo di popolazioni di viventi di una data specie o di varie specie in relazione tra loro, è noto che lo strumento adottato tradizionalmente è stato, anche in questo caso, quello delle equazioni differenziali. Tuttavia ripetiamo si possono utilizzare anche altri strumenti per costruire modelli dell'evoluzione delle popolazioni.

Nelle pagine che seguono presenteremo gli elementi delle trattazioni classiche, che utilizzano le equazioni differenziali, ed anche dei modelli costruiti utilizzando i concetti basilari della teoria delle equazioni alle differenze finite. In modo molto sommario e rudimentale si potrebbe dire che in quest'ultima teoria la variabile indipendente (la variabile temporale, nei casi della evoluzione di una o più specie) non è immaginata come continua. In generale si suppone che la variabile indipendente assuma soltanto valori appartenenti ad una progressione aritmetica; con scelta opportuna delle convenzioni di misura si può quindi sempre supporre che i valori della variabile indipendente siano numeri interi. Ciò appare consono alla pratica sperimentale, nella misura in cui le popolazioni sotto studio sono osservate (in particolare contate) soltanto ad intervalli di tempo determinati ed uguali tra loro.

La scelta di questo atteggiamento nei riguardi della variabile indipendente conduce allora a presentare i modelli dei fenomeni considerati sotto forma di successioni; pertanto si potrebbe dire che la teoria delle equazioni alle differenze finite ha molti punti di contatto con quella delle successioni infinite di numeri reali. Tali successioni si possono conoscere e dominare così come si possono conoscere e dominare le funzioni continue di una variabile continua, anche se il loro impiego è molto meno frequente per la costruzione di modelli della realtà sperimentale. Invero lo strumento offerto dalle successioni si presenta a prima vista come meno ricco e potente di quello classico. Tuttavia si vedrà che esso offre i vantaggi di presentare spesso una minore difficoltà formale, e quindi una minore complicazione; inoltre esso permette una rappresentazione grafica abbastanza elementare, sulla quale si possono pure facilmente modellare programmi di verifica con gli strumenti elettronici di calcolo.

Per queste ragioni, nelle pagine che seguono presenteremo alcuni problemi classici riguardanti l'evoluzione di popolazioni utilizzando entrambi gli strumenti formali, cioè con lo schema classico e con lo schema delle equazioni alle differenze finite. Il nostro scopo infatti è quello di fornire allo studioso la possibilità di scegliere di volta in volta lo strumento più semplice e più adatto per un determinato problema.

2 - Sviluppo uniforme illimitato (esponenziale).

Consideriamo una determinata popolazione; sia y il numero dei suoi elementi, e supponiamo che y sia funzione della variabile temporale t.

A) Schema classico (continuo).

Supponiamo che il valore della variabile y sia funzione continua e derivabile della variabile continua t e che la velocità di accrescimento in un determinato istante sia proporzionale al valore assunto dalla funzione a quell'istante. Naturalmente il fatto che il numero degli elementi della popolazione sia rappresentato dal valore di una variabile continua dà luogo ad errori; ma si accetta l'ipotesi che i numeri presi in considerazione siano abbastanza grandi, così da rendere gli errori che si commettono percentualmente trascurabili, come abbiamo detto nel paragrafo precedente. Nei modelli che adottano lo schema del continuo si rappresentano queste ipotesi con una equazione differenziale; precisamente, indicando con la derivata:

(1) $$\frac{dy}{dt}$$

la "velocità di accrescimento" della popolazione nel tempo, le ipotesi vengono tradotte con la relazione (equazione differenziale)

(2) $$\frac{dy}{dt} = ay.$$

Nella (2) il coefficiente a viene chiamato abitualmente "tasso istantaneo di accrescimento" della popolazione; è chiaro che a seconda che sia:

(3) $a > 0$, oppure $a < 0$

il fenomeno descritto dalla (2) è un effettivo accrescimento, nel senso proprio del termine, oppure, rispettivamente, una diminuzione della popolazione. In teoria il coefficiente a che compare nella (2) può essere funzione del tempo. Qui prenderemo in considerazione il caso più semplice, in cui a sia costante. In questa ipotesi l'equazione differenziale (2) può essere risolta in modo elementare con la procedura ben nota che viene chiamata "di separazione delle variabili": precisamente la (2) viene scritta nella forma

(4) $$\frac{dy}{y} = a\,dt.$$

Assegniamo ora il valore $t = 0$ all'istante iniziale del fenomeno che si vuole rappresentare; di conseguenza scegliamo di prendere in considerazione il fenomeno stesso per i valori positivi della variabile t, cioè di ritenere valida l'ipotesi:

(5) $$t > 0.$$

Calcolando ora l'integrale di entrambi i membri della (4), otteniamo:

(6) $$\log y = a\,t + costante.$$

In questa formula il simbolo $\log y$ indica il logaritmo del numero $y > 0$ preso nella base abitualmente indicata con il simbolo e. Tale simbolo indica il numero reale, del quale diamo qui le prime 19 (tra le infinite) cifre decimali:

(7) $$e = 2.7182818284590452353...$$

Il passaggio dai logaritmi ai numeri conduce a scrivere la seguente espressione per la funzione $y(t)$:

(8) $$y(t) = y(0)e^{at}.$$

La rappresentazione grafica della funzione (8) è ben nota e si trova sui manuali correnti. In particolare la rappresentazione grafica mostra una curva che si accresce indefinitamente nel caso in cui sia $a > 0$; ed invece una curva che tende asintoticamente all'asse dei tempi per $a < 0$. In particolare la curva parte da un punto dell'asse delle y che ha come ordinata il valore $y(0)$, che rappresenta il numero degli elementi della popolazione all'istante iniziale, in cui incomincia l'osservazione del fenomeno che si considera.

B) Schema discontinuo.

Il fenomeno dell'accrescimento illimitato di una popolazione può essere descritto in altro modo, facendo ricorso alle idee fondamentali della teoria delle equazioni alle differenze finite. In questo ambito si suppone che la variabile temporale t assuma soltanto valori interi. In tal modo la variabile indipendente viene immaginata quasi come costituita da intervalli elementari tutti della stessa durata; ed il valore n (numero intero naturale) può stare ad indicare l'istante finale dell'n-esimo intervallo. La scelta della durata dell'intervallo elementare può essere dettata da considerazioni di vario tipo: per esempio, se si tratta di popolazioni di animali, può essere comodo scegliere come intervallo elementare la durata media che intercede tra due generazioni successive; quando questi schemi formali sono utilizzati per i contenuti della Matematica Finanziaria si scelgono tradizionalmente delle durate elementari che hanno riferimento al calendario: la settimana, il mese, il bimestre, il trimestre, il semestre, l'anno. Indicando qui con z il numero degli elementi della popolazione che si considera, il caso più semplice di fenomeno di accrescimento si incontra quando si può accettare che il fenomeno stesso possa essere sufficientemente descritto con la relazione:

(9) $$z(n+1) = k\, z(n).$$

Nella equazione (9) k indica una costante positiva. A seconda che si abbia rispettivamente:

(10) $$k > 1 \text{ oppure } k < 1$$

la (9) descrive un accrescimento (nel senso abituale del termine) della popolazione osservata oppure una diminuzione. Di conseguenza si scrive la costante k nella forma:

(11) $$k = 1 + r$$

e l'accrescimento (nel senso abituale) oppure la diminuzione si verifica a seconda che sia rispettivamente:

(12) $$r > 0 \ , \text{ oppure } r < 0.$$

La costante r viene abitualmente chiamata "tasso di crescita" relativo al periodo elementare di tempo che è stato scelto per determinare i valori della coordinata temporale; e la relazione (9) viene conseguentemente scritta nella forma:

(13) $$z(n+1) = (1+r)\, z(n).$$

Ricordiamo per esempio che la relazione (9) viene abitualmente utilizzata per calcolare il montante di un capitale impiegato in regime di capitalizzazione composta; in questo caso la costante r viene chiamata "tasso di interesse composto (mensile, trimestrale, semestrale, annuale, a seconda del periodo elementare stabilito per la misura delle durate di impiego).

Dalla (13), partendo da un valore iniziale $z(0)$ della funzione, si trae l'espressione del suo valore all'istante n; esso è dato da:

(14) $$z(n) = z(0)(1+r)^n.$$

Per esempio dalla (14) si ottiene che, se il valore iniziale $y(0)$ si raddoppia in 10 periodi, per il tasso di crescita r vale la relazione:

(15) $$r = 0.07177\ldots$$

È noto inoltre che spesso il valore del tasso r viene espresso in "percento". Quindi, al posto della (15) si scrive spesso:

(16) $$r = 7.177\ldots\%.$$

In modo analogo, se il valore iniziale si dimezza in 10 periodi, per il tasso di crescita vale la relazione:

(17) $$r = -0.0669669\ldots$$

Ciò conferma il fatto che la crescita di cui si fa cenno nel nome della costante r può anche essere negativa, perché nei fatti in questo caso si tratta di una effettiva diminuzione.

La legge espressa dalla (14) può essere illustrata con le convenzioni della geometria analitica; ciò permette di dare del fenomeno una rappresentazione grafica intuitiva, ed anche di operare una valutazione abbastanza rapida del suo andamento, e quindi di fornire una discussione qualitativa che spesso si rivela abbastanza efficace. La rappresentazione grafica si può ottenere nel modo seguente. Si consideri un piano in cui è stato stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, nel quale gli assi coordinati, asse delle ascisse (o asse delle x) ed asse delle ordinate (o asse delle y) sono orientati nel modo abituale: l'asse delle x con direzione orizzontale (rispetto ad un osservatore che guarda il piano) ed orientato positivamente da sinistra a destra; l'asse delle y con direzione verticale rispetto allo stesso osservatore, ed orientato positivamente dal basso verso l'alto. Indichiamo poi, come si fa abitualmente, con 0 il punto di coordinate $x = 0$, $y = 0$, che chiameremo, secondo il solito, "origine delle coordinate". Nel seguito, quando parleremo di "destra" e "sinistra", oppure di "alto" e "basso", intenderemo sempre di far riferimento a quell'osservatore immaginario di cui abbiamo detto, e rispetto al quale sono state stabilite le direzioni e le orientazioni degli assi coordinati. Per i nostri scopi, nel seguito prenderemo in considerazione soltanto il quadrante del piano in cui le coordinate sono entrambe positive. Rispetto a questo sistema di riferimento consideriamo la retta che chiameremo u, rappresentata dall'equazione:

(18) $$y = x.$$

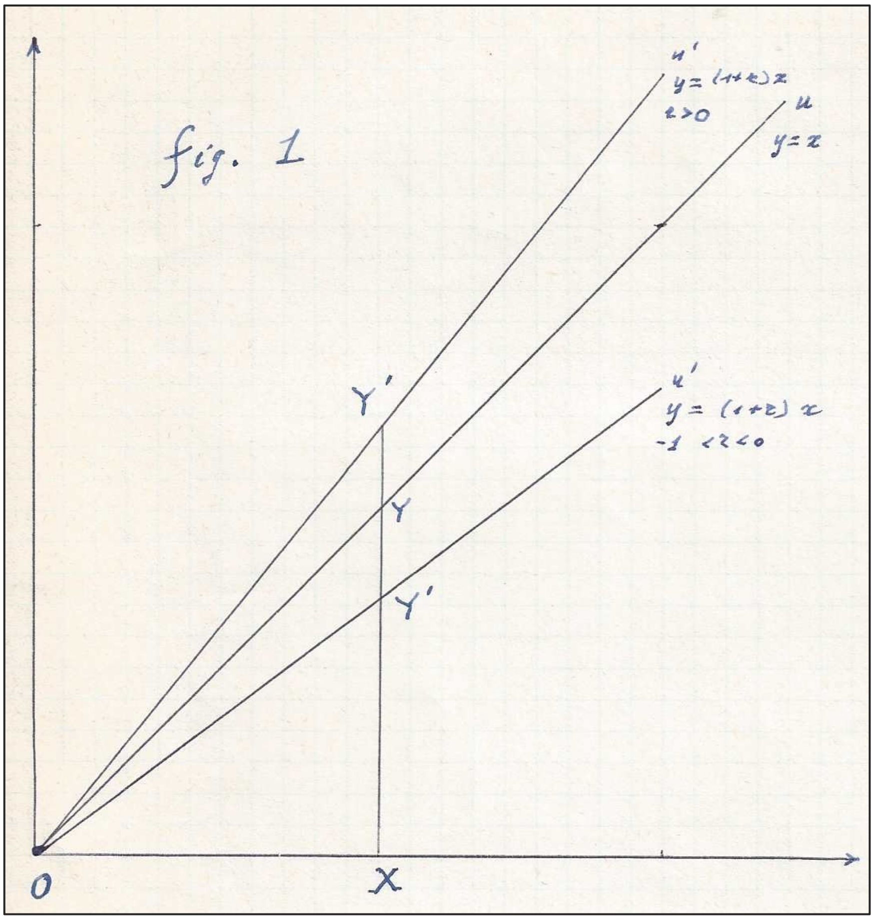


Figura 1

Tale retta viene chiamata "bisettrice del primo quadrante" e passa evidentemente per il punto 0, origine delle coordinate. Consideriamo poi la retta u', rappresentata dall'equazione:

(19) $$y = (1+r)\,x.$$

Anche la retta u' passa per l'origine delle coordinate; sia ora X un punto dell'asse delle x, ed indichiamo con z la lunghezza del segmento OX, ponendo quindi:

(20) $$z = OX.$$

Mandiamo da X la parallela all'asse delle y, ed indichiamo con Y e Y' rispettivamente le intersezioni di questa parallela con le rette u ed u'. In forza della (18) si avrà ovviamente:

(21) $$XY = 0X = z;$$

inoltre si avrà:

(22) $$XY' > XY \text{ oppure } XY' < XY$$

a seconda che valga rispettivamente la prima oppure la seconda delle diseguaglianze (12) [fig. 1]. La figura costituita dagli assi e dalle due rette u ed u' può servire comodamente per illustrare un fenomeno di sviluppo che sia descritto dall'equazione (14). Sia infatti $z(0)$ il valore iniziale della funzione considerata e consideriamo nel diagramma il punto X_0 tale che sia [fig. 2 e 3]:

(23) $$z(0) = OX_0;$$

mandiamo per X_0 la parallela all'asse delle y; sia Y_0 l'intersezione di tale parallela con la retta u, e sia Y_0' la sua intersezione con la retta u' [fig.3]; si avrà, secondo l'equazione (19):

(24) $$X_0Y_0' = (1+r)OX_0 = (1+r)z(0).$$

Mandiamo ora da Y_0' la retta parallela all'asse delle x, ed indichiamo con Y_1 il punto d'intersezione di tale parallela con la u; in forza della (18) tale punto avrà ascissa data da X_0Y_0', ossia, per la (24), uguale a $(1+r)\,z(0)$; quindi, per la (13), tale ascissa potrà essere indicata con $z(1)$. Poniamo:

(25) $$OX_1 = z(1) = (1+r)\,z(0).$$

Indichiamo quindi con X_1 il punto che ha ascissa $z(1)$, e mandiamo per X_1 la parallela all'asse delle y; chiamiamo Y_1 l'intersezione di tale parallela con la retta u, e chiamiamo Y_1' il suo punto di intersezione con la retta u'. Si avrà, per la (19):

(26) $$X_1Y_1' = (1+r)OX_1 = (1+r)^2z(0).$$

Mandiamo ora da Y_1' la retta parallela all'asse delle x ed indichiamo con Y_2 il punto di intersezione di tale parallela con la retta u. In forza della (18), tale punto avrà ascissa data dalla lunghezza del segmento X_1Y_1' ossia, per la (26), uguale a

(27) $$z(2) = (1+r)\,OX_1 = (1+r)^2\,0X_0 = (1+r)^2\,z(0).$$

Indichiamo ora con X_2 il punto che ha ascissa $z(2)$, e mandiamo per X_2 la parallela all'asse delle y; chiamiamo Y_2' l'intersezione di tale parallela con la retta u'; si avrà:

(28) $$X_2Y_2' = (1+r)\,X_2Y_2 = (1+r)^2\,z(0).$$

Mandiamo ora da Y_2' la parallela all'asse delle x ed indichiamo con Y_3 la sua intersezione con la retta u; in forza della (18) tale punto avrà ascissa data

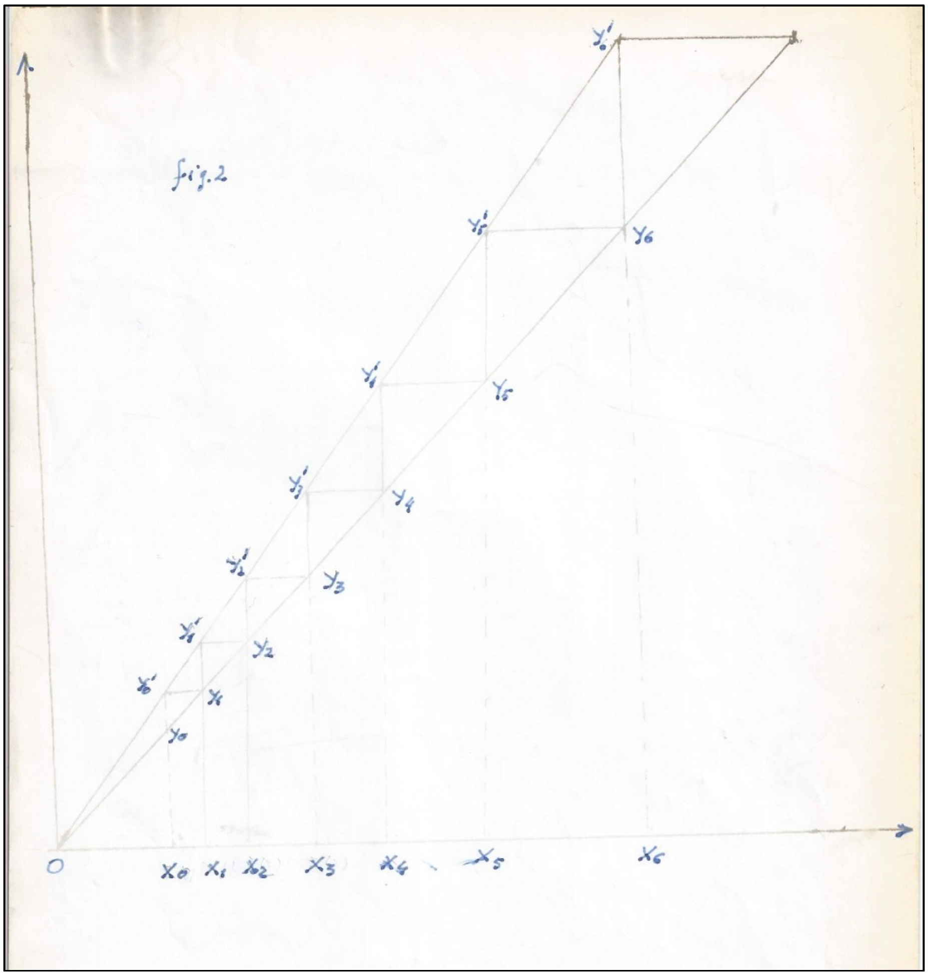


Figura 2

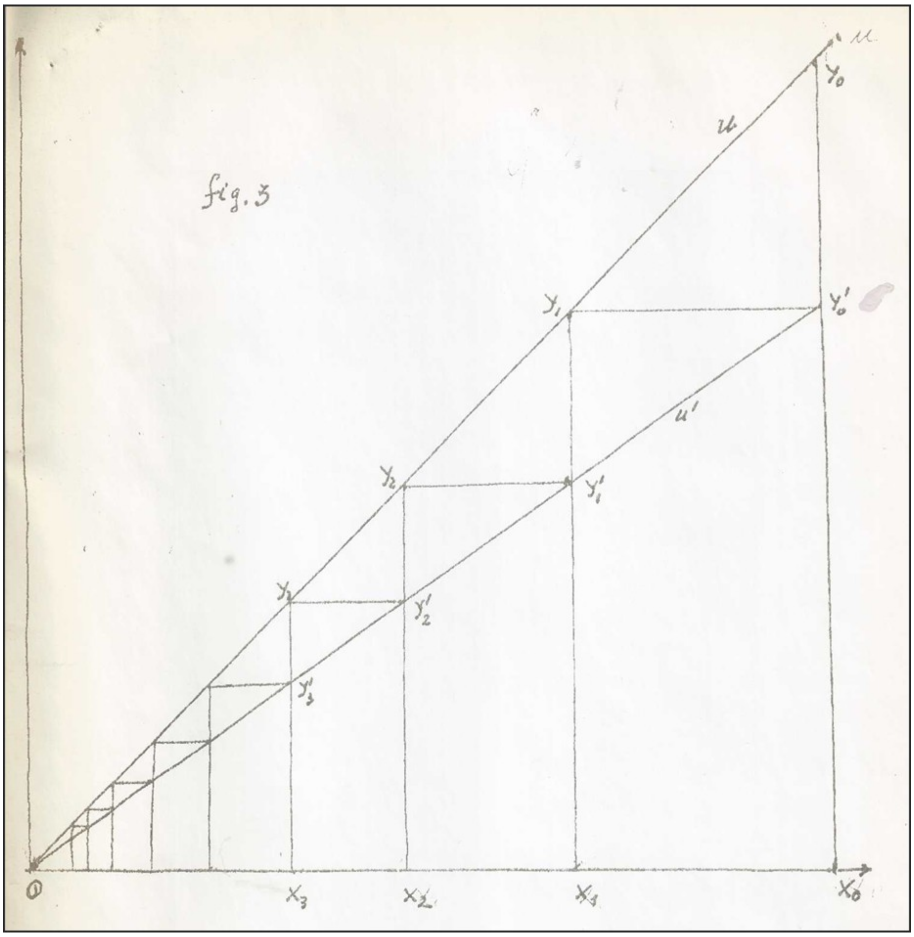


Figura 3

dalla lunghezza del segmento X_2Y_2' ossia, per la (28), uguale a:

(29) $$OX_3 = (1+r)^3 z(0).$$

È chiaro che queste procedure possono essere ripetute indefinitamente, e conducono a costruire una successione infinita di punti:

(30) $$X_0, X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots\ldots$$

le cui ascisse sono rispettivamente:

(31) $$z(0),\ z(1) = (1+r)\, z(0),\ z(2) = (1+r)^2 z(0), \ldots,\ z(n) = (1+r)^n z(0), \ldots.$$

OSSERVAZIONE. Abbiamo visto sopra che se è:

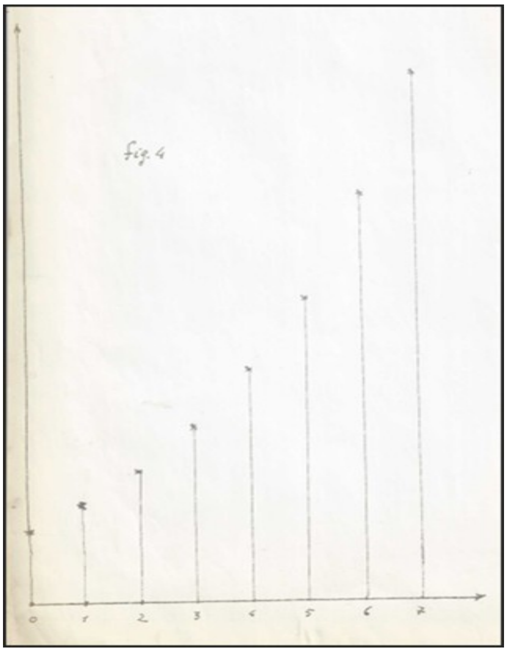
(32) $$r > 0$$

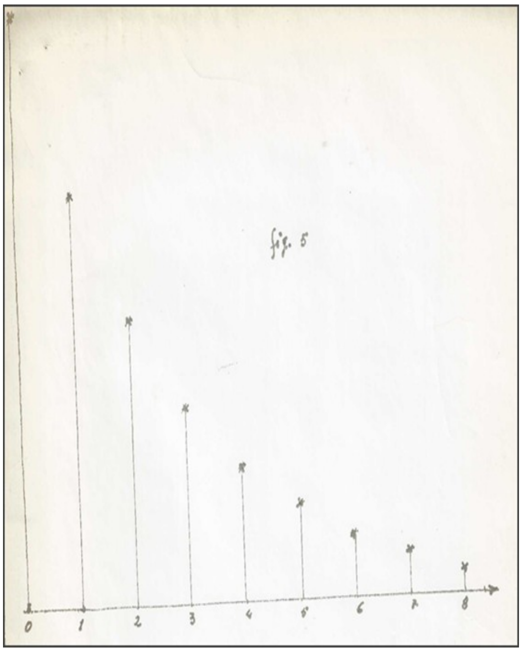
ogni punto della retta u' (esclusa l'origine) è al di sopra del punto della retta u di uguale ascissa; quindi i punti della successione (29) si allontanano indefinitamente verso destra, perché le loro ascisse crescono indefinitamente. Invece se è:

(33) $$r < 0$$

ogni punto della retta u' (esclusa l'origine) è al di sotto del punto della retta u di uguale ascissa; quindi i punti della successione (29) si avvicinano indefinitamente all'origine, perché le loro ascisse tendono a zero [fig.3].

AVVERTENZA. Il diagramma finora illustrato costituisce un comodo strumento di calcolo grafico per i valori della successione (31). Da esso si possono costruire facilmente i consueti diagrammi che forniscono, secondo le convenzioni abituali, le informazioni riguardanti l'evoluzione temporale del fenomeno. Secondo questo modo di illustrare il fenomeno che si svolge nel tempo si dispongono di solito i punti che rappresentano i valori della variabile temporale indipendente a distanze uguali tra loro, e quindi in modo diverso dalle figure 2 e 3. Tuttavia è facile passare da queste alle figure abituali, come è stato fatto nelle figure 4 e 5, nelle quali i valori della coordinata temporale sono disposti secondo le convenzioni abituali, ed i valori delle funzioni sono riportati in ordinata.





3 - Sviluppo limitato.

Lo schema di sviluppo presentato nel precedente paragrafo può essere valido in molti casi, e viene spesso effettivamente utilizzato in Matematica Finanziaria. Tuttavia, applicato ad una popolazione vivente, si rivela presto insufficiente per descrivere tutti gli aspetti del fenomeno che interessano lo studioso. Per una maggiore aderenza alla realtà si adottano quindi altri schemi matematici, nei quali si cerca di tener conto principalmente della esistenza di limiti superiori per l'accrescimento. Anche in questo caso presenteremo qui due modelli matematici del fenomeno; modelli tra i quali lo studioso può scegliere a seconda degli scopi che intende raggiungere.

A) Modello continuo. Legge logistica.

Anche in questo caso indichiamo con $y(t)$ il valore di una variabile continua e derivabile della variabile temporale t, anch'essa supposta continua. Per quanto riguarda il significato delle informazioni che si ottengono dai valori numerici reali (e quindi anche non interi) assunti come rappresentanti di valori interi, rimandiamo a quanto è stato detto nel paragrafo precedente, sezione A). Indichiamo anche qui con la derivata:

$$\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

la velocità di accrescimento della y. Nel modello che stiamo presentando si suppone che esista un valore reale positivo K che costituisce un valore superiore non superabile per la variabile dipendente y; si suppone quindi che valgano le relazioni:

$$0 < y < K. \tag{2}$$

Si suppone infine che la velocità di accrescimento sia legata al valore della variabile y dalla relazione:

$$\frac{dy}{dt} = a\, y(K-y),\ a > 0. \tag{3}$$

Il significato della (3) potrebbe essere descritto sommariamente dicendo che la velocità di accrescimento (sempre positiva per le (2) e (3)) diminuisce con l'avvicinarsi di y al limite superiore K. La legge (3) è un caso particolare di una legge di accrescimento molto generale che viene chiamata "legge logistica", e che viene spesso adottata per descrivere molti fenomeni di accrescimento in contesti anche molto diversi tra loro. La soluzione della (3) si può conseguire con il metodo detto della "separazione delle variabili". Si scrive la (3) nella forma:

$$\frac{dy}{y(K-y)} = a\, dt \quad . \tag{4}$$

Dalla (4) integrando si ottiene:

$$\log\left(\frac{y}{K-y}\right) = a\,Kt + costante \quad , \tag{5}$$

e di qui, passando dai logaritmi ai numeri, si può esprimere y nella forma:

(6) $$\frac{y}{K-y} = c\, e^{aKt} \quad ,$$

dove con c è stata indicata una costante, che può essere determinata per esempio tenendo conto dei dati iniziali del fenomeno. Risolvendo la (6) rispetto ad y si ottiene l'espressione:

(7) $$y = \frac{c\, K\, e^{aKt}}{1+c\, e^{aKt}} \ .$$

Volendo rappresentare graficamente l'andamento della funzione $y(t)$ data dalla (7), si può scegliere un sistema di assi cartesiani ortogonali, e riportare sull'asse delle ascisse il valore della variabile temporale t, prendendo ovviamente in considerazione soltanto i valori positivi di questa. Si ottiene in tal modo una curva che ha un caratteristico andamento ad "S" allungato verso destra [fig. 6], ed interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata:

(8) $$y = cK/(1+c).$$

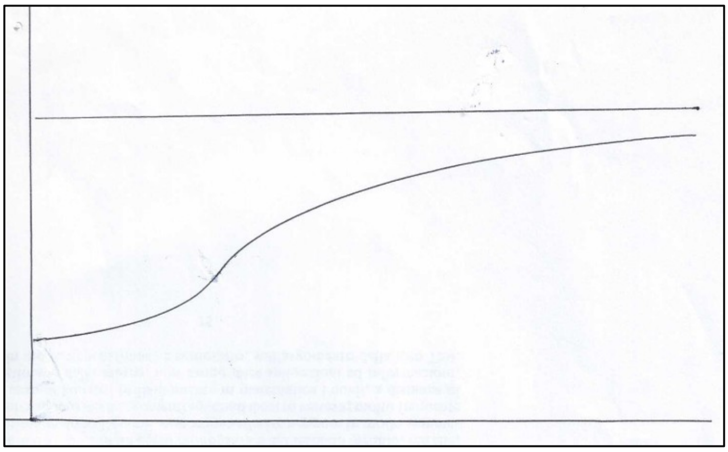


Figura 6

La curva sta tutta al di sotto della retta di equazione:

(9) $$y = K \quad ,$$

e si avvicina asintoticamente a questa retta per t che tende all'infinito: si ha infatti dalla (7):

(10) $$\lim_{t\to+\infty} y = K.$$

La curva presenta un flesso in corrispondenza al valore della variabile t:

(11) $$t = \frac{\log\left(\frac{1}{c}\right)}{ak} \quad ,$$

ed il valore corrispondente della funzione in tal caso è:

(12) $$y = \frac{K}{2}.$$

Come abbiamo detto poco sopra, la legge (3), o la (7) che da essa deriva, viene utilizzata in molti contesti per descrivere fenomeni di sviluppo; per esempio in Entomologia questa legge viene utilizzata per descrivere lo sviluppo di popolazioni di insetti di una determinata specie in un determinato ambiente [Cfr. per es. R.G. Davies. Lineamenti di Entomologia. Pagg.225 et sqq.].

In questo contesto la variabile y viene indicata con N, con il significato di "numero degli elementi della specie presenti nell'ambiente", e la costante K acquista il significato di "massimo carico (di presenze) possibile per l'ambiente in parola". La costante della (3) viene scritta nella forma:

(13) $$a = r/K,$$

assegnando alla costante r il significato di "tasso istantaneo di crescita". Con queste notazioni l'equazione differenziale (3) viene scritta nella forma:

(14) $$\frac{dN}{dx} = \frac{rN(K-N)}{K} \ ,$$

che risulta particolarmente comoda nel problema in esame.
Infine si indica con N_0 il numero degli appartenenti alla specie esistenti all'istante iniziale dell'osservazione nell'ambiente preso in considerazione, e si assume come costante c [che compare nella (6)], il numero:

(15) $$c = \frac{No}{K-No} \ .$$

Con queste notazioni la (7) può essere scritta nella forma:

(16) $$N(t) = \frac{N_0\, e^{rt}}{1+\frac{N_0\,(e^{rt}-1)}{K}} \ ,$$

oppure nella forma equivalente:

(17) $$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K-N_0+N_0\, e^{rt}} \ .$$

Ovviamente queste trasformazioni della formula sono puramente formali, e non hanno alcun significato sostanziale; esse sono dirette soltanto a mettere comodamente in evidenza quei caratteri della legge di sviluppo che sono di volta in volta considerati importanti per un determinato problema, relativo ad una determinata realtà che si vuole studiare con gli strumenti della matematica. In ogni caso osserviamo che tanto nella (7) che nelle (16) e (17) sono presenti tre parametri numerici costanti, i quali possono essere determinati sperimentalmente: per esempio con la (15) si tiene conto del valore iniziale della funzione. Con la determinazione degli altri due parametri è possibile caratterizzare in modo spesso soddisfacente un determinato fenomeno di accrescimento in relazione ad una certa specie e ad un determinato ambiente.

B) Schema discontinuo.

Adotteremo anche qui le notazioni e le convenzioni illustrative che abbiamo introdotto nel paragrafo precedente, nella sezione B). Tuttavia non adotteremo ora l'ipotesi che il valore $z(n+1)$ si ottenga da $z(n)$ mediante moltiplicazione per una costante. Supporremo invece che $z(n)$ venga moltiplicata per un fattore che dipende dal valore $z(n)$. Questa ipotesi potrebbe essere espressa dall'equazione:

(18) $$z(n+1) = k\,[z(n)]\,z(n)$$

la quale generalizza così l'equazione (9) del paragrafo 2.

Volendo rappresentare un fenomeno di crescita nel quale esiste un valore superiore K che non può essere superato dalla funzione $z(n)$, potremmo operare nel modo seguente: ancora nel sistema di riferimento cartesiano descritto nel paragrafo precedente, consideriamo la parabola rappresentata dall'equazione:

(19) $$y = h\,x(K-x) + x \quad ; \quad h > 0.$$

Per un valore di x appartenente all'intervallo:

(20) $$0 < x < K \ ,$$

ogni punto di questa parabola sta al di sopra del punto di uguale ascissa della retta:

(21) $$y = x.$$

Si verifica inoltre che se la costante (positiva) h viene scelta in modo da soddisfare alle limitazioni:

(22) $$0 < h < 1/K \ ,$$

la funzione $y(x)$ data dalla (19) è crescente in tutto l'intervallo (20).

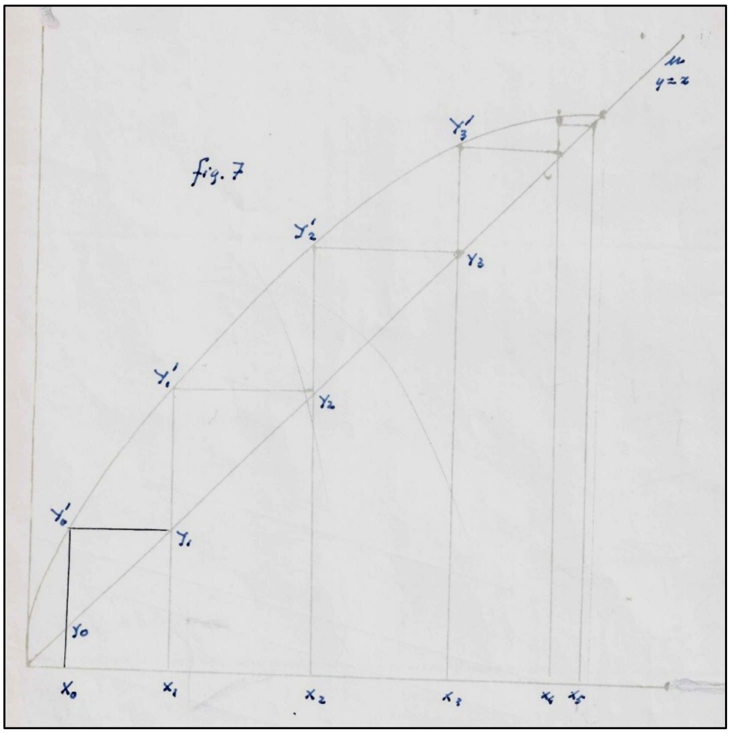


Figura 7

Pertanto, nello stesso intervallo, potremo ripetere la procedura grafica descritta nel paragrafo precedente, con la sola variazione che consiste nel sostituire la parabola (19) alla retta ivi indicata con u'. In particolare, quando si scelga sull'asse delle ascisse un punto $X(0)$ la cui ascissa $z(0)$ appartenga all'intervallo (20) [fig.7] si costruisce una successione di punti:

(23) $$X_1\,, X_2\,, \ldots\ldots, X_n\,, \ldots.$$

le cui ascisse:

(24) $$z(1),\ z(2),\ z(3), \ldots.,\ z(n), \ldots.$$

appartengono tutte all'intervallo (20), e la successione (24) è crescente ed ha come limite il valore K.

OSSERVAZIONE. La rappresentazione grafica dell'evoluzione del fenomeno in funzione del tempo secondo le convenzioni abituali [fig. 8] può essere ottenuta facilmente secondo le osservazioni contenute nell'avvertenza che si trova alla fine del paragrafo 2.

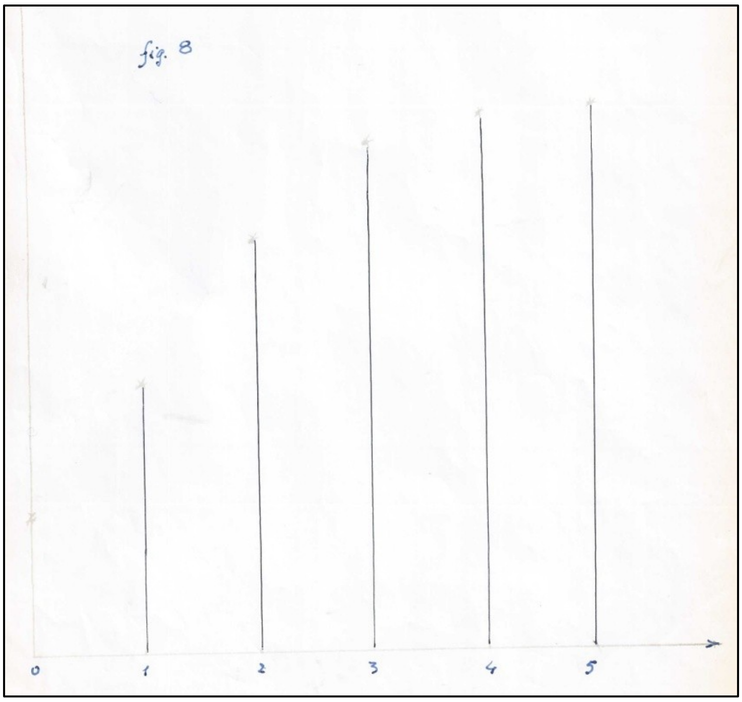


Figura 8

Si osservi inoltre che la descrizione di un fenomeno reale, con lo schema qui descritto può essere fatta disponendo di 3 gradi di libertà: due sono resi evidenti dai parametri h e K che figurano nella (19), ed un terzo può essere utilizzato tenendo conto del valore iniziale $z(0)$. Pertanto la procedura qui descritta presenta lo stesso numero di gradi di libertà della procedura continua, esposta nella sezione precedente.

C) Schema discontinuo, con soglia inferiore di estinzione.

Lo schema discontinuo trattato nella precedente sezione B) può essere arricchito ed ampliato in varie direzioni, a seconda delle necessità della ricerca. A titolo di esempio, amplieremo qui lo schema presentato nella sezione B) formulando l'ipotesi che esista non soltanto un limite superiore K allo sviluppo della popolazione, ma che esista anche una soglia inferiore, che indicheremo con m, al di sotto della quale la popolazione presenta un fenomeno di diminuzione che la avvia alla estinzione. Si avrà ovviamente:

(25) $$0 < m < K,$$

ed il fenomeno potrebbe essere descritto nel modo seguente. Si consideri la funzione:

(26) $$y = hx\,(x-m)(K-x) + x \qquad ; \qquad h > 0$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq K$.

La grafica di questa curva possiede le seguenti proprietà:

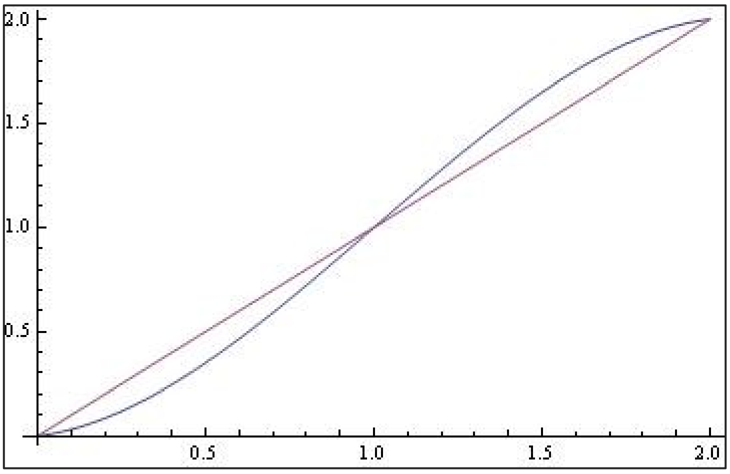


Figura 9. y = (10/25) x (x - 1) (2 - x) + x

1) Per ogni valore di x appartenente all'intervallo:

(27) $0 < x < m$

il punto della grafica sta al di sotto del punto di uguale ascissa della retta u rappresentata dall'equazione:

(21) $y = x$.

2) Per ogni valore di x appartenente all'intervallo:

(28) $m < x < K$

il punto della grafica sta al di sopra del punto di uguale ascissa della retta u.

3) Se poi si ha:

(29) $h < \frac{1}{mK}$

la grafica della funzione (26) sta tutta al di sopra dell'asse delle x.

Supponiamo ora che siano valide le (25) e (29); allora, in relazione alla funzione (26), potremo ripetere la procedura grafica illustrata nel paragrafo precedente e nella precedente sezione B) di questo paragrafo. In questo caso si possono costruire due successioni di numeri analoghe alla (24); precisamente se il valore iniziale $z(0)$ appartiene all'intervallo (27) la successione risulta decrescente ed ha come limite il numero 0 (zero); se invece il valore iniziale appartiene all'intervallo (28) la successione risulta essere crescente ed ha come limite il valore K. Possiamo pertanto pensare che la procedura grafica ora presentata sia atta a rappresentare lo sviluppo di una popolazione che può crescere fino al valore K, carico massimo relativo all'ambiente in cui la popolazione vive; oppure può avviarsi verso l'estinzione se il numero dei componenti è inferiore ad una data soglia critica.

D) Schema discontinuo. Sviluppo con oscillazioni attorno ad un valore di equilibrio.

La teoria delle equazioni alle differenze finite permette di descrivere anche altri fenomeni di sviluppo di popolazioni, oltre a quelli fin qui considerati. In particolare si può descrivere il fenomeno di sviluppo che conduce ad un valore limite di equilibrio attraverso oscillazioni che portano la popolazione ad un valore di equilibrio costante nel tempo. Un tale fenomeno può essere descritto con una equazione del tipo seguente:

(30) $$z(n+1) + k\,z(n) = c \quad ; \quad k > 0 \;\; ; \;\; c,\, k \; costanti.$$

La soluzione dell'equazione (30) è fornita dalla formula:

(31) $$z(n) = z(0)\,(-k)^n + \frac{c}{1+k} \;.$$

Se è:

(32) $$0 < k < 1$$

si ha:

(33) $$\lim_{n\to\infty} z(n) = \frac{c}{1+k}.$$

L'analisi fondata sull'equazione (30) può essere ulteriormente generalizzata nel modo seguente. Scrivendo la (30) nella forma:

(30)' $$z(n+1) = c - k\,z(n) \;,$$

questa equazione ci si presenta come un caso molto particolare della equazione generale:

(34) $$z(n+1) = f(z\,(n)) \;,$$

nella quale "*f*" è simbolo di una opportuna funzione; se questa è scelta in modo adeguato la (34) permette di rappresentare ed analizzare vari tipi di fenomeni come quello che abbiamo visto all'inizio di questa sezione. Utilizzeremo a questo scopo gli strumenti grafici utilizzati nei paragrafi e nelle sezioni precedenti. A tal fine si consideri il riferimento cartesiano ortogonale descritto all'inizio del paragrafo 2. Indichiamo con $f(x)$ una funzione positiva, continua e decrescente della variabile indipendente *x*, per valori non negativi della variabile stessa; quindi, nell'ipotesi che la funzione stessa abbia derivata, si avrà, per ogni $x > 0$:

(35) $$\frac{df}{dx} < 0.$$

Supponiamo inoltre che sia, per ogni *x*:

(36) $$\left|\frac{df}{dx}\right| < 1.$$

OSSERVAZIONE - La condizione (36) è sufficiente perché ciò che segue abbia validità; tuttavia è possibile enunciare di volta in volta delle condizioni meno restrittive, in relazione a scelte particolari della funzione *f*. In forza delle ipotesi formulate per la funzione *f*, la grafica di questa e la retta *u*, di equazione:

(37) $$y = x$$

hanno in comune un punto *Q*; indichiamo con *q* l'ascissa di questo punto, e consideriamo per esempio un punto X_0 la cui ascissa $z(X_0)$ sia minore di *q*; mandiamo da X_0 la parallela all'asse delle ordinate, ed indichiamo anche qui con $X_0{}'$ e $Y_0{}'$ rispettivamente le intersezioni di questa parallela con la retta *u* e con la grafica della funzione *f*. Dalle ipotesi si ha che $Y_0{}'$ sta al di sopra di X_0', e che la retta che contiene questi due punti sta a sinistra del punto Q. Mandiamo da Y_0' la parallela all'asse delle ascisse ed indichiamo con Y_1 la sua intersezione con la retta u; sia $z(1)$ l'ascissa di Y_1 e siano rispettivamente X_1 ed Y_1' i punti dell'asse delle x e della grafica della f che stanno su questa parallela; si verifica senza difficoltà che questa volta Y_1' sta al di sotto di Y_1, e che la retta contenente i due punti Y_1 ed Y_1' sta alla destra di Q. Mandiamo da Y_1' la parallela all'asse delle x ed indichiamo con Y_2 la sua intersezione con la retta u; sia $z(2)$ l'ascissa di Y_2 ed indichiamo con X_2 ed Y_2' rispettivamente il punto dell'asse delle x di ascissa $z(2)$ e l'intersezione della grafica della f con la retta parallela all'asse delle ordinate passante per $X(2)$. Mandiamo da Y_2' la parallela all'asse delle ascisse, indichiamo con Y_3 la sua intersezione con la retta u, ed indichiamo con $z(3)$ l'ascissa di Y_3. Proseguendo e ripetendo le costruzioni fatte finora si dimostra che, nelle ipotesi enunciate, si costruiscono così due successioni di valori:

(38) $$z(0),\ z(2),\ z(4),\ldots\ldots.z(2n),\ldots.$$
$$z(1),\ z(3),\ z(5),\ldots\ldots.z(2n+1),\ldots.$$

La prima successione è crescente, e si avvicina indefinitamente al valore q (ascissa del punto Q) da sinistra; la seconda successione è decrescente e pure si avvicina indefinitamente al valore q, ma da destra. Come abbiamo già detto, le operazioni eseguite permettono soltanto di costruire graficamente i valori delle due successioni.

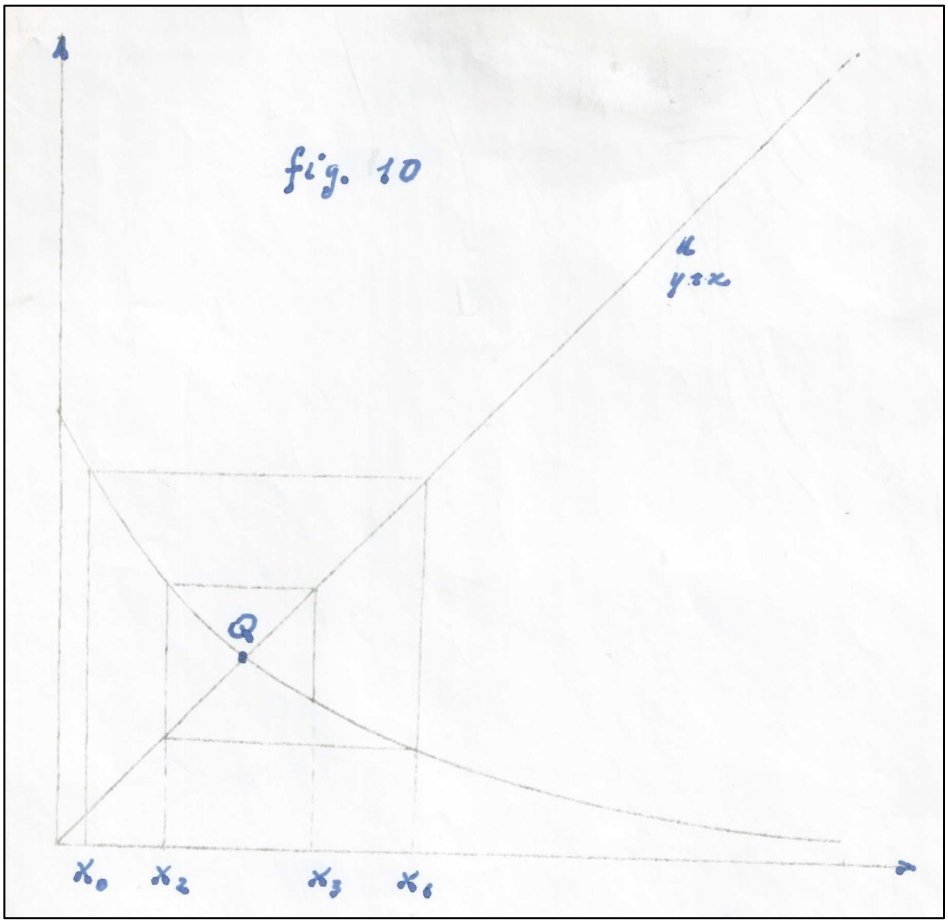


Figura 10

Per dare una visualizzazione abituale dello svolgersi del fenomeno in funzione del tempo occorre riportare sull'asse dei tempi, a distanze tra loro uguali, i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...Allora le ordinate determinate graficamente forniscono la rappresentazione geometrica dello sviluppo temporale del fenomeno considerato.

Un caso concreto interessante di questo schema si ha assumendo come funzione *f* la seguente:

(39) $$f(x) = b/(\alpha\, x + a) \quad ; \quad \alpha,\ a,\ b > 0.$$

La funzione *f(x)* è decrescente per ogni $x > 0$. Inoltre si ha [fig. 10]:

(40) $$f(0) = b/a\ ;$$

(41) $$\frac{df}{dx} = -\alpha b/(\alpha x + a)^2.$$

La condizione (36) è certamente soddisfatta per ogni $x > 0$ se si ha:

(42) $$\alpha b < a^2.$$

Dalle ipotesi si trae facilmente che il grafico della (39) incontra la retta *u*, data dalla (37), nel punto *Q*, la cui ascissa *q* è radice dell'equazione:

(43) $$x\,(\alpha\, x + a) = b.$$

Si ha quindi:

(44) $$q = \frac{\sqrt{a^2 + 4\,\alpha\, b} - a}{2\alpha}\ .$$

Seguendo in questo caso particolare la procedura esposta poco sopra, e scegliendo un valore $z(0) < q$, si possono costruire senza difficoltà le due successioni (38), e verificare concretamente le loro proprietà, che abbiamo enunciato sopra in generale.

4 - Rapporti tra due specie.

A) Schema discontinuo preda-predatore.

Nei paragrafi precedenti abbiamo presentato alcuni schemi di sviluppo di popolazioni, in casi molto elementari. Dedicheremo le pagine che seguono alla presentazione di alcuni casi, pure elementari, di rapporti quantitativi tra popolazioni; in generale tra popolazioni appartenenti allo stesso territorio. Un caso abbastanza interessante di fenomeni di questo genere è fornito dai rapporti tra due specie animali, abitanti sullo stesso territorio, e tali che una delle due specie (che chiameremo predatrice) viva cibandosi degli animali appartenenti all'altra (che chiameremo specie-preda); faremo l'ipotesi che quest'ultima sopravviva sul territorio con i propri mezzi: un esempio tipico di questa situazione è fornito dal caso delle specie erbivore (prede) e carnivore (predatori) viventi sullo stesso territorio. È noto che il rapporto di questo tipo tra due specie è stato oggetto di studi classici. Nel seguito ci soffermeremo a riflettere sul classico sistema di equazioni differenziali che viene chiamato di *Lotka-Volterra*. Tuttavia prima presenteremo un modello elementare, che sfrutta la teoria delle equazioni alle differenze finite.

Il modello che costruiremo secondo questa impostazione può essere giudicato rudimentale, soprattutto in confronto ai modelli classici che abbiamo testé ricordato e che utilizzano lo strumento delle equazioni differenziali. Tuttavia spesso i dati numerici di cui può disporre il ricercatore sono abbastanza scarsi; il che può rendere difficile la ricerca delle costanti caratteristiche che entrano nella modellistica classica. Pertanto - ripetiamo - riteniamo utile che il ricercatore possa disporre di diversi strumenti, così da poter scegliere quello che di volta in volta può ragionevolmente apparire il più adatto ai propri scopi.

Consideriamo ancora un piano in cui sia stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x ed y, così come è stato descritto nel Paragrafo 2 sezione B). Fissiamo una funzione:

(1) $$y = f(x)$$

che sia continua e crescente per $x > 0$; per semplicità e per fissare le idee possiamo scegliere qui una funzione lineare:

(2) $$y = c\,x \quad ; \quad c > 0.$$

Fissiamo poi una seconda funzione:

(3) $$x = g(y) \ ,$$

che sia continua e decrescente per $y > 0$. Ancora per semplicità e per fissare le idee possiamo scegliere una funzione lineare:

(4) $$x = a - b\,y \ ; \ a, b > 0.$$

Scegliamo le funzioni f e g in modo che esista un punto Q di intersezione dei due grafici, ed indichiamo con q (ovviamente maggiore di 0) la sua ascissa. Per esempio, nei casi delle funzioni (2) e (4) si ha facilmente:

(5) $$q = \frac{a}{1+bc}.$$

Anche qui, come abbiamo fatto in precedenza, supponiamo che la variabile temporale t abbia soltanto valori interi, così come è stato fatto nella citata sezione B) del paragrafo 2.

Consideriamo ora due specie di animali, e supponiamo che esse vivano sullo stesso territorio, e che una sia predatrice dell'altra. Indichiamo con $z(t)$ (t intero) il numero degli elementi della specie predatrice che esistono sul territorio nel periodo t; ed indichiamo con $u(t)$ il numero degli elementi della specie predata che pure vivono sullo stesso territorio nel periodo t. Supponiamo ora che i rapporti tra le due specie siano descritti in modo soddisfacente dalle due ipotesi seguenti:

I) Il numero $u(t)$ dei soggetti della specie predata in un periodo t è funzione decrescente del numero dei predatori esistenti nello stesso periodo. Scegliendo in particolare la funzione lineare decrescente (4), l'ipotesi potrà essere espressa dalla seguente relazione:

(6) $$u(n) = a - b\,z(n) \ .$$

II) il numero $z(t)$ (degli elementi della specie predatrice) in un determinato periodo è funzione crescente del numero degli elementi della specie predata esistenti nel periodo precedente. Scegliendo in particolare la funzione crescente (2), l'ipotesi potrebbe essere espressa con la relazione:

(7) $$z(n+1) = c\,u(n).$$

Dal sistema di equazioni alle differenze finite (6) e (7) si traggono le seguenti relazioni:

(8) $$z(n+1) + b\,c\,z(n) = a\,c\,;$$

(9) $$u(n+1) + b\,c\,u(n) = a\,.$$

La soluzione generale della (8) è data da:

(10) $$z(n) = z(0)\,(-bc)^n + \frac{ac}{1+bc} \ .$$

La soluzione generale della (9) è data da:

(11) $$u(n) = u(0)(-bc)^n + \frac{a}{1+bc} \ .$$

In conseguenza delle ipotesi espresse dalle (2) e (4), se è soddisfatta la condizione:

(12) $$bc < 1$$

i valori delle variabili z(n) ed u(n), al tendere all'infinito di n, tendono ai limiti a $\frac{ac}{1+bc}$ ed $\frac{a}{1+bc}$ rispettivamente. Quindi, in queste ipotesi, il fenomeno della relazione tra le due specie, preda e predatrice, tende ad una situazione di equilibrio, la quale tuttavia viene raggiunta con oscillazioni periodiche, a causa del segno alternante dell'addendo $(-bc)^n$ che figura in entrambe le formule (10) ed (11).

Se la (12) non è soddisfatta ed è:

(13) $$bc > 1$$

l'equilibrio non viene raggiunto; le formule teoriche contemplerebbero in questo caso la sparizione di una delle due specie; è tuttavia da tener presente il fatto che in queste condizioni è presumibile che il modello non rispecchi in modo soddisfacente la realtà della situazione esistente. Il caso in cui si abbia

(14) $$bc = 1$$

potrebbe essere considerato come un caso di separazione o di transizione da una situazione ad un'altra. Esso contempla un'oscillazione costante nel tempo attorno ai valori limiti già considerati.

Il modello qui presentato ammette una illustrazione geometrica analoga a quelle già date in precedenza. In questa illustrazione grafica sull'asse delle ascisse si leggono i numeri dei soggetti della specie predata, mentre sull'asse delle ordinate si leggono i numeri dei soggetti della specie predatrice.

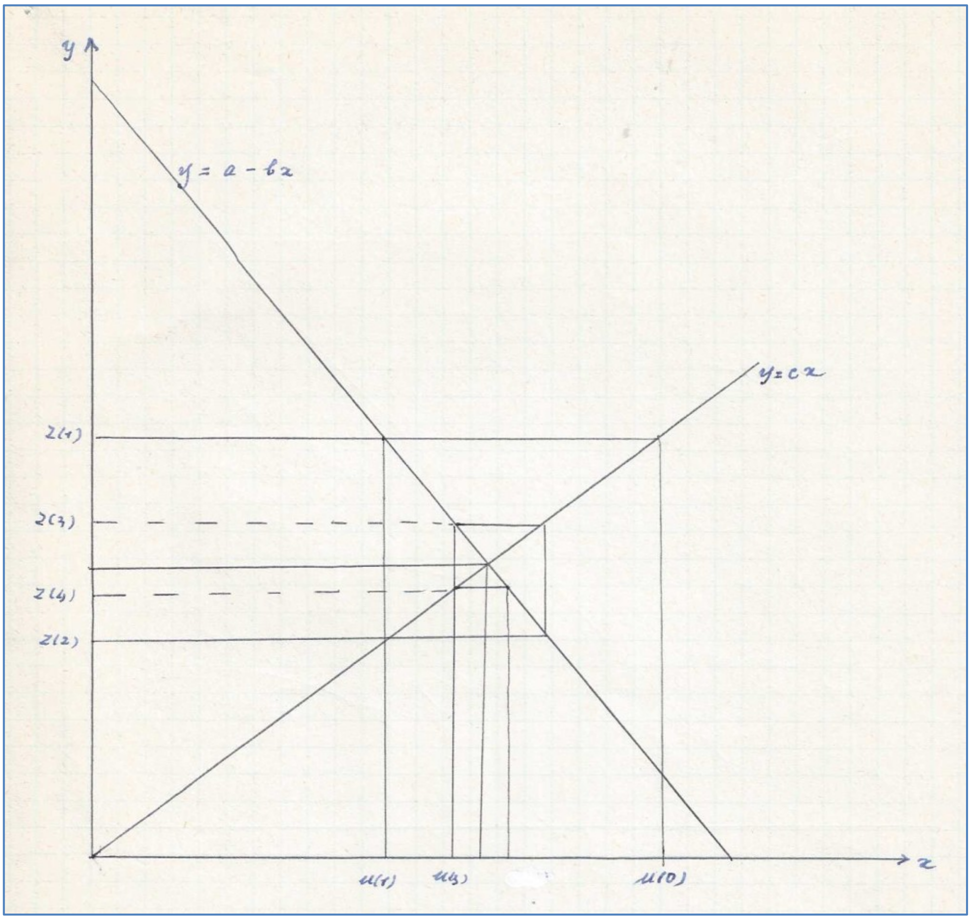


Figura 11

Come esempio, consideriamo una situazione iniziale in cui sia assegnato un numero *u(0)* della specie predata, [fig. 11],superiore al valore (5). Nella illustrazione scelta, in questo caso la retta parallela all'asse delle ordinate passante per il punto di ascissa *u(0)* incontra la retta (2) in un punto che ha ordinata superiore a quella del punto di equilibrio *Q*, e che ha quindi ordinata $z(1)$ (a norma della (7)) superiore al valore limite $ac/(1+bc)$. Quindi la retta parallela all'asse delle ascisse passante per tale punto incontra la retta (4) in un punto la cui ascissa $u(1)$ è a sinistra dell'ascissa limite $a/(1+bc)$. La retta parallela all'asse delle ordinate e passante per il punto di ascissa $u(1)$ incontra la retta (2) in un punto la cui ordinata $z(2)$ è inferiore al valore limite $ac/(1+bc)$.

Mandando per questo punto la parallela all'asse delle ascisse si viene ad incontrare la retta (4) in un punto la cui ascissa $u(2)$ è superiore all'ascissa limite $a/(1+bc)$., ma inferiore ad $u(0)$; la procedura prosegue identificando sulla retta (2) un punto di ordinata $z(3)$, superiore all'ordinata limite $ac/(1+bc)$, ma inferiore a $z(1)$, ecc. Se la condizione è soddisfatta, si ottiene così un diagramma che viene spesso descritto con l'espressione "a ragnatela" e che illustra l'evoluzione del rapporto tra le due specie nelle ipotesi considerate.

La procedura descritta permette la costruzione grafica di due successioni:

(15) $$u(0),\ u(1),\ u(2),\ u(3), \ldots\ldots\ldots,\ u(n), \ldots$$

(16) $$z(1),\ z(2),\ z(3), \ldots\ldots\ldots,\ z(n), \ldots$$

le quali tendono ai valori limiti sopra ricordati, ed i cui termini sono alternativamente superiori ed inferiori ai corrispondenti valori limiti.

AVVERTENZA.
Anche qui, come nella AVVERTENZA apposta al Paragrafo 2, si ricordi che il diagramma finora illustrato permette la costruzione grafica dei valori dei numeri degli elementi delle due popolazioni, ma non rappresenta la loro evoluzione temporale, secondo i canoni abituali con cui si rappresentano graficamente i valori di una funzione di una variabile indipendente. La costruzione di un diagramma che metta in evidenza l'evoluzione di ciascuna delle due popolazioni in funzione del tempo può essere fatta secondo le istruzioni già date nella AVVERTENZA citata, portando in ascisse i valori della variabile temporale, ed in ordinate i valori delle funzioni, determinati graficamente con la procedura illustrata.

OSSERVAZIONE 1. Nell'esempio illustrato abbiamo supposto che le variabili considerate siano legate dalle leggi (2) e (4). Tuttavia abbiamo detto che tali leggi possono essere viste come delle prime rudimentali approssimazioni delle circostanze che si possono incontrare nella realtà; nulla vieta quindi che tali leggi possano essere ritoccate come abbiamo fatto nelle sezioni B) e C) del paragrafo 3, operando come abbiamo ivi fatto con le leggi di sviluppo di una popolazione. È chiaro che in questi casi le condizioni di convergenza del fenomeno verso una situazione di equilibrio debbono essere riesaminate caso per caso.

OSSERVAZIONE 2. Lo schema precedente è stato presentato in relazione ad una situazione concreta: quella della convivenza su un medesimo territorio di due specie con relazione di preda-predatore. Ma esso può essere adoperato anche per descrivere altre situazioni concrete: per esempio per analizzare il comportamento di una determinata specie di fronte a trattamenti antiparassitari periodici; in questo caso l'azione della specie predatrice sarebbe sostituita dal comportamento umano. È chiaro tuttavia che l'efficacia del modello e la sua aderenza alla realtà dipendono dalla misura in cui il comportamento umano risponde alle ipotesi I) e II) che sono state enunciate. Il fatto che il modello possa essere utilizzato anche in contesti diversi da quello presentato all'inizio rende evidente che, nell'immagine geometrica, i due assi cartesiani possono avere graduazioni fatte con diverse unità; ciò vale anche per la presentazione originaria: infatti per esempio la variabile u potrebbe essere assunta a rappresentare non le singole unità della specie preda, ma per esempio le decine di questa.

In modo analogo il significato dei valori limiti può variare da un contesto ad un altro: per esempio nel caso in cui il modello venga utilizzato per rappresentare l'azione di un antiparassitario su una determinata specie di insetti, il valore limite potrebbe avere il significato di frazione della specie considerata che, nelle varie generazioni successive, ha sviluppato una resistenza che rende inefficace il trattamento con le modalità adottate.

B) Schema continuo. Equazioni differenziali di Lotka-Volterra.

Il problema dei rapporti quantitativi tra due specie una delle quali sia preda e l'altra predatrice può essere affrontato anche con strumenti più potenti di quelli esposti nelle righe precedenti; presenteremo qui il classico modello di sistema di equazioni differenziali che vengono abitualmente chiamate *di Lotka-Volterra*,(*) dal nome dei due scienziati che lo hanno escogitato ed utilizzato, indipendentemente l'uno dall'altro.
Indichiamo con N_1 ed N_2 i numeri degli appartenenti alle due specie presenti ed agenti sul territorio considerato. Si fa l'ipotesi che l'evoluzione temporale dei due numeri, e precisamente la velocità di accrescimento di ognuno di essi, sia governata dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 \frac{N_1(K_1 - N_1) - \alpha N_1 N_2}{K_1},$$

(17)

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 \frac{N_2(K_2 - N_2) - \beta N_1 N_2}{K_2}.$$

In ognuno dei primi addendi dei secondi membri di queste equazioni si riconosce la legge di sviluppo secondo la curva logistica [legge esposta sopra nel paragrafo 3 A]; precisamente ciascuna legge è caratterizzata da un tasso istantaneo di crescita e da un massimo carico di presenze per l'ambiente; in ognuna delle equazioni si tiene conto dell'influenza che la presenza dell'altra specie comporta con il secondo addendo, che è caratterizzato, in ciascuna delle equazioni, da un coefficiente numerico (α oppure β rispettivamente).

Non presenteremo qui la discussione completa del sistema di equazioni differenziali (17); ci limiteremo ad una discussione sommaria, che condurremo in forma semplificata sulla immagine geometrica. A questo fine immaginiamo stabilito nel piano il sistema di coordinate cartesiane x ed y che è già stato descritto nel paragrafo 2 sezione B), e trascuriamo il significato delle costanti che figurano nel sistema (17) con riferimento ai problemi concreti.
Assegnando alle variabili i nomi x ed y, il sistema (17) può essere scritto nella forma semplificata seguente:

$$\frac{dx}{dt} = x(A - x - \alpha y)$$

(18) $\qquad A,\ B,\ \alpha,\ \beta > 0$.

$$\frac{dy}{dt} = y(B - y - \beta x)$$

Sempre con riferimento all'immagine geometrica, possiamo quindi supporre che il sistema (18) descriva il movimento nel tempo di un punto $P(x, y)$ nella regione determinata dalle relazioni:

(19) $$0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B \quad .$$

Ovviamente le caratteristiche della traiettoria del punto P dipendono dal segno che, nel rettangolo definito dalle (19), hanno le due funzioni:

(20) $$f(x,y) = A - x - \alpha y, \quad g(x,y) = B - \beta x - y \quad .$$

Chiamiamo u la retta rappresentata dall'equazione:

(21) $$f(x,y) = 0,$$

e chiamiamo v la retta rappresentata dall'equazione:

(22) $$g(x,y) = 0.$$

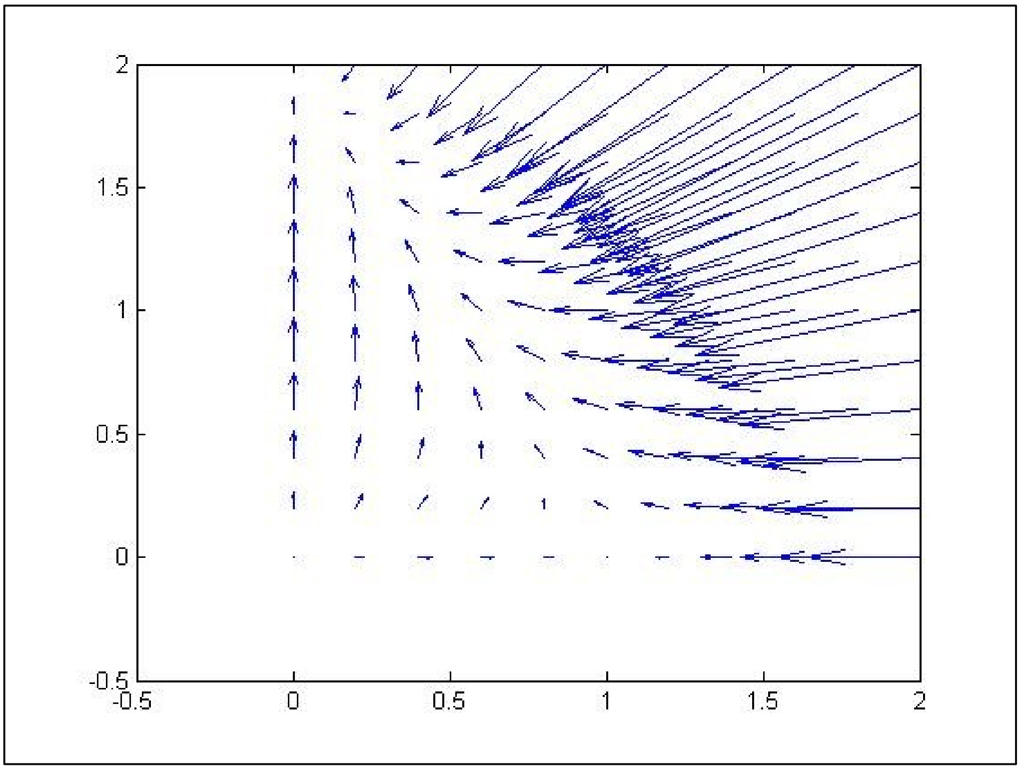
Dalle equazioni (21) e (22), e dalle ipotesi (18), si conclude che la retta u passa per il punto di coordinate $(A, 0)$, e la retta v passa per il punto di coordinate $(0, B)$. Sempre dalle ipotesi (18) si trae che entrambe le rette penetrano nell'interno del rettangolo definito dalle relazioni (19). Per quanto riguarda il possibile comportamento reciproco delle due rette, prenderemo in considerazione i casi seguenti:

I) Le due rette u e v non si incontrano nell'interno del rettangolo definito dalle (19).

Questo caso, a sua volta, dà luogo a considerare due sottocasi:

Ia) Si ha:

(23) $$A/\alpha < B \qquad ; \qquad B/\beta > A$$



Schizzo del campo di direzioni per il sistema: x (1 –x –y) = x', y (2 –y – x) = y'. Si ha: A = (1, 0), B = (0, 2).

La posizione reciproca delle due rette u e v in questo caso è illustrata schematicamente dalla figura 12.

Ib) Si ha:

(24) $A/\alpha > B \quad ; \quad B/\beta < A$

La posizione reciproca delle due rette u e v in questo caso è illustrata schematicamente dalla figura 13.

In entrambi questi casi le due rette u e v dividono il rettangolo definito dalle relazioni (19) in 3 regioni. Nelle figure allegate in ognuna di esse è rappresentato convenzionalmente il comportamento delle due funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ mediante uno dei simboli (+,+), (+,-), (-,+), e (-,-), che forniscono i segni delle due funzioni nella regione e che quindi informano sul fatto che ognuna di esse sia crescente oppure decrescente. Queste informazioni costituiscono il primo passo per la discussione approfondita sull'andamento delle funzioni (e quindi sulla traiettoria del punto P in funzione del tempo), discussione che qui tralasciamo.

II) Le due rette u e v si incontrano nell'interno del rettangolo definito dalle (19).

Anche questo caso dà luogo a considerare due sottocasi:

IIa) Si ha:

(25) $A/\alpha > B \quad ; \quad B/\beta > A$

In questo caso il punto di intersezione delle due rette sta al di sopra della retta congiungente i due punti $(A,0)$ e $(0,B)$.

La posizione reciproca delle due rette u e v in questo caso è illustrata schematicamente dalla figura 14.

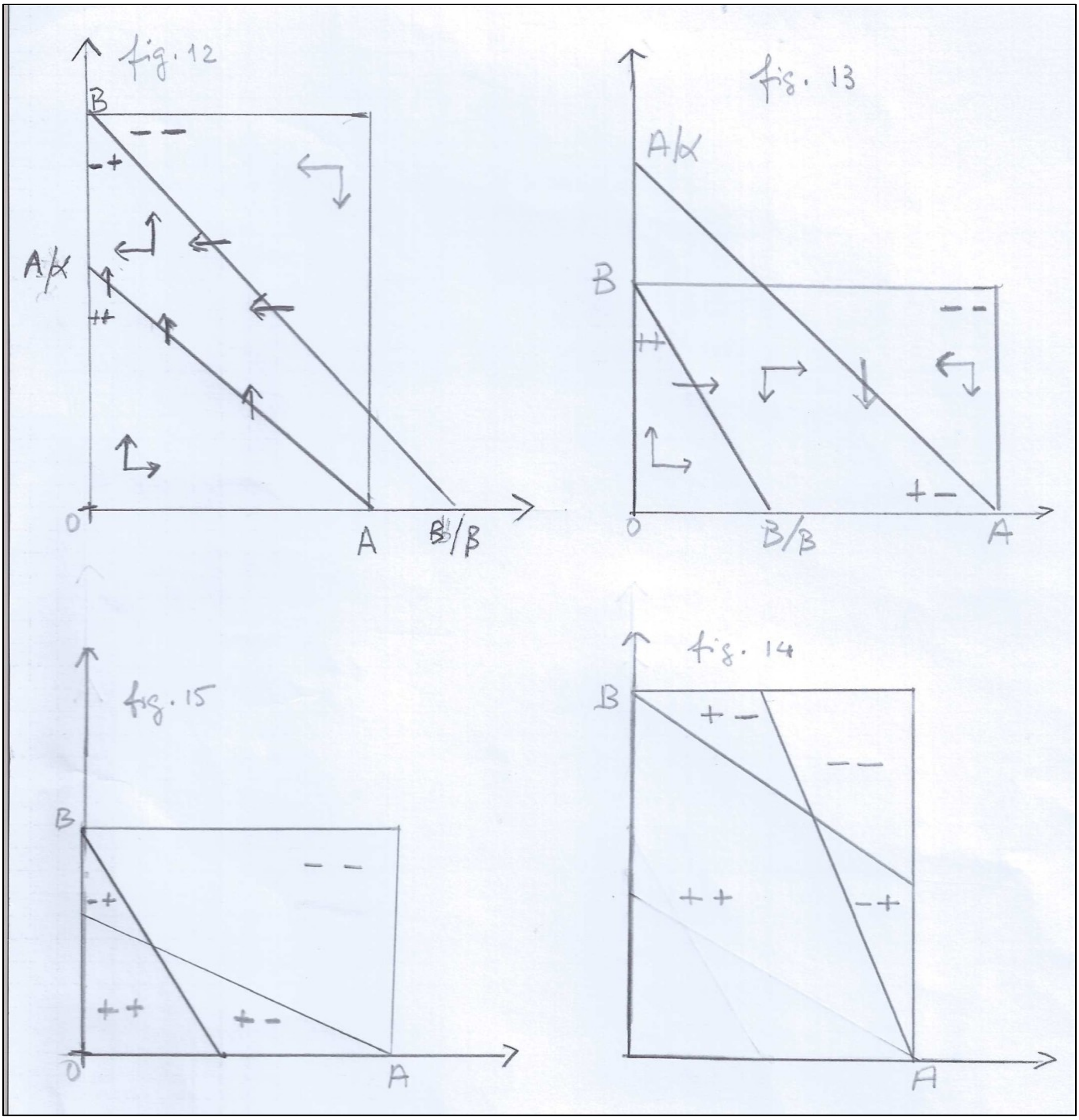
IIb) Si ha:

(26) $A/\alpha < B \quad ; \quad B/\beta < A$

In questo caso il punto di intersezione delle rette u e v sta al di sotto della retta congiungente i due punti $(A, 0)$ e $(0, B)$.

La posizione reciproca delle due rette u e v in questo caso è illustrata dalla figura 15.

In entrambi questi casi, IIa) e IIb), le rette u e v dividono il rettangolo definito dalle relazioni (19) in 4 regioni. Anche qui abbiamo indicato con un simbolo la coppia di segni delle due funzioni f e g in ognuna delle regioni; anche in questi casi la determinazione dei segni delle funzioni considerate è il primo passo per la discussione ulteriore del comportamento delle funzioni stesse; discussione che omettiamo, e che richiede un'analisi approfondita riguardante i valori numerici delle costanti coinvolte nelle equazioni (18). Inoltre la determinazione della traiettoria del punto P, e quindi la precisazione dello svolgimento del fenomeno rappresentato, richiede ulteriormente la considerazione dei valori iniziali delle variabili x, y.



NdR

(*)Modello di Lotka-Volterra *con correzione logistica*.

C.F. Manara. *Successioni ed equazioni alle differenze finite*. Period. Mat. (4), 41 (1963), 129-160.

In rete si può vedere:

http://matematica.unibocconi.it/articoli/laboratorio-di-informatica-il-modello-predatore-preda-di-volterra

Weisstein, Eric W."Lotka-Volterra Equations." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Lotka-VolterraEquations.html

Appunti dattiloscritti rieditati, gennaio 2015