Domus dell'Ortaglia, Museo della Città, Brescia.

MOVIMENTI RIGIDI POLARI NELLO SPAZIO EUCLIDEO

> *...la semplice immaginazione non implica per sua natura alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta, ma, per poter essere certi delle cose che immaginiamo, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, e cioè il ragionamento ....*
> [Baruch Spinoza. Tractatus theologico-politicus]

1 - Notazioni ed operazioni fondamentali.

Indicheremo con V lo spazio vettoriale reale a tre dimensioni. Con il simbolo:

$$(1)\ \ u = [a, b, c]$$

indicheremo che il vettore u ha come componenti, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, i numeri reali a, b, c.

AVVERTENZA. Senza particolari avvisi, da darsi esplicitamente di volta in volta, un vettore sarà immaginato come una matrice (1,3), cioè, come suol dirsi, come un "vettore-riga". Il corrispondente "vettore-colonna", matrice di tipo (3,1), sarà indicato col simbolo u^T, apponendo l'operatore di trasposizione T al simbolo del vettore considerato. Come è noto, tale operatore è sottoposto alle leggi sintattiche:

$$(2)\ [u+v]^T = u^T + v^T \ \ ;\ \ (u^T)^T = u.$$

Indicheremo con il simbolo consueto $|u|$ il numero reale che è il modulo del vettore u, ed è quindi definito dalla relazione:

$$(3)\ \ |u|^2 = u \cdot u^T = \ a^2 +\ b^2 +\ c^2.$$

Se $u \neq 0,$ il versore del vettore u sarà indicato con il simbolo $u°$, ponendo quindi:

$$(4)\ \ u° = \frac{u}{|u|}\,.$$

Consideriamo, accanto al vettore u dato dalla (1), anche il vettore:

$$(5)\ v = [p, q, r],$$

e per $u, v \neq 0$ indichiamo col simbolo $H(u,v)$ (Diade di Gibbs) l'operatore:

$$(6)\ H(u,v) = \frac{u^T \cdot v}{|u||v|} = \frac{1}{|u||v|}\begin{bmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE 1 - La matrice che compare nella (6) è di rango non superiore ad 1; e viceversa si dimostra che ogni matrice di rango 1 può essere rappresentata (in infiniti modi) nella forma (6).

OSSERVAZIONE 2 - La matrice $H(u,v)$ è un operatore degenere sullo spazio vettoriale V: infatti, quale che sia il vettore $x \in V$, si ha che il vettore:

$$(7)\ y = x \cdot H(x,v)$$

è parallelo al vettore v.

Supponiamo ora che si abbia in particolare:

$$(8)\ u = v,$$

e poniamo

$$(9)\ \ K(u) = H(u,u) = \frac{1}{u \cdot u^T}\, u^T \cdot u.$$

OSSERVAZIONE 3 - Sono valide le relazioni seguenti:

$$(10)\ \ [K(u)]^2 = K(u),$$

ossia l'operatore K è idempotente; inoltre, detto ϑ l'angolo formato da u e v, si ha:

$$(11)\ \ K(u) \cdot K(v) = H(u,v)\cos\vartheta.$$

2 - Simmetrie nello spazio vettoriale.

Sia dato $u \in V$, con u diverso da zero; si consideri l'operatore:

$$(1)\ \ S(u) = 2K(u) - I.$$

L'operatore $S(u)$ possiede le proprietà seguenti:
I) $S(u)$ ammette come vettori uniti tutti i multipli di u; in formule, indicato con α un numero reale qualunque, si ha:

$$(2)\ (\alpha\, u) \cdot S(u) = \alpha\, u.$$

II) $S(u)$ è involutorio; in formule:

$$(3) [S(u)]^2 = I.$$

La dimostrazione di questa proprietà consegue dalla (1) e dalla (1.10) del paragrafo precedente.

III) $S(u)$ conserva i prodotti scalari dei vettori di V. In formule:

(4) se è $y = x \cdot S(u)$ ed anche $w = z \cdot S(u)$ segue:

$$(5)\ x \cdot z^T = y \cdot w^T.$$

La dimostrazione di questo fatto si consegue osservando che l'operatore (1), in forza delle definizioni (1.6), (1.9), è simmetrico, cioè autotrasposto; in altri termini si ha:

$$(6)\ (S(u))^T = S(u),$$

e quindi, dalle (4):

$$(7)\ w^T = S(u) \cdot z^T\ ;$$

e di qui e dalla (3) consegue la (5). QED.

Dalle proprietà ora messe in evidenza si deduce quindi che l'operatore $S(u)$ rappresenta una simmetria dello spazio vettoriale V, oppure, in altri termini, una rotazione (rigida) di questo spazio di 180° attorno alla retta del vettore u (asse di rotazione).

OSSERVAZIONE 4 – Modificando la (1), per $u = 0$ poniamo:

$$(6)\ S(0) = -I.$$

Questa particolare involuzione è permutabile con ogni trasformazione lineare di V in se stesso, e quindi anche con ogni S. Si consideri ora un vettore z perpendicolare ad u; valga cioè la:

$$(7)\ \ z \cdot u^T = 0.$$

Segue di qui:

$$(8)\ z\cdot K(u) = 0,$$

e quindi, da questa e dalla (1),

$$(9)\ z\cdot S(u) = -z.$$

Pertanto su tutti i vettori z perpendicolari ad u la $S(u)$ agisce come la involuzione particolare $S(0)$, data dalla (6).

OSSERVAZIONE 5 - Si dimostra senza difficoltà che la proprietà I) caratterizza i vettori multipli di u; in altre parole tali vettori sono i soli dello spazio V che sono uniti per $S(u)$. Supponiamo infatti che si abbia:

$$(10)\ x = x\cdot S(u) = 2x\cdot K(u) - x;$$

da qui si trae :

$$(11)\ x = x\cdot K(u);$$

ma l'operatore K è degenere (Oss.2) e porta ogni vettore di V in un multiplo di u; quindi la (11) non può sussistere se x non è parallelo ad u. E da questa osservazione e dalla (2) segue la proposizione. QED

3 - Prodotti di due operatori di simmetria.

Siano u e v due versori, si abbia cioè:

$$(1)\ |u| = |v| = 1.$$

Indichiamo con il simbolo $R(u,v)$ l'operatore prodotto di $S(u)$ per $S(v)$; poniamo cioè:

$$(2)\ R(u,v) = S(u)\cdot S(v) = I - 2K(u) - 2K(v) + 4H(u,v)\cdot\cos\vartheta.$$

OSSERVAZIONE 6 - La $R(u,v)$ è un'isometria, perché tali sono le $S(u)$ ed $S(v)$ (Cfr. 2.5).

OSSERVAZIONE 7 - Sia z perpendicolare ad u ed a v; si abbia cioè:

$$(3)\ z\cdot u^T = z\cdot v^T = 0.$$

Dalla (2) si trae allora che, quale che sia il numero reale a, si ha:

$$(4)\ (az)\cdot R(u,v) = az.$$

In altri termini, i vettori perpendicolari ad u ed a v sono uniti per l'operatore $R(u,v)$.

OSSERVAZIONE 8 - I soli vettori uniti per la $R(u,v)$ sono multipli del vettore z, perpendicolare ad entrambi i versori u e v. Sia infatti x un vettore unito; si abbia cioè:

$$(5)\ x\cdot R(u,v) = x.$$

Da questa ipotesi, e dalle (2) e (2.3), si trae:

$$(6)\ x\cdot S(u) = x\cdot S(v).$$

Questa relazione, conseguenza necessaria dell'ipotesi (5), è soddisfatta quando x coincida con un vettore z che soddisfa alle (3); altrimenti non può essere soddisfatta da un vettore x non nullo, perché, come è stato già detto (come conseguenza della Oss. 2 e della definizione 1.9), ogni operatore $S(u)$ ed $S(v)$ è degenere, e fa corrispondere ad un vettore qualunque $x \in V$ un vettore multiplo rispettivamente di u e di v; quindi ovviamente ad un medesimo x corrisponderebbero due vettori diversi tra loro.

Applicando l'operatore $R(u,v)$ al versore u, e detto sempre ϑ l'angolo formato da u e v, si ottiene:

$$(7)\ u\cdot R(u,v) = 2\,v\cos\vartheta - u,$$

e quindi:

$$(8)\ (u\cdot R(u,v))\cdot u^T = 2\cos^2\vartheta - 1 = \cos 2\vartheta.$$

In generale: dato un versore x appartenente al piano di u e di v, tale cioè che si abbia:

$$(9)\ x = \alpha\, u + \beta v\ ;\ |x| = 1,$$

si verifica che vale la seguente relazione:

$$(10)\ (x\cdot R(u,v))\cdot x^T = \cos 2\vartheta.$$

Si conclude quindi che l'operatore $R(u,v)$ rappresenta una rotazione rigida dell'intero spazio V attorno all'asse z (dato dalle (3)) di un angolo doppio dell'angolo dei due versori u e v.

OSSERVAZIONE 9 - Da ciò che precede, ed in particolare dall'Oss. 8, si ha che se una operazione R ha due vettori uniti che non siano multipli l'uno dell'altro essa è l'identità.

4 - Casi particolari: terne trirettangole e Vierergruppe**.**

Consideriamo in particolare i tre vettori unitari:

(1) e_1 = [1,0,0] ; e_2 = [0,1,0] ; e_3 = [0,0,1].

Si ha per esempio:

$$(2)\ K(e_1) = e_1{}^T \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E quindi:

$$(3)\ S(e_1) = 2K(e_1) - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si ritrova così, sotto questa forma, la rotazione di 180° attorno al vettore e_1. In modo analogo si ottengono le espressioni delle altre due rotazioni di 180° attorno ai vettori e_2 ed e_3, e quindi si ritrova il Vierergruppe, con le sue proprietà formali.

Sia ora:

(4) u = [1, -1, 1]

e consideriamo la *K(u)* data da:

$$(5)\ K(u) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e la *S(U)* data da:

$$(6)\ S(u) = 2\,K(u) - I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli:

$$(7)\ U = S(e_1) \cdot S(u) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE 10 - Questo operatore può essere considerato come prodotto di TRE operatori *S*: infatti, per le proprietà del Vierergruppe, si può scrivere:

$$(8)\ S\,(e_1) = S(e_2) \cdot S(e_3).$$

Si ricordi ora la Oss. 1, e la definizione (2.1); in forza di questa, se la *U*, data dalla (7), fosse una *S*, allora la *U*+*I* sarebbe una *K*, e quindi la matrice corrispondente avrebbe rango 1. Ma la *U* + *I* corrisponde alla matrice:

$$(9)\ U + I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

che non ha rango 1.

Osservazione.

I contenuti geometrici che precedono non hanno nulla di nuovo e di originale, perché sono noti, sotto varie forme, fino dal secolo XVIII. Essi vengono presentati soltanto come modelli concreti, dai quali partire per una assiomatizzazione astratta di insiemi bidimensionali analoghi alla superficie della sfera, o dell'ellissoide.

A tal fine osserviamo che, dato un insieme Σ, appare forse utile presentare in primis una involuzione assoluta *A* nell'insieme, che dovrebbe essere rappresentata dalla *S(0)* di (1.6) [corrispondenza tra punti diametralmente opposti nella sfera o tra vettori opposti della stella]. Infatti si potrebbero costruire poi i sottoinsiemi *G(a, b)* [Gerade].

Ma per costruire l'insieme dei *G* occorrono degli assiomi come per es. i seguenti:

AX 1 - $\forall\ (a, b)\ ,\ b \neq a\,A,\ \exists!\, G(a, b)$.

(Per tutte le coppie (*a*,*b*) di elementi dell'insieme, se *b* è diverso dall'elemento *aA*, esiste un unico sottoinsieme *G(a,b)*.)

AX 2 - $\forall\ (a, b),\ G(a, b) = G(b, a)$.

AX 3 - $\forall\ (a, b)$, $a \in G(a,b)$ & $b \in G(a,b)$.

AX 4 - $\forall\ (a, b)$, $aA \in G(a,b)$ & $bA \in G(a,b)$.

AX 5 - $\forall\ a, b, c,\ c \neq a\,A$ & $b \neq a\,A$ & $c \in G(a, b) \rightarrow\ b \in G(a, c)$.

(Un sottoinsieme G è determinato da due qualsivogliano suoi punti, purché non diametralmente opposti [*coetera desiderantur*]).

Febbraio 1995.

NdR. Reimpaginato marzo 2014.