Frattali in spazi curvi.

(Convegno "*Formalismo matematico e realtà fisica*", Cesena, 1993)

Il file contenente il testo della conferenza di Carlo Felice Manara – dal titolo *Frattali in spazi curvi* – è purtroppo quasi completamente perduto. Ma le idee esposte sono presumibilmente quelle contenute nella tesi di laurea di Elena Chimini, discussa all'Università Cattolica del Sacro Cuore, sede di Brescia, Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali, di cui CFM fu relatore nell'anno accademico 1988 – 89. La tesi ha il titolo: *La curva di Von Koch in geometria non euclidea*.

È da ricordare che dalla seconda metà degli anni '80 a Brescia CFM e altri studiosi (Mario Marchi, Helmut Karzel e i loro allievi) lavoravano sul tema dell'assiomatizzazione dei fondamenti della Geometria. La tesi, di cui cercherò di dare un'idea riassuntiva, segue però uno spirito diverso.

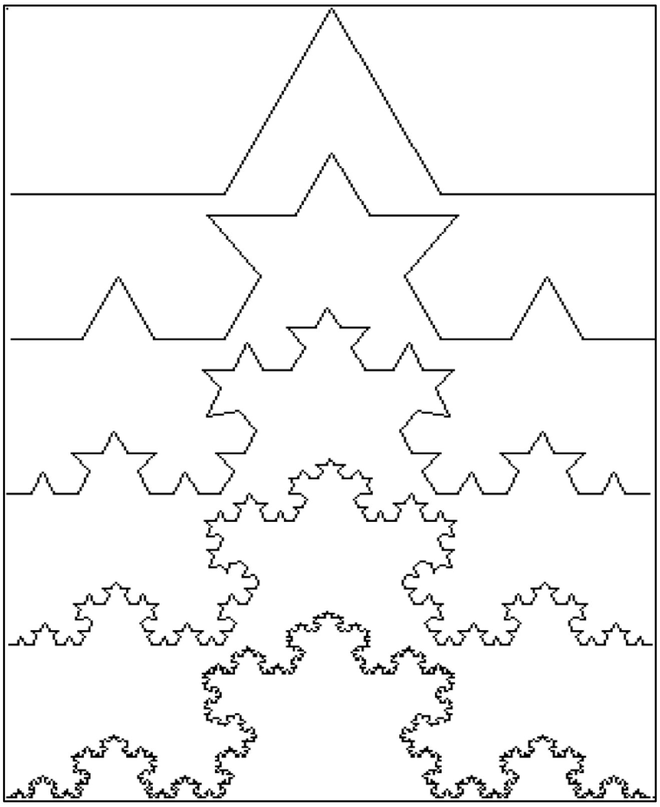

Figura 1. P_1, P_2, P_3, P_4,….nello Spazio euclideo

Nel primo capitolo si espongono elementi di geometria non euclidea. Nel secondo capitolo si costruisce una nuova rappresentazione analitica euclidea della Curva di von Koch, che si presta alla generalizzazione in geometria non euclidea. Nel terzo capitolo si costruisce la rappresentazione non euclidea della curva.

1 Curva di von Koch nel piano euclideo.

La curva autosimile di Von Koch è ottenuta, a partire da un segmento base, come limite di una successione di spezzate P_n, ciascuna di 4^n lati e $4^n + 1$ vertici. Nella costruzione di Von Koch, ogni lato della spezzata P_n sull'intervallo unitario viene sostituito da un'ulteriore spezzata introducendo tre nuovi vertici di un triangolo equilatero (fig. 1). Presto si pensò di dare a questa curva una rappresentazione analitica, cioè di esprimerla come funzione $I \to R^2$, dall'intervallo unitario della retta reale al piano reale (fig. 2).

Nella tesi, alle rappresentazioni classiche vengono apportate delle modifiche, sostituendo al piano reale R^2 il piano complesso, e rappresentando l'intervallo I in base 4, cioè scrivendo :

$$t \in I \iff t = 0.c_1c_2c_3c_4 \dots\dots.. = \sum_1^\infty \frac{c_n}{4^n} \;,\; c_n = 0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \,.$$

Facendo corrispondere al primo estremo del lato su cui si opera la cifra 0 e ai tre nuovi vertici ordinatamente le cifre 1, 2, 3, si può ottenere ad esempio per la spezzata P_3 la figura 3 (seguente).

Si costruisce una corrispondenza biunivoca continua fra i punti della curva e i punti di I nel modo che si espone di seguito.

)(168)(

STUDIO ANALITICO DELLA CURVA DEL SIG. HELGE VON KOCH

NOTA

DEL

Dott. ANNIBALE BROGLIO

1. Il signor Helge von Koch fece conoscere l'anno passato una curva senza tangente, che si ottiene mediante una semplice costruzione di geometria elementare (1).

Nella Dissertazione di Laurea da me presentata alla Università di Pavia nel maggio 1905, essendomi (per suggerimento dell'illustre prof. Ernesto Pascal) occupato di questa curva, ne ho dato una rappresentazione analitica, mediante la quale ho verificato la inesistenza della derivata, il che signor H. v. Koch stabilisce partendo da semplici considerazioni geometriche.

Un' altra rappresentazione analitica della curva del v. Koch venne pubblicata poco dopo dal prof. E. Cesàro, in un suo lavoro avente però un intento più largo (2); e per giungere ai suoi risultati il prof. Cesàro ha notevolmente trasformato la costruzione data dal sig. Helge von Koch. Io invece non mi sono sostanzialmente allontanato dalla costruzione di questo Autore.

Per questo motivo e per alcuni risultati notevoli anche pel confronto coi risultati cui perviene il prof. Cesàro, non mi sembra inutile il far conoscere succintamente i concetti fondamentali del mio lavoro.

∴

Alcuni richiami dal lavoro del von Koch

2. Il von Koch definisce la sua curva, che egli chiama P, mediante una operazione che viene indicata con Ω. Con questa operazione a un segmento LO,

(1) Nell' *Ark. för Matematik, Astronomi och Fysik*, pubblicato dall' Accademia delle Scienze di Stockholm (1904 — pp. 681-702).

(2) Atti della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1905, vol. XII, serie 2a n. 15. In un lavoro successivo sullo stesso argomento il prof. Cesàro allarga ancora maggiormente il campo delle sue considerazioni (Fonctions continues sans derivée. Arch. d. Math. u. Phys (3) t. X, pp. 57-63 Berlino).

Figura 2. Rappresentazioni analitiche della Curva di Von Koch

Costruzione della corrispondenza biunivoca. Sia $p(t)$ il punto della curva di Von Koch corrispondente a $t = 0.c_1c_2c_3c_4 \dots \dots \dots$; esso è immagine del numero complesso $z(t)$, somma della serie $z(t) = \sum_1^{\infty} z(n)$, dove i termini della serie $z(n)$, $n \in N$, si ottengono attraverso l'allineamento c_n con il procedimento seguente.

Si indichi con $\varepsilon = e^{i\,\pi/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ l'operatore di rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$; $\varepsilon^{-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ è allora il suo inverso.

Ciascun termine $z(n)$ si esprime come prodotto di due fattori, $z(n) = a(n)\,u(n)$, dove i fattori $a(n)$ e $u(n)$ sono determinati con le leggi seguenti. Posti $u(1) = 1$, $q = 1/3$, si consideri:

1) Per il fattore $a(n)$, $n \geq 1$: $c(n) = 0 \Rightarrow a(n) = 0$, $c(n) = 1 \Rightarrow a(n) = q^n$, $c(n) = 2 \Rightarrow a(n) = q^n(1+\varepsilon)$, $c(n) = 3 \Rightarrow a(n) = 2q^n$.
2) Per il fattore $u(n)$, $n > 1$, si ha una definizione ricorsiva:

$$c(n) = 0 \vee 3 \Rightarrow u(n+1) = u(n);$$

$$c(n) = 1 \Rightarrow u(n+1) = \varepsilon\, u(n);$$

$$c(n) = 2 \Rightarrow u(n+1) = \varepsilon^{-1}\, u(n).$$

(Quindi ad esempio nella costruzione di P_1 si avrà $p(0.2) = \frac{1}{3}(1+\varepsilon) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{6}$, che evidenzia le due traslazioni piane dell'origine, la prima assegnata dal vettore $1/3$, la seconda dal vettore $\frac{1}{3}\varepsilon$.

Nella costruzione di P_3 si avrà $p(0.12) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\varepsilon + \frac{1}{9}\varepsilon^2$, che evidenzia le tre traslazioni piane dell'origine, la prima assegnata dal vettore $1/3$, la seconda dal vettore $\frac{1}{3}\varepsilon$, la terza dal vettore $\frac{1}{9}\varepsilon^2 = \frac{1}{9}\,e^{i\,2\pi/3}$).

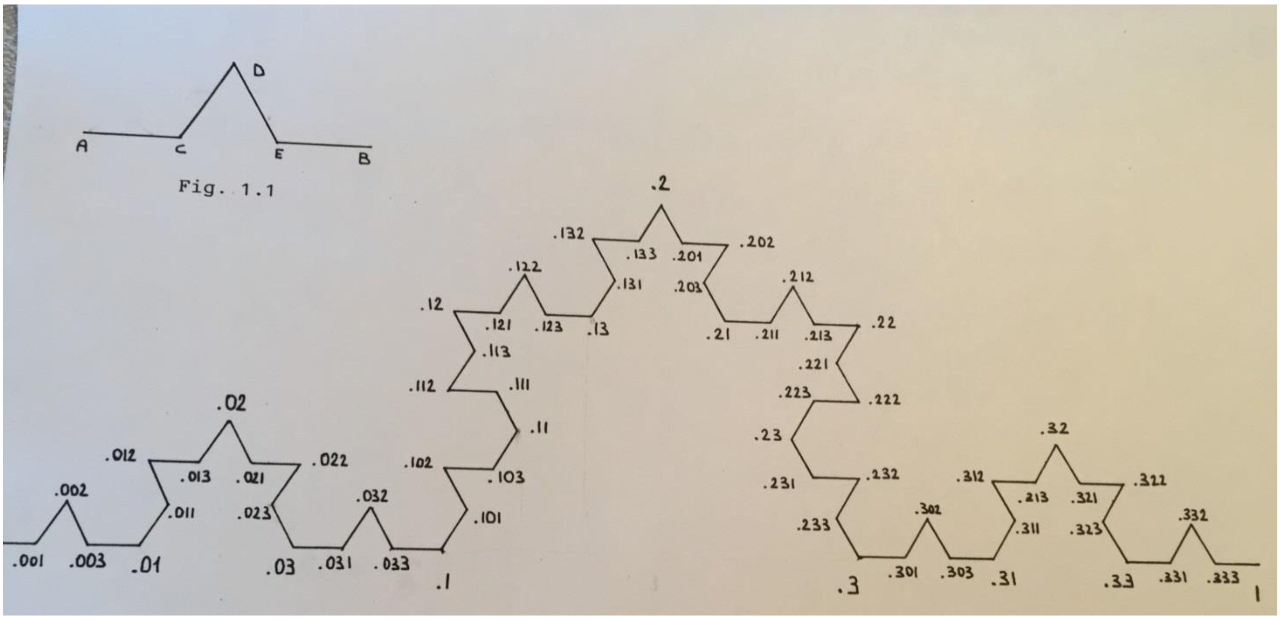

Figura 3. P_3. **Accanto ad ogni vertice è posto il valore del parametro corrispondente** $t \in I$ **scritto in base 4. Trattandosi di** P_3 **tutti i valori** t **da considerare hanno al più tre cifre non nulle alla destra del punto.**

(Dalla Tesi di laurea di Elena Chimini).

2 Curva di von Koch nel piano non euclideo.

Si rappresenta la curva di Von Koch nel piano *iperbolico* reale, con un procedimento analogo a quello seguito nel caso euclideo, assegnando i vettori che determinano le traslazioni dell'origine; ma in Geometria non euclidea i triangoli equilateri non hanno una misura dell'angolo costante; quindi occorre determinare la relazione che lega lato e angolo di un triangolo equilatero. La curva che si otterrà non sarà *autosimile*.

Nel piano proiettivo iperbolico si considera sulla retta $u(0)$, di coordinate plückeriane di retta $(-1,0,2)$, retta *direttrice* della *conica assoluto* del piano, il segmento di lunghezza unitaria, di estremi $x(0)$, $x(1)$, con $x(0) = (2,0,1)$, $x(1) = (2,\ 2\ \tanh R\,,1)$. Si pensa il piano euclideo immerso nel piano proiettivo, per poter considerare contemporaneamente coordinate di punto e coordinate di retta.

Si rappresenta l'intervallo reale unitario in base 4, come sopra: $t = \sum_1^\infty \frac{c_n}{4^n}$, $c_n = 0 \lor 1 \lor 2 \lor 3$.

Posto $t_n = \sum_1^n c_i q^i$, $n \geq 1$, si associa ad ogni t_n un punto del piano, $x(t_n)$, che sarà il vertice della curva corrispondente a $t = t_n$, oltre che elemento della successione che definisce $x(t)$; e si associa inoltre una retta, $u(t_n)$, che - ad ogni passo - definisce la direzione del primo lato della spezzata approssimazione di ordine $n+1$ della curva di V. K., su cui sarà il termine seguente della successione. Sia $x(t_n)$ che $u(t_n)$ sono definiti ricorsivamente, rispettivamente attraverso opportune traslazioni e rotazioni.

I movimenti T del piano che fissano la retta $u(0) = (-1,0,2)$, subordinando su di essa *traslazioni*, sono rappresentati dalle matrici $T = \begin{bmatrix} \cosh^2 k & \sinh k \cosh k & 1/2 \sinh^2 k \\ 2\ \sinh k \cosh k & \sinh^2 k + \cosh^2 k & \sinh k \cosh k \\ 2 \sinh^2 k & 2\ \sinh k \cosh k & \cosh^2 k \end{bmatrix}$, con costante di traslazione $2\ R\ k$.

Il gruppo delle *rotazioni di centro* F, fuoco della *conica assoluto* di equazione $2y = x^2$, $F = x(0) = (2,0,1)$, è descritto dalle matrici $\Omega = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos\vartheta \sin\vartheta & \sin^2\vartheta \\ -2\cos\vartheta \sin\vartheta & \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta \\ 2\sin^2\vartheta & -2\cos\vartheta\sin\vartheta & \cos^2\vartheta \end{bmatrix}$. Con opportuni calcoli si esprime l'angolo di rotazione α, $\alpha = 2\vartheta$.

Una *rotazione* $\Phi(x, 2\vartheta\,)$, di angolo 2ϑ e di centro $x = x(0)\,X$ (trasformato del fuoco mediante un movimento X), si ottiene come $\Phi(x,2\vartheta\,) = X^{-1}\Omega\,X$. Per applicare tali rotazioni a rette u del piano si considera la trasposta dell'inversa di $\Phi(x,2\vartheta\,)$, ottenendo $\Phi_u(x,2\vartheta\,) = X^T(\Omega^T\,)^{-1}(X^{\,T}\,)^{-1}$, dove

$$(\Omega^T\,)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & 2\cos\vartheta\sin\vartheta & 2\sin^2\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\vartheta & \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta & 2\cos\vartheta\sin\vartheta \\ 1/2\sin^2\vartheta & -\cos\vartheta\sin\vartheta & \cos^2\vartheta \end{bmatrix}.$$

La matrice di rotazione $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 3/2 \\ -2\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} \\ 6 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, con $\Omega^3 = Id$, permette di costruire, a partire dal punto $C = (2,0,c), c > 1$, i punti

$$A = C\Omega = (2+6c, -2\sqrt{3\ (c-1)}, 3+c)\ ;\ B = C\Omega^2 = \left(2+6c, 2\sqrt{3\ (c-1)}, 3+c\right),$$

vertici di un triangolo equilatero, come si verifica.

Per il calcolo della relazione fra la lunghezza del lato e l'ampiezza dell'angolo del triangolo ABC è conveniente operare avendo come *conica assoluto* una circonferenza, come $X^2 + Y^2 = 1$. Operate le trasformazioni *proiettive*, che non alterano le *misure* di lati e angoli, avremo i vertici trasformati:

$C = (0, \gamma), A = \left((-\sqrt{3}/2\,)\ \gamma, -\frac{\gamma}{2}\right), B = \left((\sqrt{3}/2)\,\gamma, -\frac{\gamma}{2}\right)$, con $\gamma = \frac{c-1}{c+1}$.

Essendo A e B simmetrici rispetto all'asse Y, si calcola la lunghezza L del semilato HB, con $H = (0, -\frac{\gamma}{2})$. Detti M, N i *punti assoluto* della retta AB, calcolato il *birapporto* fra M, N, A, B: $(MNAB) = \beta(\gamma) = \dfrac{\sqrt{4-\gamma^2} + \sqrt{3}\ \gamma}{\sqrt{4-\gamma^2} - \sqrt{3}\ \gamma}$, si ottiene $L = \frac{1}{2}\log\,(MNAB) = \frac{1}{2}\,\log\frac{\sqrt{4-\gamma^2}+\sqrt{3}\ \gamma}{\sqrt{4-\gamma^2}-\sqrt{3}\ \gamma}$. Si osserva che $\beta(\gamma)$è una funzione continua, strettamente crescente, quindi invertibile.

Per calcolare la misura del semiangolo $H\hat{C}B$, si considera il fascio di sostegno C, e si determina il *birapporto* $\alpha(\gamma)$ fra le *rette assoluto* e le rette CB e CH, dove le coordinate proiettive delle rette sono i loro coefficienti angolari. Si ottiene $\alpha(\gamma) = \left(-i\sqrt{1-\gamma^2},\ i\sqrt{1-\gamma^2},\ \sqrt{3},\ \infty\right) = \dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{1-\gamma^2}}$, quindi $H\hat{C}B = \frac{1}{2}\ i\log\alpha$. Poiché $|\alpha| = 1$, scriviamo $\alpha = e^{i\,2\,\vartheta}$, dove $\tan\vartheta = \dfrac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{3}}$; dunque $H\hat{C}B = \vartheta$.

Esprimendo γ in funzione di $\tan\vartheta$ e sostituendo in $\beta(\gamma)$, si ottiene infine la misura della lunghezza del lato in funzione dell'angolo: $L = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{\cos^2\vartheta - 3\,\sin^2\vartheta}}{1-\sqrt{\cos^2\vartheta - 3\,\sin^2\vartheta}}$.

Si sono così determinati gli strumenti per costruire $x(t_n)$ e $u(t_n)$.

Abbiamo: $x(t_n) = x(0)X(t_n)$; $u(t_n) = u(0)\Phi(t_n)$, $n \geq 1$, con $X(t_n)$, $\Phi(t_n)$ determinati in forma ricorrente in funzione delle cifre dell'allineamento dalle leggi seguenti.
Si ponga $X(t_0) = \Phi(t_0) = I$; $q = 1/3$. Si considerino:

1) Se $c_n = 0$, $X(t_n) = X(t_{n-1})$; $\Phi(t_n) = \Phi(t_{n-1})$.
2) Se $c_n = 1$, $X(t_n) = X(t_{n-1})T(q^n)$; $\Phi(t_n) = \Phi(t_{n-1})\Phi(\,x(t_n), \vartheta_n)$, dove $T(q^n)$ denota la traslazione di costante q^n sulla retta $u(t_{n-1})$; ϑ_n è l'angolo del triangolo equilatero di lato q^n; $\Phi(x(t_n),\ \vartheta_n)$ indica la rotazione di angolo ϑ_n intorno al punto $x(t_n)$.
3) Se $c_n = 3$, $X(t_n) = X(t_{n-1})T(2q^n)$; $\Phi(t_n) = \Phi(t_{n-1})$.

Per il caso $c_n = 2$, si ha:
definiti i due elementi ausiliari $\bar{x}(t_n) = x(t_{n-1})T(q^n)$; $\bar{u}(t_n) = u(t_{n-1})\Phi(\bar{x}(t_n), \vartheta_n)$,

4) $X(t_n) = X(t_{n-1})\,T(q^n)\,\bar{T}(q^n)$; $\Phi(t_n) = \Phi(t_{n-1})\Phi(\bar{x}(t_n), \vartheta_n)\Phi(\,x(t_n), \vartheta_n - \pi)$, dove $\bar{T}(q^n)$ indica una traslazione sulla retta $\bar{u}(t_n)$ di costante q^n.