Carlo Felice MANARA

SUI TRIANGOLI ERONIANI

Nella geometria elementare i problemi riguardanti i triangoli che vengono tradizionalmente chiamati *eroniani* sono classici; la loro soluzione è nota da tempo ed è dovuta a grandi maestri della matematica. Da tempo quindi sono noti dei sistemi di formule che forniscono tutti i triangoli eroniani; rimane tuttavia il desiderio di conoscere alcune procedure per costruire le rappresentazioni dei triangoli in parola. Tali procedure fanno spesso ricorso a calcoli algebrici che a qualcuno potrebbero dare l'impressione di artificiosità. Non mancano tuttavia delle procedure che si fondano sulle immagini geometriche: vogliamo citare in particolare l'articolo di Giuseppina Biggiogero, comparso sul "Periodico di Matematiche" (Serie IV, Vol. VII, MCMXXVII, pag. 82) intitolato: "I triangoli Eroniani dal punto di vista della geometria algebrica". In tale articolo l'Autrice osserva che, con la procedura da lei esposta, "*…la ricerca delle formule risolutive per i triangoli Eroniani cessa di dipendere da più o meno eleganti artifici aritmetici."*

Nelle pagine che seguono cercheremo di adottare lo stesso spirito, presentando altre procedure geometriche, le quali, ovviamente, non hanno pretese di originalità, ma potrebbero forse costituire utili occasioni per mostrare quanto l'illustrazione geometrica possa giovare nel suggerire le soluzioni di alcuni problemi matematici.

Come è noto, secondo la definizione classica, un triangolo si dice *eroniano* se i suoi lati e l'area sono numeri interi.

AVVERTENZA. Nel seguito adotteremo le convenzioni abituali per indicare un triangolo ed i suoi elementi. Precisamente, chiamando T il triangolo considerato, adotteremo i seguenti simboli: indicheremo i vertici con A, B, C; e rispettivamente le lunghezze dei lati opposti (in una unità fissata) con a, b, c. Indicheremo le misure degli angoli con le lettere greche α, β, γ. Indichiamo poi con S la misura dell'area, e con R il raggio della circonferenza circoscritta.

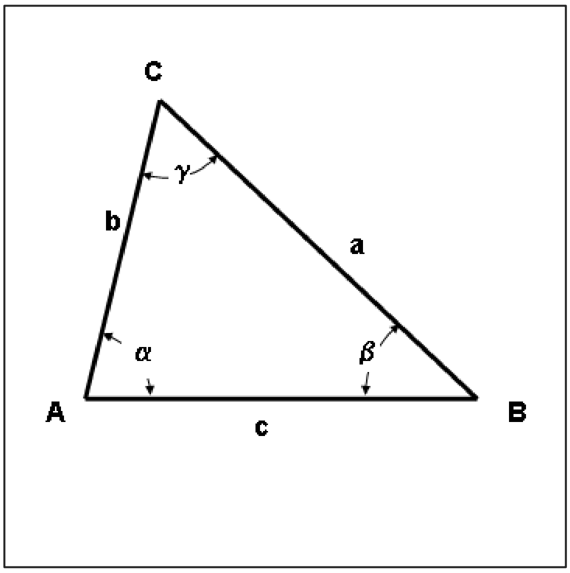


Figura 1

Dalle note formule di trigonometria:

$$(1)\quad 2S = ab\ \sin\gamma; \qquad 2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\ \ (\textit{teorema dei seni}),$$

si trae la relazione:

$$(2)\ \ abc = 4\,RS\,.$$

Consegue di qui la proposizione:
In un triangolo, se i lati hanno misure razionali, in particolare intere, il raggio della circonferenza circoscritta e la misura dell'area sono insieme razionali oppure irrazionali.
Richiamiamo infine la formula di Erone:

$$16\,S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c) = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

OSSERVAZIONE. Poiché la scelta dell'unità di misura dei segmenti è libera, possiamo occuparci del problema di ricercare i triangoli per i quali le misure dei lati e della superficie siano tutti numeri razionali. Dalla soluzione di questo problema si passa facilmente alla determinazione dei corrispondenti triangoli per i quali le misure in parola siano date da numeri interi: ovviamente, per ogni cambiamento dell'unità di misura dei segmenti, nella (2) ognuno dei numeri a, b, c, R verrebbe moltiplicato per una medesima costante k, ed S verrebbe moltiplicato per k^2. Ciò premesso, presentiamo delle illustrazioni geometriche per la ricerca di triangoli eroniani.

PRIMA PROCEDURA

Scegliamo come unità di misura dei segmenti il lato c del triangolo. Riscriviamo la formula (*) ponendo:

$$(3)\ \ a = x;\ b = y;\ c = 1;\ S = z.$$

Si ottiene:

$$(4)\ \ 16\,z^2 = (x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(-x+y+1).$$

Interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di punto nello spazio, il problema di determinare i triangoli eroniani può essere illustrato geometricamente come problema della ricerca di punti a coordinate tutte razionali sulla superficie del IV ordine rappresentata dalla equazione (4).

La sezione della superficie in parola con il piano $z = 0$ è una curva del IV ordine che è degenere in quattro rette ed ha quindi 6 punti doppi. Indicheremo con Γ tale curva.

Rappresentiamo il fascio di rette parallele a due rette di Γ nella forma:

$$(5)\ y = x + h,\ h \text{ parametro reale.}$$

Con la sostituzione (5) i quattro polinomi lineari in x ed y che figurano al secondo membro della (4) vengono rappresentati (nell'ordine) dalle espressioni:

$$(6)\ 2x + (1+h)\ ;\ \ 2x + (h-1);\ \ 1-h;\ \ 1+h.$$

Imponiamo ora al parametro h la limitazione:

$$(7)\ |\,h\,| < 1,$$

che sarà giustificata in seguito, e poniamo:

$$(8)\ s = 1 + h\quad ;\quad d = 1-h.$$

Con queste posizioni i quattro polinomi (6) vengono scritti nella forma:

$$(9)\ 2\,x+s\ \ ;\ \ 2\,x-d\ \ ;\ \ s\ \ ;\ \ d;$$

e possiamo osservare che, in conseguenza della limitazione (7), i parametri s e d sono positivi. Con questi simboli la formula (4) viene scritta nella forma:

$$(10)\ 16\,z^2 = (2x+s)(2x-d)s\,d,$$

e ponendo:

$$(11)\ \ A = \frac{16}{sd}\,,$$

con pochi e facili passaggi di calcolo si ottiene la relazione:

$$(12)\ \ A\,z^2 = (2x+h)^2-1 = (2x+h+1)(2x+h-1).$$

Fissato ora un secondo parametro m, possiamo porre

$$(13)\ \ \ z = 2mx + ms,\ \ Amz = 2x - d.$$

Risolvendo il sistema lineare (13) e ricordando le posizioni (3) si ottiene:

$$(14)\ S = \frac{2m}{1-A\,m^2}\ ;\ 2x = \frac{A\,s\,m^2+d}{1-Am^2}\ .$$

Se ai parametri h ed m si assegnano valori razionali, le (14) e (5), (6) forniscono valori razionali pure ad x, y, S, R. Tuttavia, dato il significato geometrico dei parametri e delle incognite, occorre porre delle limitazioni alla scelta dei parametri h ed m. Tali limitazioni si possono esprimere con le diseguaglianze:

$$(15)\ m > 0\ ;\ 1 - Am^2 > 0.$$

La seconda delle relazioni (15) potrebbe trovare una illustrazione geometrica interpretando h ed m come coordinate cartesiane ortogonali in un piano cartesiano (che possiamo chiamare ausiliario), riferito a coordinate X ed Y, ponendo:

$$(16)\ h = X, m = Y.$$

Allora si può illustrare la seconda relazione (15) dicendo che il punto di coordinate h, m nel piano ausiliario deve essere scelto nel quadrante positivo ed inoltre all'interno di una ellisse riferita al centro ed agli assi, di semiassi 1 ed $\frac{1}{4}$.

ESEMPIO.

Scegliendo i valori:

$$(17)\ h = \frac{1}{10}\quad ;\quad m = \frac{1}{5}$$

si ottengono i seguenti valori per i lati, la superficie ed il raggio R della circonferenza circoscritta:

$$(18)\ a = \frac{319}{70}\ , b = \frac{333}{140}, c = 1, S = \frac{198}{175}, R = \frac{1073}{896}.$$

SECONDA PROCEDURA

Inscriviamo il triangolo cercato in una circonferenza di raggio 1; facciamo quindi nella (2):

$$(19)\ R = 1.$$

In un piano cartesiano, riferito a coordinare ortogonali x, y, sia:

$$(20)\ 2\,x = x^2 + y^2$$

l'equazione della circonferenza Γ in cui è inscritto il triangolo cercato; senza lesione della generalità scegliamo uno dei vertici nel punto O, che è l'origine degli assi coordinati. Scegliamo un parametro m che sia un numero razionale: sia dunque

$$(**)\ m\ \in\ Q$$

e consideriamo la retta per O di equazione

$$(21)\ y = m\,x.$$

Questa interseca la circonferenza Γ nel punto A, le cui coordinate (ovviamente razionali), sono:

$$(22)\ x = \frac{2}{1+m^2}\ ,\ y = \frac{2m}{1+m^2}\ .$$

Indichiamo con a la misura del segmento di estremi O ed A, e poniamo:

$$(23)\ \alpha^2 = 1 + m^2,$$

avendosi ovviamente, dalle (20) e (22):

$$(24)\ x^2 + y^2 = \frac{4}{\alpha^2}.$$

Ora la (23) si può soddisfare ponendo:

$$(25)\quad \alpha = \frac{t+\frac{1}{t}}{2}\,,\quad m = \frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,,$$

e le formule (25) danno numeri razionali quando *t* sia un numero razionale. Pertanto dalle (21) e (22) si trae:

$$(26)\ a = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2}{\alpha} = \frac{4t}{t^2+1}\,.$$

In altre parole, quando *t* sia un numero razionale, la corda di estremi *O*, *A* della circonferenza *Γ* ha una lunghezza misurata da un numero razionale, quando l'unità di misura sia il raggio della circonferenza in parola. Utilizzando ora le (22) e (25) si possono esprimere le coordinate del punto *A* in funzione del parametro *t*. Si ottengono così le formule:

$$(27)\quad x = \frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\ ;\ y = \frac{4t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,.$$

Nulla vieta che il procedimento sia ripetuto, scegliendo un numero razionale *n*, considerando una retta di equazione:

$$(28)\quad y = n\,x,$$

la quale determina un punto *B* sulla circonferenza *Γ*. I calcoli eseguiti poco sopra permettono di esprimere le coordinate di *B* come funzioni di un parametro razionale *u* nella forma:

$$(29)\quad x = \frac{8u^2}{(u^2+1)^2}\ ;\ y = \frac{4u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}\,.$$

Ed analogamente, indicando con *b* la lunghezza del segmento *OB*, si ha dalla (26):

$$(30)\quad b = \frac{4u}{u^2+1}\,.$$

Le formule (27) e (29) permettono di determinare la superficie *S* del triangolo di vertici *O*, *A*, *B*. Tale superficie vale la metà del determinante di una matrice quadrata del II ordine, le cui due righe sono fornite dalle coordinate dei punti *A* e *B*, espresse dalle formule (27) e (29). Calcolando tale determinante si ottiene:

$$(31)\quad S = \frac{16\,t\,u\,(t-u)(t\,u+1)}{((t^2+1)(u^2+1))^2}\,.$$

L'equazione (2) permette poi di determinare il numero razionale che è la misura del lato *c*.

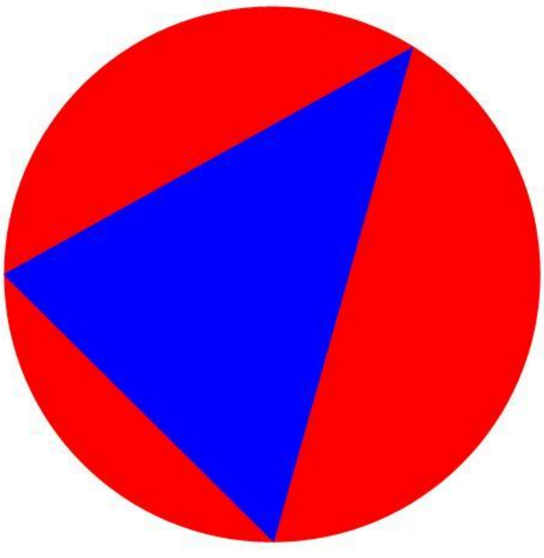


Figura 2

Esempio (vedi fig.2).

Assegnato a t il valore:

$$(32)\quad t = 17/10,$$

se ne deducono i valori:

$$(33)\quad x = \frac{231200}{151321} \approx 1{,}528\ ,\ \ y = \frac{128520}{151321} \approx 0{,}849 \ \text{(coordinate cartesiane di } A\text{);}$$

$$a = \frac{680}{389} \approx 1{,}748 \ \text{(lunghezza } a \text{ del lato } OA\text{).}$$

E assegnato a u il valore:

$$(34)\ u \ = \ -12/5,$$

se ne deducono i valori:

$$(35)\ \ x \ = \ 28800/28561 \ \approx 1{,}0008,\ \ y \ = \ -28560/28561 \approx \ -0{,}99999 \text{ (coordinate di } B\text{);}$$

$$b \ = \ |-240/169| \ \approx 1{,}420 \text{ (lunghezza } b \text{ del lato } OB\text{).}$$

Per i valori scelti di t ed u la formula (31) conduce al seguente valore dell'area S:

$$(36)\quad S = 5152224000/4321879081 \ \approx 1{,}185.$$

NOTA. Si potrebbe porre il problema se la procedura abituale, che conduce a costruire triangoli eroniani "accostando" due triangoli pitagorici ciascuno dei quali ha un cateto uguale ad uno dell'altro, dia lo stesso insieme di triangoli eroniani che si ottengono con la seconda procedura qui sopra esposta.

A questo proposito si verifica che ogni triangolo che si ottiene con la seconda procedura in parola può considerarsi ottenuto "accostando" due triangoli pitagorici opportuni. (Vedi fig. 3). Per farlo vedere, riprendiamo ad usare le convenzioni abituali per designare gli elementi del triangolo che abbiamo ricordate all'inizio (come in fig. 1).

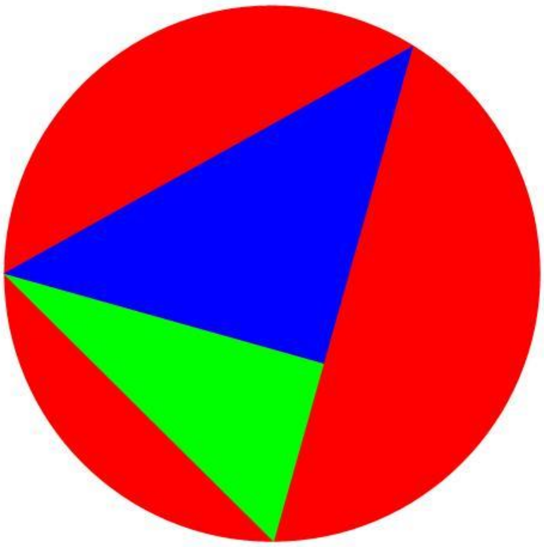


Figura 3

Sia H il piede della perpendicolare calata dal vertice A sul lato apposto BC. La misura h del segmento AH si calcola con la formula $h = \frac{2S}{a}$ ed è ovviamente razionale. Il triangolo di vertici ACH è ovviamente rettangolo in H. Detta x la misura di HC, applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli ACH e ABH si ottiene l'uguaglianza

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

dunque anche il segmento *HC* ha misura razionale, e quindi il triangolo *ACH* è pitagorico. Ragionamenti analoghi valgono ovviamente anche per il triangolo *ABH*.

5 Maggio 2002

(STUDI sul problema proposto nella rivista "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", Vol. 24B N.5 – Ottobre 2001, pag. 465 et sqq. Rubrica "Questioni da discutere". Sottotitolo "Poligoni a lati razionali".
NOTA . A pag. 458 dello stesso numero della rivista è riportata la definizione di triangolo eroniano ed alcune soluzioni date dal prof. Spartaco Spadon (Rovigo).
Secondo la definizione, un triangolo si dice *eroniano* se i suoi lati e l'area sono numeri interi. Si pone il problema di determinare il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo eroniano.)

NdR
Testo reimpaginato in gennaio 2014

In Rete, fra i moltissimi riferimenti ricordo
http://mathworld.wolfram.com/HeronianTriangle.html

Oltre all'articolo di Giuseppina Biggiogero citato nel testo, ricordiamo l'articolo di Modesto Dedò: "*Triangoli pitagorici e triangoli eroniani*". Periodico di Matematiche, Vol.XXXIX, (1961), pp.160–163.
Li alleghiamo entrambi, perché certamente non facilmente reperibili.

Modesto Dedò.

Triangoli pitagorici e triangoli eroniani

1. - È ben noto che si chiama *pitagorico* un triangolo rettangolo i cui lati si possano esprimere (con una certa unità di misura) mediante tre numeri razionali x, y, z; e quindi si possono anche esprimere (con altra conveniente unità di misura) mediante numeri *interi*.

Sono anche ben note le varie risoluzioni del problema della ricerca di tutti i triangoli pitagorici (1).

Voglio qui presentare una risoluzione, del tutto elementare, di questo problema, la quale è basata sull'osservazione banalissima che *un problema di primo grado ha soluzioni razionali.*

Infatti consideriamo, ad esempio, il

PROBLEMA: *Trovare i lati* x, y, z *di un triangolo rettangolo del quale si conosca un cateto* $x = u$ *e la differenza degli altri due lati* $z - y = v$.

La risoluzione di questo problema (di primo grado) dà x, y, z come funzioni razionali dei parametri u e v. Pertanto ad ogni coppia di numeri razionali u, v corrisponde una terna di numeri razionali x, y, z i quali sono le misure dei lati di un triangolo pitagorico. Inversamente ogni triangolo pitagorico dà luogo a valori razionali di u e v. Potremo quindi affermare che le formule risolutive del nostro problema daranno, al variare di u e v nel campo razionale, *tutti* i triangoli pitagorici.

---

(1) La risoluzione più notevole (KLEIN) è quella che riconosce l'identità di questo problema con quello della ricerca dei punti razionali di un cerchio di raggio unitario.

Sviluppando i calcoli si arriva rapidamente alle solite formule: si ha infatti.

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = u^2 \\ z - y = v \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z + y = u^2/v \\ z - y = v. \end{cases}$$

Le formule risolutive sono pertanto:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = u \\ y = (u^2 - v^2)/2v \\ z = (u^2 + v^2)/2v. \end{cases}$$

Notando poi che x, y, z sono definite a meno di un fattore di proporzionalità (scelta della unità di misura) e che ad u e v si possono sostituire due parametri interi u_1 e v_1 a questi proporzionali, si ottengono le solite formule

$$(1') \qquad \begin{cases} x = 2u_1 v_1 \\ y = u^2_1 - v^2_1 \\ z = u^2_1 + v^2_1 \end{cases}$$

ove ora u_1 e v_1 sono due parametri *interi*.

2. - In modo analogo si può procedere alla ricerca dei *triangoli eroniani*, cioè dei triangoli i cui lati a, b, c e la cui area A si possano esprimere mediante numeri razionali (o, il che è lo stesso, mediante numeri interi).

Consideriamo ancora un problema di primo grado, ad esempio:

PROBLEMA: *Trovare i lati* a, b, c *e l'area* A *di un triangolo del quale si conosca un lato* c = 1 *e i due angoli adiacenti* α *e* β, *dati precisamente da* tg $\alpha/2 =$ u *e* tg $\beta/2 =$ v.

Con il teorema dei seni si calcolano a e b, e quindi si calcola l'area come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso:

$$(2) \qquad \begin{cases} a = u(1 + v^2)/[(u + v)(1 - uv)] \\ b = v(1 + u^2)/[(u + v)(1 - uv)] \\ c = 1 \\ A = uv/[(u + v)(1 - uv)] \end{cases}$$

Per ogni coppia di numeri razionali u e v queste formule dànno un triangolo eroniano. Inversamente, in un triangolo eroniano $tg\ \alpha/2$ e $tg\ \beta/2$ sono razionali, perchè dalle formule di Briggs si ricava

$$tg\ \alpha/2 = A/[p(p-a)] \quad (p = \text{semiperimetro})$$

e pertanto le formule (2) dànno, al variare di u e v nel campo razionale, *tutti* i triangoli eroniani.

Si può ottenere una piccola semplificazione delle (2) eliminando i denominatori: immaginando che ciò corrisponda ad una alterazione della unità di misura, si noterà che A risulta alterato per il quadrato del rapporto delle unità lineari:

$$(2') \qquad \begin{cases} a = u(1+v^2) \\ b = v(1+u^2) \\ c = (u+v)(1-uv) \\ d = uv(u+v)(1-uv) \end{cases}$$

ove u e v sono sempre parametri razionali.

3. - Il *metodo* indicato si applica, e talvolta facilmente, ad altri problemi che sorgono all'insegnante di scuola media, quando voglia preparare esercizi con dati e risultati razionali.

A titolo di ulteriore esempio aggiungiamo la ricerca di tutti *i parallelepipedi rettangoli per i quali gli spigoli e la diagonale siano espressi da numeri razionali* (o interi). Facciamo dipendere questa ricerca dalla risoluzione del

Problema: *Trovare gli spigoli* a, b, c, *e la diagonale* d *di un parallelepipedo rettangolo del quale si conoscano due spigoli* a = u, b = v *e la differenza tra la diagonale e il terzo spigolo* d — c = w.

Si ha:

$$d^2 - c^2 = a^2 + b^2 = u^2 + v^2.$$

Pertanto

$$\begin{cases} d - c = w \\ d + c = (u^2+v^2)/w \end{cases}$$

da cui

$$(3) \qquad \begin{cases} b = v \\ c = (u^2 + v^2 - w^2)/2w \\ d = (u^2 + v^2 + w^2)/2w \end{cases}$$

o anche, cambiando il significato geometrico dei parametri:

$$(3') \qquad \begin{cases} a = 2uw \\ b = 2vw \\ c = u^2 + v^2 - w^2 \\ d = u^2 + v^2 + w^2. \end{cases}$$

Sia le (3) che le (3') dànno, al variare di u, v, w nel campo razionale, *tutti* i parallelepipedi richiesti.

M. Dedò

I triangoli Eroniani dal punto di vista della geometria algebrica

1. Nel numero di gennaio di questo « Periodico » il professore CARLO ROVETTI ha presentato un suo metodo per la determinazione dei triangoli Eroniani (di triangoli, cioè, aventi lati ed area espressi da numeri interi). Ora mi sembra che sia di qualche interesse vedere il problema da un punto di vista superiore, illuminando la facile questione con semplici concetti di geometria algebrica: ed è quanto mi propongo di fare in questo breve articolo.

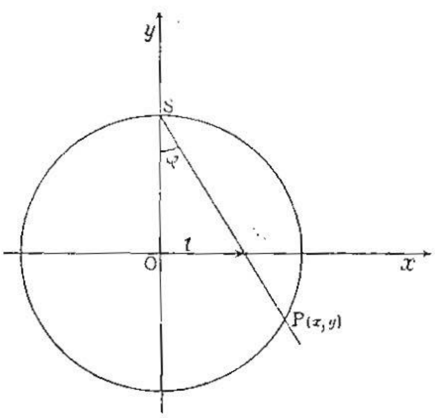
2. Per maggiore chiarezza è bene ricordare il metodo di KLEIN per la risoluzione, in numeri interi, dell'equazione Pitagorica:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

che sorge dalla ricerca di triangoli rettangoli i cui lati siano espressi da numeri interi. Se si pone $z = 1$, cioè si assume l'ipotenusa come unità di misura, gli altri lati appaiono definiti da numeri razionali e il problema si trasforma in quello della ricerca di triangoli rettangoli a cateti razionali; si ha così l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

da risolvere in valori razionali. A questa stessa equazione si perviene dividendo ambo i membri della precedente per z^2 e considerando come incognite i rapporti $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$ che, dovendo esser quozienti di numeri interi, risultano razionali. È chiaro che la ricerca delle soluzioni razionali della (1) può geometricamente indicarsi come ricerca dei *punti razionali* del cerchio rappresentato, in coordinate cartesiane ortogonali, dall'equazione (1).



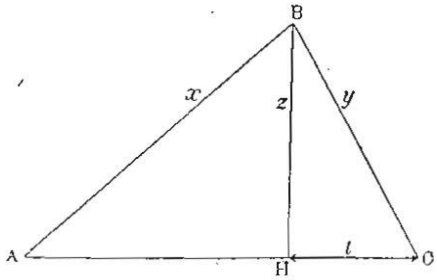
Ora il cerchio è una curva razionale: proiettiamolo da un suo punto S sopra una retta r, sulla quale sia stato prefissato un sistema di ascisse t. A ogni punto della r verrà così a corrispondere algebricamente un *unico* punto del cerchio, le cui coordinate, quindi, si potranno esprimere come funzioni razionali del parametro t. Prendendo come retta r l'asse x e proiettando del punto $S(0, 1)$, t risulta uguale a tang φ e le formule risolutive sono:

$$x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

che permettono di ottenere valori razionali di x e y assegnando valori razionali al parametro t.

Si noti come per ottenere che x e y siano effettivamente *numeri* razionali per valori razionali di t, non basta che esse siano *funzioni* razionali di t, ma è necessario che nelle formule risolutive non figurino *irrazionalità aritmetiche*: per ottenere ciò occorre che il punto S, da cui si eseguisce la proiezione, abbia coordinate razionali, il che appunto accade nella risoluzione sopra indicata.

3. Quando si passa dai triangoli Pitagorici ai triangoli Eroniani, la questione si presenta un po' più complicata. Se ABC è un triangolo Eroniano (a lati e area espressi da numeri interi) e si pone uguale a *uno* il lato $\overline{AC}$, assumendolo come



unità di misura, riusciranno razionali i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e l'altezza $\overline{BH}$ relativa al lato $\overline{AC}$.

Indicando con x e y rispettivamente i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e con z l'altezza $\overline{BH}$, si hanno le seguenti relazioni (dove $t = \overline{HC}$):

$$(1) \qquad (1-t)^2 = x^2 - z^2 \quad \text{e} \quad t^2 = y^2 - z^2$$

dalle quali, eliminando t, si ottiene l'equazione

$$(2) \qquad (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0$$

equazione a cui devono soddisfare tutte le terne (xyz) che competono a triangoli Eroniani.

Consideriamo ora xyz come le coordinate (cartesiane ortogonali) di un punto P dello spazio; le terne xyz soddisfacenti la (2) danno le coordinate dei punti di una superficie del quart'ordine F_4, e le terne di valori razionali i punti razionali di questa. Si conclude, pertanto, che *la ricerca dei triangoli Eroniani coincide con quella dei punti razionali della superficie F_4 di 4° ordine e di equazione*:

$$(2) \qquad (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0.$$

Ora quando, analogamente a ciò che si è visto per i triangoli Pitagorici, si sarà riusciti ad esprimere i lati e l'altezza di un triangolo eroniano in funzione razionale di due parametri u e v (cui si possano dare arbitrariamente valori razionali) mediante formule del tipo

$$(2') \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(uv) \\ y = \varphi_2(uv) \\ z = \varphi_3(uv), \end{cases}$$

si sarà costruita una *rappresentazione piana* della superficie F_4. Infatti, ove si considerino u e v come coordinate di un punto P' di un piano, le formule (2') daranno un punto P della F_4, corrispondente di P', e, viceversa, tale punto P si otterrà solo in corrispondenza al nominato P', quando, per coppie di valori u e v diverse, si ottengano triangoli Eroniani diversi. La corrispondenza biunivoca che così sorge fra i punti P della superficie F_4 e quelli P' del piano (uv) stabilisce appunto una rappresentazione piana della superficie F_4.

In base a queste considerazioni la ricerca delle formule risolutive per i triangoli Eroniani cessa di dipendere da più o meno eleganti artifici aritmetici; si dovrà invece esaminare le particolarità geometriche della superficie F_4 e riconoscere come queste ne permettano la rappresentazione sul piano; le formule risolutive verranno ora spontanee traducendo analiticamente le costruzioni geometriche.

4. Vediamo anzitutto, discorsivamente, come si ottenga la rappresentazione piana della F_4; nel paragrafo seguente ne daremo la costruzione effettiva, e quindi la effettiva risoluzione del problema dei triangoli Eroniani.

Si riconoscerà facilmente che la F_4 ammette una retta doppia r, ed è noto che ogni superficie del quart'ordine dotata di retta doppia è razionale, cioè rappresentabile biunivocamente sul piano. La razionalità di una tale superficie F_4 si riconosce osservando che i piani passanti per la detta retta doppia formano un fascio, sicchè ciascuno di essi corrisponde biunivocamente a un parametro u. Preso uno di questi piani, diciamolo π_u, esso sega la superficie del quarto ordine secondo una quartica, che si spezza nella retta r contata due volte e in una residua conica Γ_u. Ora sulla F_4 si trova una retta a, che risulta unisecante le coniche Γ_u, avendo a comune con una di queste il punto A_u in cui π_u taglia a; e le coordinate di A_u appaiono funzioni razionali di u.

Entro il piano π_u le rette per A_u corrispondono biunivocamente a un parametro v e tagliano in un solo punto P la conica Γ_u, quindi le coordinate di un punto P (di Γ_u) sono funzioni razionali di v (e di u). Ora poichè ogni punto P della F_4 appartiene ad un piano π_u e quindi a una conica Γ_u, questo procedimento ci permette di calcolare $x y z$ in funzione razionale di u e v. Aggiungasi che le formule risolutive daranno *valori razionali* per x, y, z, quando u e v siano razionali, se nel procedimento indicato non si saranno introdotte irrazionalità aritmetiche, cioè se la retta doppia r e la retta a unisecante le coniche Γ_u dipenderanno da coefficienti (numeri) razionali. Il che appunto si ottiene nel nostro caso.

5. Osservando l'equazione (2) si riconosce che la superficie F_4 appartiene al fascio

$$(1 + y^2 - x^2)^2 + \lambda(y^2 - z^2) = 0$$

determinato dal cilindro quadrico

$$1 + y^2 - x^2 = 0 \tag{3}$$

contato due volte e dall'insieme dei piani

$$y - z = 0, \qquad y + z = 0$$

e del piano improprio contato due volte. Il cilindro (3) ha due generatrici sul piano improprio: tali rette r e s, essendo doppie per ognuna delle superfici che definiscono il fascio, sono doppie anche per la F_4. Esse sono le rette improprie dei due piani

$$y - x = 0, \qquad y + x = 0.$$

Prendiamo la prima, r, come sostegno del fascio di piani che ci importa considerare: un piano generico del fascio sarà del tipo

$$x - y + u = 0.$$

Questo sega ulteriormente la (2) secondo la conica Γ_u di equazione

$$\begin{cases} x - y + u = 0 \\ (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0 \end{cases}$$

conica che ha in comune col piano (xy) i punti

$$A \equiv \left(\frac{1-u}{2}, \quad \frac{1+u}{2}, \quad 0\right) \quad \text{e} \quad B \equiv \left(\frac{-1-u}{2}, \quad \frac{u-1}{2}, \quad 0\right).$$

Consideriamone uno, per esempio A. Al variare di u, A varia sul piano (xy) descrivendo il luogo

$$x = \frac{1-u}{2}, \quad y = \frac{1+u}{2}$$

cioè la retta a

$$x + y - 1 = 0.$$

Questa retta è, pertanto, unisecante tutte le coniche del fascio considerato. Proiettiamo dal punto A la conica Γ_u sopra una retta del piano della Γ_u stessa: sulla retta sia stato prefissato un sistema di ascisse v. Può servire come retta delle v la parallela all'asse z passante per il punto

$$K \equiv \left(\frac{3-u}{2}, \quad \frac{3+u}{2}, \quad 0\right)$$

e su di essa si può prendere come parametro v la z stessa; allora ogni retta per A proiettante la Γ_u è del tipo

$$x - \frac{1-u}{2} = y - \frac{1+u}{2} = \frac{z}{v}$$

e la sua ulteriore intersezione con la superficie F_4 è data da:

$$\begin{cases} x = \dfrac{z}{v} + \dfrac{1-u}{2} \\ y = \dfrac{z}{v} + \dfrac{1+u}{2} \\ (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$x = \frac{1 - u^2}{u^2 + v^2 - 1} + \frac{1 - u}{2}, \quad y = \frac{1 - u^2}{u^2 + v^2 - 1} + \frac{1 + u}{2},$$

$$z = \frac{v(1 - u^2)}{u^2 + v^2 - 1}. \tag{4}$$

Queste formule, per ogni coppia di valori razionali di u e v, forniscono un triangolo Eroniano.

Osservazione. — Può accadere che alcuni o tutti i valori $x y z$ risultino negativi. Ma osservando che la F_u è simmetrica rispetto a ognuno degli assi e che questa simmetria permette di ricondurci sempre a punti del 1° ottante, si conclude che è lecito prendere senz'altro x, y e z sempre positivi.

Questa osservazione e l'esame dell'equazione (2), la quale è simmetrica rispetto a x e y, mostrano che si avrà sempre

$$x \geq z, \quad y \geq z \tag{5}$$

per cui le (4), esclusi i casi limiti: $z = 0$, $z = \infty$, forniscono sempre triangoli reali. Il segno di uguaglianza in una delle (5) corrisponde al caso di un triangolo Eroniano rettangolo.

Milano, R. Università.

GIUSEPPINA BIGGIOGERO