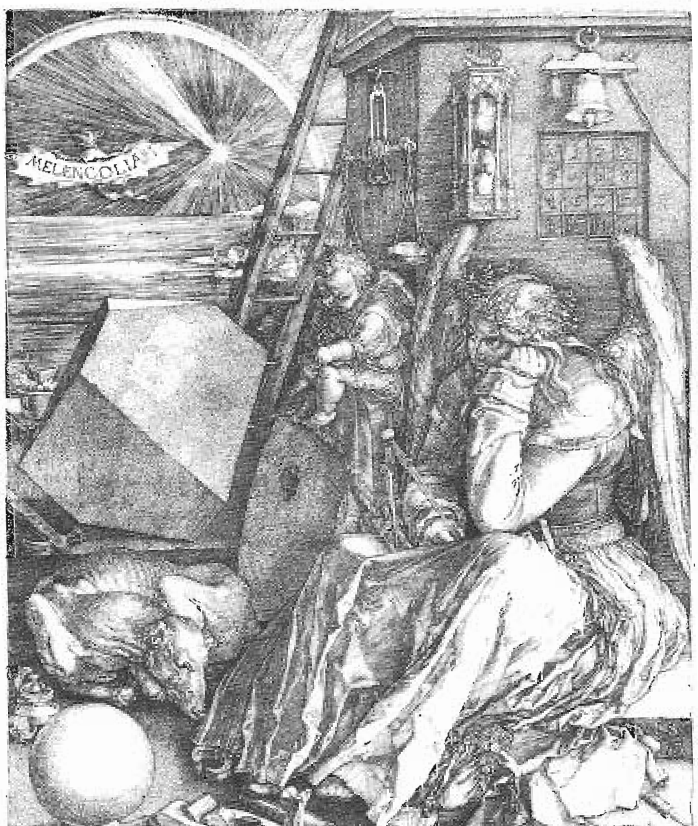
La geometria visione del mondo

Carlo Felice Manara

"La natura è scritta in linguaggio matematico"
Galileo, "Il saggiatore"



"Malinconia" di Albrecht Dürer, rappresentazione dell'indagine razionale.
In alto a destra, un quadrato magico: la somma dei numeri
di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale è sempre la stessa.

1 - La geometria, primo passo nella visione scientifica del mondo

Per molti, che si rifanno agli anni di scuola, la geometria può apparire un argomento astratto, e pertanto ostico. Vorrei invece presentare qui un aspetto che mi sembra affascinante di questo capitolo della matematica; molti infatti pensano a quest'ultima scienza come ad un blocco fossilizzato, come ad un edificio monumentale ma arcigno e scostante, il cui ingresso è riservato a pochi iniziati; io invece penso alla matematica come ad un'avventura entusiasmante, come ad una testimonianza che durante i secoli lo spirito umano ha dato di se stesso, della sua insopprimibile tendenza alla ricerca della chiarezza, del rigore, in una parola allà verità.

Vorrei aggiungere che – a mio parere – la geometria ha un posto particolare in questa mirabile avventura dello sviluppo dello spirito umano: e cercherò di esporre le ragioni di questa mia opinione. Anzitutto devo ricordare che il primo trattato autenticamente scientifico che la storia umana ricordi si deve alla civiltà greca, ed è il celebre libro degli "Elementi" di Euclide, trattato che per secoli è stato considerato come il paradigma della chiarezza e del rigore; orbene nel trattato euclideo la geometria ha il primo posto, e la visione geometrica della matematica ispira e fonda tutta la trattazione euclidea, anche nei capitoli che non trattano esplicitamente di geometria. Io tendo a pensare che ciò sia dovuto al fatto che per i Greci la geometria ha costituito il primo momento di una visione scientifica del mondo che ci circonda: infatti, secondo il grande matematico italiano Federigo Enriques (lui stesso insigne cultore di geometria) la geometria può essere vista, in un certo senso e secondo una certa luce, proprio come "il primo capitolo della fisica", cioè come il primo momento di una sistemazione razionale delle nostre esperienze che abbia una dignità scientifica.

Per spiegare meglio ciò che intendo dire, aggiungerò che a mio parere la conoscenza scientifica non può limitarsi ad essere un accumulo di informazioni, ma deve tendere in qualche modo a spiegare le nostre esperienze. In altre parole, la conoscenza scientifica deve essere fondata, motivata, spiegata e non può limitarsi ad essere un elenco di fatti.

Ovviamente ogni scienza particolare ha un suo modo specifico di giungere alle spiegazioni dei fatti di cui si interessa: il modo di spiegare della biologia, per esempio, non è quello della fisica, o quello della geografia. Ma, osservando il procedere delle varie scienze, mi pare di poter dire che la tendenza fondamentale, comune a tutte, è quella di dare le ragioni di ciò che si vede e che si sperimenta. Ora proprio questo è il carattere che incontriamo nella trattazione di Euclide: questo grande infatti incomincia enunciando certe proposizioni (precisamente quelle che egli chiama "nozioni comuni" e quelle che egli chiama "postulati"), e poi prosegue con rigore a dimostrare le altre proposizioni: ognuna di queste dunque trova il suo fondamento e le sue ragioni in quelle enunciate prima di lei; ed ogni proposizione viene ad acquisire quel pregio di certezza e di chiarezza che fa del trattato euclideo un monumento dell'intelligenza umana.

Per spiegare ulteriormente il mio pensiero ricorderò la polemica che Proclo (matematico e filosofo del III secolo) ebbe con i filosofi epicurei. Costoro affermavano che la geometria è un insieme di conoscenze assolutamente inutili, perché insegna delle cose che anche i somari conoscono; infatti la geometria insegna per esempio che la lunghezza di un lato di un triangolo è minore della somma delle lunghezze degli altri due. Ora – aggiungevano gli epicurei – anche un somaro conosce questo fatto, perché, se deve andare ad un mucchio di fieno, ci va direttamente per la via più breve, e non percorre due lati di un triangolo se può percorrerne uno solo. Rispondeva Proclo che la differenza tra la conoscenza dell'uomo e quella del somaro consiste non nella materialità del contenuto, ma nel fatto che l'uomo, oltre a conoscere le cose, sa anche motivarle e spiegarle, sa dimostrarle, sa far vedere il perché le cose stanno in un certo modo e non possono essere diversamente, date le premesse.

In questo ordine di idee io ho parlato poco fa della geometria come primo passo per una visione scientifica del mondo; precisamente una visione scientifica la quale tiene conto soltanto della forma, della grandezza, della mutua posizione degli oggetti che ci circondano, senza occuparsi di altre loro proprietà, per esempio delle proprietà fisiche (colore, peso ecc.) o chimiche.

Vorrei sottolineare il fatto che io qui ho parlato di oggetti che ci circondano; si potrebbe anche parlare di certi fenomeni di propagazione dell'energia (per esempio di propagazione della luce e del calore); ho evitato di parlare di "spazio", perché questo termine è impiegato nel linguaggio quotidiano in troppi sensi diversi ed è quindi diventato troppo ambiguo; vorrei anche aggiungere qui l'opinione riportata da Gino Fano (nel suo trattato di Geometria non euclidea); opinione rigorosa, secondo la quale lo spazio non è oggetto di esperienza e quindi non può essere oggetto di una scienza. Si potrebbe aggiungere che l'immaginare che esista uno "spazio", che sia oggetto della geometria, ha provocato non poche difficoltà, per molti scienziati e filosofi, nell'accettare la possibilità e la coerenza di una geometria che non partisse dai postulati enunciati da Euclide, cioè di una geometria che dal secolo scorso viene chiamata "non-euclidea". Tali difficoltà furono superate soltanto quando si giunse a dimostrare rigorosamente che le geometrie di questo tipo sono perfettamente coerenti, e quindi hanno lo stesso statuto epistemologico e la stessa validità della geometria euclidea classica; dimostrazione che rese necessario il lasciar cadere il concetto di spazio come oggetto della geometria.

2 - L'origine dei concetti della geometria; sensazioni ed idealizzazioni, fantasia e logica

Ho detto poco fa che la geometria può essere vista come il primo passo della visione scientifica del mondo che ci circonda. Vale la pena di riflettere un istante sulle procedure che noi seguiamo per ottenere tale visione: infatti alla radice di ciò che noi chiamiamo geometria stanno non soltanto le sensazioni che ci vengono dalle esperienze sul mondo esterno, ma anche le immagini che la fantasia costruisce a partire da queste sensazioni.

Invero queste ultime sono necessariamente limitate e circoscritte; invece la fantasia costruisce delle estrapolazioni in varie direzioni. Ci interesseranno qui in particolare le estrapolazioni che riguardano oggetti a grande distanza, e quelle che riguardano oggetti molto piccoli, che sfuggono ai nostri organi di senso.

Vorrei osservare che sulle estrapolazioni del primo tipo, cioè sulle immagini che noi ci forniamo a proposito delle esperienze possibili a grande distanza, sono fondate le varie enunciazioni riguardanti le rette parallele: dal postulato enunciato da Euclide, che in sostanza afferma la unicità della parallela ad una retta data per un punto fuori di essa, agli enunciati delle geometrie non-euclidee, che danno luogo a costruzioni teoriche diverse da quella classica, ma pure – come abbiamo detto – ugualmente coerenti e legittime. Sulle estrapolazioni ad un livello molto inferiore a quello raggiungibile con le nostre sensazioni si fondano le varie teorie del continuo e le trattazioni degli enti oggi di moda che vengono chiamati "frattali".

Queste trattazioni, pur essendo opera della nostra fantasia, non sono tuttavia assurde o contraddittorie, o cervellotiche. Esse infatti non contraddicono alcun dato positivo dell'esperienza, ma si limitano a completare questi dati, in varie direzioni, permettendo così la costruzione di varie teorie, ciascuna delle quali è coerente in sé, pur essendo due diverse teorie contraddittorie tra loro.

L'aspetto paradossale di questo enunciato non deve far pensare ad una situazione assurda: vorrei infatti rifarmi a ciò che diceva il grande fisico e matematico Henri Poincaré, affermando che non ha senso parlare di teorie vere o false in assoluto. Ha senso solamente chiedersi se una data teoria sia in sé coerente, e se sia adeguata per rendere certi aspetti della realtà concreta che a noi interessano, sia a livello teorico che pratico. Pertanto è possibile che una medesima realtà concreta e materiale sia rappresentata con teorie diverse. Ciò non deve far pensare ad una assoluta incapacità della nostra mente di cogliere la verità, ma semplicemente al fatto che la realtà che ci circonda ha una moltitudine di aspetti, e che le nostre teorie giungono di volta in volta a cogliere soltanto in parte tutta l'inesauribile ricchezza della Natura. Ovviamente più una teoria è profonda ed adeguata e maggiore è il numero di fatti che essa spiega e più ampio è l'orizzonte che essa domina. Ma sarebbe imprudente asserire che una data teoria è vera in assoluto: la Storia infatti ci offre numerosissimi esempi di teorie che parevano potenti ed esaustive e che invece sono state superate dalle scoperte di nuovi fatti, che ci hanno costretti ad immaginare e costruire delle teorie più adeguate.

Ciò che ho detto fin qui mira anche a mettere in evidenza il posto importantissimo che la fantasia occupa nella costruzione di una teoria scientifica, e quindi nella costruzione della immagine razionale del mondo che questa ci offre. Si potrebbe dire che gli scienziati veramente grandi hanno sempre dato prova di possedere una potentissima fantasia creatrice; e le scoperte veramente geniali sono state fatte quasi sempre da coloro i quali hanno avuto la forza intellettuale di uscire dai solchi già tracciati, e di inventare delle cose veramente nuove.

È questa una delle ragioni per cui ho detto all'inizio che la scienza è un'avventura intellettuale affascinante; ci sono infatti dei momenti in cui la costruzione di una teoria può essere messa a confronto con la più alta creatività poetica: e la contemplazione di una potente costruzione teorica può essere accostata al godimento di un'opera d'arte di altissimo livello. E del resto il modo comune di esprimersi dei matematici che parlano di "belle dimostrazioni" e di "teorie eleganti" non è una ostentazione sciocca, ma è semplicemente la prova del fatto che anche le costruzioni intellettuali più astratte possono essere contemplate con spirito estetico.

3 - La sintesi di F. Klein e la teoria gravitazionale di Einstein

Vorrei ora brevemente mostrare quanto lo spirito della geometria abbia spiegato il proprio influsso anche su campi che sembrano a prima vista molto distanti da quelli classicamente attribuiti a questa dottrina.

A questo fine vorrei ricordare che, nella seconda metà del secolo scorso, la matematica, ed in particolare la geometria, ha vissuto una profonda crisi, che l'ha costretta ad un gravoso lavoro di assestamento e di sintesi. Questo lavoro è stato reso in certo senso necessario dalla dimostrazione della coerenza delle geometrie non-euclidee, e dai nuovi punti di vista che erano stati adottati da matematici geniali, tra i quali mi limiterò a ricordare Bernhard Riemann.

L'opera di sintesi cui ho accennato fu condotta a termine da un grande matematico tedesco, Felix Klein, il quale presentò alcune idee originali che, sviluppate in seguito, rivelarono la loro profondità e la loro grandissima fecondità. Il Klein presentò le sue idee in una prolusione programmatica ai suoi corsi, prolusione che egli pronunciò presso l'università tedesca di Erlangen, e che oggi è comunemente ricordata come "Programma di Erlangen". Si potrebbe dire che quasi tutte le ricerche geometriche successive a quell'epoca furono influenzate da quest'opera di grande sintesi; tra le ricerche geometriche vorrei ricordare quelle sviluppate da Gregorio Ricci Curbastro (che era professore dell'Università di Padova) e dal suo allievo Tullio Levi Civita. Ho ricordato in particolare questi due matematici italiani perché essi hanno costruito una teoria che venne chiamata "Calcolo differenziale assoluto" o anche "Calcolo tensoriale". L'importanza di questa teoria non fu percepita subito dai matematici contemporanei, ma risultò evidente quando Albert Einstein utilizzò proprio gli strumenti teorici inventati, costruiti e sviluppati dai due matematici italiani per formulare la sua teoria gravitazionale della relatività generale.

Vorrei soffermarmi a riflettere su questi fatti per varie ragioni: anzitutto perché – come ho detto – l'importanza delle teorie dei due geometri italiani non fu percepita subito; anzi queste vennero giudicate non troppo importanti e significative. A mio parere, ciò dimostra quanto sia imprudente il giudizio che spesso viene avanzato sbrigativamente, distinguendo tra ricerche scientifiche utili e ricerche "inutili". La Storia infatti si è incaricata tante volte di smentire questi giudizi, mettendone in evidenza tutta la miopia e la conseguente stupidità.

Eppure ancora oggi noi vediamo giudizi cosiffatti (o equivalenti) stampati sui giornali, o li udiamo pronunciati da persone imprudenti ed ignoranti. Il guaio è che spesso codeste persone hanno anche responsabilità di governo e di assegnazione di fondi; e purtroppo le condizioni in cui oggi necessariamente si svolge la ricerca scientifica sono tali che giudizi miopi di questo tipo possono influire in modo decisivo sulle possibilità di esistenza di una ricerca scientifica.

La seconda considerazione che vorrei fare riguarda la impostazione metodologica dell'opera di Albert Einstein; non si dice nulla di nuovo osservando che egli fu appunto una di quelle menti creatrici di cui ho detto, che ebbero il coraggio intellettuale e la fantasia creatrice capaci di farli uscire dal solco tradizionale; ma mi pare anche interessante osservare quanta influenza ha avuto sull'opera di Einstein la mentalità della geometria della fine del secolo scorso. E ciò dico non soltanto ricordando che le espressioni di cui Einstein si serve sono tipicamente geometriche: questa infatti potrebbe essere giudicata una circostanza dovuta ad una scelta convenzionale o ad un'abitudine mentale; ma mi pare di poter dire che proprio la impostazione metodologica einsteiniana è in stretto collegamento con le idee sviluppate da Klein nella sua sintesi teorica. Infatti le affermazioni fondamentali di Einstein sulla non esistenza di osservatori privilegiati, e sulla ricerca degli aspetti invarianti delle leggi fisiche, al di sotto delle apparenze presentate dai diversi sistemi di riferimento, traducono esattamente, nel campo della fisica, quelle idee sulle ricerche degli invarianti delle figure che Klein aveva presentato come fondamento delle ricerche geometriche.

Credo quindi di poter dire che proprio una delle costruzioni teoriche più potenti ed eleganti della fisica moderna affonda le sue radici nella mentalità tipica della geometria, secondo la visione moderna di questa dottrina.

4 - La problematica moderna: dagli spazi a più dimensioni all'infinitamente piccolo

Ho cercato di mettere in evidenza l'importanza del pensiero geometrico nella costruzione delle teorie fisiche. Gli esempi si potrebbero moltiplicare, ma mi pare che quelli già addotti siano sufficienti per chiarire il mio pensiero; vorrei piuttosto dedicare le considerazioni che seguono a certi argomenti di cui oggi si parla molto.

Ho detto sopra che la costruzione dei concetti della geometria avviene con il contributo della fantasia, la quale fa un lavoro di completamento e di estrapolazione sulle nostre sensazioni e sulle nostre esperienze. Ho anche aggiunto che le varie teorie delle parallele, e le geometrie che ne conseguono, si possono far risalire ad una operazione di estrapolazione che la nostra fantasia esegue a proposito di eventuali nostre esperienze, immaginate eseguite su oggetti a distanze molto grandi da noi; ed ho anche affermato che questa operazione della fantasia non è cervellotica, né completamente arbitraria, e quindi non può condurre a conseguenze assurde e contraddittorie con la esperienza concreta.

Si può tuttavia osservare che la nostra fantasia non ha limiti nella propria libertà; essa quindi può costruire degli enti immaginari sui quali è possibile poi svolgere delle simbolizzazioni e delle deduzioni che hanno una portata anche sul reale; un esempio di questi enti è fornito dal celebre "cronotopo" di Einstein, il quale unifica in un'unica immagine le coordinate spaziali e quelle temporali degli eventi della fisica, per costruire una varietà a 4 dimensioni, nella quale vale la geometria secondo le idee di quel Riemann che abbiamo nominato, e che viene trattata con i simboli del calcolo tensoriale, di cui abbiamo detto. Ovviamente non ci sono limiti, nelle possibilità di queste costruzioni concettuali, delle quali la fisica moderna fa un impiego sempre più frequente.

Ma la nostra fantasia non opera soltanto sugli enti che si immaginano a grande distanza: essa opera anche su enti molto piccoli, la cui struttura intima sfugge quindi alla portata dei nostri sensi, in ogni caso limitati.

Per capire la portata di queste osservazioni possiamo ricordare che la fisica ci insegna che la struttura della materia che noi osserviamo è fondamentalmente granulare, particellare. Invece i nostri sensi ci danno spesso delle sensazioni sulle quali la nostra fantasia costruisce l'immagine del continuo: per esempio la superficie di uno specchio o di una lastra metallica ben levigata. Ancora una volta vorrei dire che queste immagini non sono affatto arbitrarie e cervellotiche; quindi non sarebbe giusto affermare che esse sono "sbagliate" nel senso abituale che si dà a questo termine; sarebbe forse meglio dire che esse sono limitate, nel senso che non ci fanno possedere tutta la realtà della materia.

È facile osservare che su questa immagine del continuo è stata costruita la scienza fisico-matematica, dall'epoca di Galileo e Newton fino all'inizio del secolo XIX; potremmo anche aggiungere che questa immagine è talmente stimolante che senza di essa forse non esisterebbe il calcolo infinitesimale; ed a questo proposito vorrei ricordare l'opinione espressa, all'inizio di questo nostro secolo, dal grande matematico tedesco David Hilbert, il quale ha affermato che senza la fisica, la meccanica e la geometria forse non esisterebbe gran parte della matematica moderna; io penso che Hilbert abbia così voluto sottolineare la funzione di stimolo per le ricerche astratte e teoriche che è svolta dalle dottrine ricordate. Occorre tuttavia ricordare ciò che abbiamo detto, e cioè che queste immagini, costruite dalla nostra fantasia, sono limitate: esiste quindi una profondità insondabile della realtà che sfugge all'immagine, ed è comprensibile soltanto all'intelligenza, sfugge alla illustrazione e cade soltanto sotto la logica astratta. Dico questo perché oggi si suol leggere ed udire che siamo nell'epoca della civiltà detta "dell'immagine"; orbene sarebbe anche bene aggiungere che l'immagine non può mai sostituire il ragionamento, e che il puro accostamento delle figure o delle immagini non può mai essere considerato come succedaneo alla deduzione rigorosa, anche se spesso suggerisce le strade per giungere a questa.

Del resto già anche il grande filosofo greco Platone osservava che gli oggetti della considerazione del matematico non sono le figure che questi traccia sulla sabbia, ma sono i concetti, dei quali le figure stesse sono soltanto dei simboli.

La storia della matematica negli ultimi due secoli ha mostrato quanto sia profonda questa osservazione di Platone; uno dei casi più clamorosi di vicende nelle quali l'immaginazione ha in parte illuso ed in parte anche fuorviato gli scienziati è fornita dalla vicenda del concetto di "linea curva" (che richiameremo brevemente col termine "curva"). Ognuno di noi crede di aver chiaro il concetto di linea, che si forma per esempio dalla esperienza abbastanza semplice della traiettoria di un corpo puntiforme che si muove; inoltre tutti noi abbiamo disegnato delle linee con la matita appuntita, e siamo convinti, sulla base di queste esperienze apparentemente semplici ed elementari, che ogni curva abbia in ogni suo punto una direzione, che è rappresentata da una retta, chiamata "tangente" alla curva nel punto nominato. Inoltre tutti noi abbiamo familiarità con i diagrammi, che rappresentano, con grande efficacia e perspicuità, dei fenomini fisici, oppure biologici, o statistici, o economici; e questo uso che noi facciamo dei diagrammi per rappresentare i fenomeni delle varie scienze ci convince ancora di più sulla validità della immagine di curva dotata di una direzione in ogni suo punto. Si comprende bene che, per una trattazione rigorosa di questi concetti, sia stato utile costruire degli strumenti matematici, che sono sostanzialmente quelli del calcolo infinitesimale classico. Occorre tuttavia ricordare che i matematici, sulla base della immagine e delle esperienze elementari, per vario tempo credettero di poter rappresentare quell'ente che viene chiamato "linea curva" con certi strumenti concettuali; questi tuttavia si rivelarono inadeguati di fronte ad una critica rigorosa. Dapprima il matematico tedesco K. Weierstrass costruì delle funzioni i cui diagrammi non hanno tangente in alcun punto; poi il matematico italiano Giuseppe Peano costruì un esempio, rimasto storico, di un ente che risponde alla definizione di curva quale si pensava fosse sufficiente all'epoca, e che invece riempie tutto un quadrato.

Si potrebbe dire che questi studi furono i germi dell'analisi delle strutture molto piccole che oggi ha avuto uno sviluppo clamoroso nella teoria dei "frattali".

Naturalmente questi studi non costituiscono una demolizione dei concetti classici della geometria: ho avuto cura di dire che i matematici credevano di poter rappresentare simbolicamente il concetto pratico di "curva" mediante certi strumenti concettuali, che invece si sono rivelati inadeguati. Le scoperte di Peano e degli altri hanno quindi portato come conseguenza il fatto che i matematici hanno precisato le loro definizioni, ed hanno adottato degli strumenti adeguati per descrivere simbolicamente gli enti che servono alla fisica ed alla meccanica; risultato questo del tutto positivo. Ma queste ricerche hanno anche stimolato una analisi logica più approfondita del concetto di continuo geometrico, ed hanno portato alla costruzione di intere teorie che in qualche modo sorpassano i risultati della nostra immaginazione, e della elaborazione che la nostra fantasia costruisce sulle esperienze elementari.

Possiamo quindi dire che nella geometria si verifica uno scambio continuo tra fantasia e ragione: la prima offre alla nostra mente delle immagini suggestive, la seconda le precisa, le elabora, e costruisce gli edifici ammirabili delle teorie scientifiche. Queste ultime, a loro volta, ripresentano alla fantasia creatrice delle grandi menti gli stimoli per ulteriori costruzioni, che rompono gli schemi stabiliti e fondano nuove costruzioni.

Come ho detto all'inizio, io vedo in queste conquiste la testimonianza di una vicenda storica affascinante, che si sviluppa durante tutta la storia dell'uomo, il quale cerca la verità e la insegue, noncurante del dolore e della fatica; perché la ricerca della verità ci si presenta come il compito più bello e più alto che l'uomo si può proporre, e che lo riscatta dai suoi mali, dalle sue miserie, dai suoi errori e dalle sue manchevolezze. □