Reimpaginato maggio 2013

CARLO FELICE MANARA

L'evoluzione della matematizzazione della conoscenza.

1 - Pensiamo che valga la pena di dedicare un poco di riflessione al fenomeno che potremmo brevemente indicare come *matematizzazione della conoscenza*, perché pensiamo che esso sia uno dei tratti caratteristici del sapere scientifico moderno; in questa opinione siamo confortati anche dal fatto che a questo argomento è stata dedicata una tavola rotonda durante l'ultimo Congresso mondiale di filosofia che si è tenuto a Düsseldorf, nell'autunno del 1978. Tuttavia avvertiamo subito che l'argomento sarà presentato dal punto di vista di un matematico che ha ben poca conoscenza dei problemi filosofici e si limita a riflettere sulla propria scienza e sui significato dell'apporto che essa dà al sapere umano: è pertanto naturale attendersi che il nostro discorso presenti soltanto una visione parziale del fenomeno e presenti di conseguenza dei limiti che saranno facili da scoprire.
Riteniamo anzitutto che sia opportuno fare un'analisi preliminare sul significato del termine *matematizzazione*; questo infatti può apparire chiaro a prima vista, ma si rivela abbastanza generico ad una analisi ed ad una riflessione più attente. Di conseguenza una prima parte del nostro lavoro consisterà nel cercare di analizzare vari significati che il termine matematizzazione può avere. Condurremo questa analisi seguendo storicamente lo sviluppo della matematica nei secoli ed il conseguente sviluppo della matematizzazione della conoscenza scientifica. Avremo anche l'occasione di verificare che la matematizzazione ha raggiunto vari livelli e diverse profondità, e che quella che potremmo sbrigativamente chiamare la matematizzazione moderna è il risalutato di uno sviluppo lungo e a volte faticoso.
Per comodità, collegheremo i vari momenti della matematizzazione della scienza, ed i livelli corrispondenti, ai nomi di certi scienziati che in un certo senso hanno fatto epoca; il che non significa affatto che questo collegamento abbia un significato diverso da quello di una denominazione a volte puramente convenzionale. Ancor meno che ci servirà per appoggiare il discorso. Il ricordare certi nomi piuttosto che certi altri non vorrà avere significato di valutazione delle persone o delle teorie che nomineremo. Ci rendiamo conto di quanto vi sia di impreciso in questo ragionare per epoche; infatti, da un certo punto di vista, si potrebbe dire che il progresso scientifico avviene con una crescita continua, e che pertanto non si può pretendere di scandirlo esaurientemente con date e con nomi. In tale senso pensiamo che si possa interpretare la frase pronunciata da D. Hilbert nel celebre discorso da lui pronunciato al Congresso mondiale dei matematici di Parigi, nel 1900: "Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwiklung der Wissenschaft". Tuttavia appare altrettanto vero che certe idee, certe sintesi, addirittura certi problemi, nell'epoca del loro apparire sulla scena della scienza, hanno dato a questa un indirizzo diverso da quello che aveva prima, in modo quasi improvviso. Si direbbe quasi che certe scoperte, certe teorie, erano "nell'aria", e che l'opera di un genio o di una mente particolarmente

aperta e profonda, abbia fatto precipitare una situazione; ma che questa precipitazione sia stata forse preparata da molto tempo, anche se in modo confuso e quasi nascosto. Avvertiamo infine che adotteremo questa scansione temporale per grandi epoche senza voler tuttavia prendere posizione a proposito della priorità storica della scoperte e delle idee; invero queste saranno attribuite secondo la tradizione comune della storiografia corrente della scienza, anche se questa commette delle ingiustizie e degli errori, che non è nostro scopo riparare qui.

Le precisazioni e le precauzioni che abbiamo premesso ci permettono ora di presentare quelle che consideriamo a nostro parere le grandi fasi della matematizzazione che precede la matematizzazione attuale, sulla quale ci soffermeremo in una seconda parte dell'articolo presente. A nostro parere, si potrebbero prendere in considerazione quattro grandi fasi di matematizzazione della conoscenza, che precedono la situazione moderna.

Una prima fase potrebbe essere chiamata classica e potrebbe essere associata ai nomi di *Euclide* e di *Archimede*; una seconda fase ha il suo inizio nei secoli XVI e XVII e potrebbe essere associata ai nomi di *G. Galilei, R. Descartes, I. Newton, G.W. Leibnitz*. L'inizio di una terza fase potrebbe essere situato a cavallo tra i secoli XVIII e XIX; ad essa potrebbero essere associati i nomi di *P. S. de Laplace* e di *J. B. Fourier*. Una quarta fase potrebbe essere situata all'inizio del nostro secolo, ed associata al nome di *A. Einstein*, ed alle sue teorie della relatività, speciale e generale.

Vedremo subito da quali elementi pensiamo caratterizzate queste fasi di matematizzazione, che - a nostro parere – corrispondono a livelli via via più profondi della utilizzazione del linguaggio e dei concetti della matematica nella conoscenza del mondo.

2 - Pensiamo che non sia necessario soffermarsi a lungo nella descrizione e nella analisi di quella matematizzazione che abbiamo convenzionalmente chiamata classica. Vorremmo limitarci a ricordare che la geometria, definita spesso come scienza della quantità continua, aveva una parte importantissima nella matematica del tempo: il continuo geometrico era concepito come un oggetto trasparente all'intelletto, un oggetto le cui proprietà elementari venivano presentate da certe proposizioni (postulati o assiomi) la cui validità si pensava fondata dalla evidenza immediata, frutto della osservazione. Le proprietà più riposte, e non immediatamente evidenti, venivano rigorosamente dedotte col ragionamento, che trovava nel sillogismo tradizionale e nei mezzi della logica classica gli strumenti fondamentali per il proprio lavoro. Si potrebbe dire che le proprietà del continuo geometrico, intuite o dimostrate, le operazioni concrete che si potevano immaginare sulle figure geometriche fornivano alla matematica dell'epoca il succedaneo delle proprietà e delle operazioni che oggi vengono attribuite ed eseguite nel corpo dei numeri reali. Pertanto il continuo geometrico, con le sue proprietà intuite o dimostrate, faceva da succedaneo ad una struttura algebrica fondamentale per tutta la matematica; di conseguenza molti problemi che oggi si pensano di competenza dell'algebra erano affrontati e risolti con metodi geometrici.

Ripetiamo che non intendiamo proseguire in questa direzione, perché anche questa visione classica della geometria, che considera questa scienza nella luce classica e non si pone problemi di carattere critico, è ancora oggi quella che prevale presso le persone colte, che non abbiano approfondito i loro studi nel campo matematico. Questa è anche la visione della geometria che viene adottata in molte applicazioni, nella tecnica, nell'ingegneria, talvolta in certi campi della macrofisica.

3 - Abbiamo associato un secondo livello di matematizzazione ai nomi di *G. Galilei, R. Descartes, I. Newton, G.W. Leibnitz*. A nostro parere l'approfondimento della matematizzazione nella scienza della natura può essere collegato da una parte all'ampliamento dell'oggetto della scienza matematizzata, dall'altra alla maturazione della matematica ed al progresso dei suoi procedimenti. In questo ordine di idee la matematica ci si presenta (forse per la prima volta nella storia) come il linguaggio principale, per non dire l'unico, della scienza. A questo proposito appare qui di rigore la citazione dal classico passo del Saggiatore galileiano: "……*la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto davanti a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*".
Non si potrebbe forse esprimere più chiaramente la rivendicazione della matematica ad essere la lingua della scienza (la filosofia, nel linguaggio di Galileo); tanto perentoria è l'affermazione che la ignoranza di questa lingua porta ad aggirarsi vanamente in un oscuro laberinto.
Sarebbe forse interessante domandarsi quali sono i titoli per i quali - a questo livello- la matematica pretende questa posizione privilegiata di lingua della scienza. A questo proposito, una prima analisi porterebbe ad identificare due circostanze che giustificano, almeno in parte, questa rivendicazione di primato; e vogliamo esporle qui, senza pregiudizio di ulteriori analisi di cui si potrà presentare la opportunità.
Non ci soffermiamo ovviamente sulle discussioni galileiane che riguardano il metodo sperimentale, perché queste esulano dalle nostre considerazioni in questo istante, e ci porterebbero d'altronde a dire cose note e risapute. Vorremmo invece osservare che esiste un procedimento che conduce a *cifrare* la realtà fisica con la lingua della matematica; procedimento che appare a prima vista molto chiaro, e dotato quasi della stessa trasparenza della geometria e dei suoi procedimenti classici: vogliamo parlare del procedimento della misura, che ancora oggi è impiegato ed insegnato a livello elementare (come quando nella scuola elementare si insegna il sistema metrico decimale) e che associa ad ogni grandezza (lunghezza, peso, volume, ecc.) un numero che la rappresenta in modo inequivocabile. Ovviamente quel numero dipende essenzialmente dalla scelta di una grandezza che viene accettata e stabilita come unità di misura; ma fatta questa scelta (che è ovviamente arbitraria e convenzionale) tutto il resto discende (o pare discendere) con assoluta chiarezza ed univocità: invece di dire piccolo, grande, più grande, grandissimo ecc. si dirà: lungo tante e tante braccia, e non vi sarà più equivoco o incertezza.

Si direbbe quindi che un primo titolo ad essere la lingua della scienza è dato dalla assoluta chiarezza ed inequivocità del linguaggio stesso nel rappresentare le cose.
Soltanto una critica successiva e molto più matura porterà a mettere in luce i limiti di questa pretesa chiarezza assoluta, limiti che vogliamo ricordare qui per completezza riservandoci di ritornare sull'argomento in seguito. Tali limiti sono dati anzitutto dalla impossibilità di spingere la precisione della misura al di sotto di un certo termine, che è imposto dalla natura degli strumenti e dell'oggetto misurato; si arriverà a dire (e con ragione a nostro parere) che in ogni questione scientifica o pratica esistono dei limiti al di sotto dei quali la precisione della misura non ha neppure senso. Un secondo limite è dato dal fatto che la operazione di misura presuppone la manipolazione di un campione della grandezza che si vuole misurare; e questa manipolazione implica anzitutto l'accettazione di una specie di postulato di invarianza del campione di grandezza di fronte alla manipolazione stessa; in secondo luogo implica l'accettazione di un postulato che in certo modo accetta che la realtà che si misura è isomorfa all'insieme dei numeri reali. Per fare un esempio del tutto elementare, tratto dalla geometria euclidea classica, ci pare chiaro che la possibilità di misurare la lunghezza di un segmento implica la necessaria manipolazione di un campione di lunghezza (il metro, per esempio) che si postula invariante di fronte alle operazioni di trasporto; in secondo luogo la possibilità di determinare la misura della lunghezza di un segmento occorre anche accettare che si possa operare sui segmenti una operazione che viene chiamata convenzionalmente *somma* e che ha le stesse proprietà formali possedute dalla operazione di somma di due numeri.
È superfluo ricordare che la critica posteriore ha dimostrato la labilità di questi postulati, per quanto riguarda l'operazione di *cifrare* la realtà con i numeri; per esempio nella teoria della relatività ristretta la velocità risulta essere una grandezza di quelle che si chiamano *non archimedee*; il che significa per esempio che la legge di *somma* di due velocità non è così semplice come veniva richiesto dal postulato che abbiamo richiamato.
Questa tendenza della scienza della natura e l'approfondimento del livello di matematizzazione portò la meccanica a porsi come fine ideale una trasparenza analoga a quella che era stata conseguita dalla geometria euclidea classica; tale è l'impressione che si trae dalla lettura dei *Principia* di Newton.
La grossolanità degli strumenti di osservazione ed il predominio della fantasia e della immaginazione sulla logica pura portavano a dare alle grandezze fisiche la stessa continuità che era stata attribuita alle figure della geometria classica. Tuttavia si faceva strada la necessità di dominare in qualche modo l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande, sempre intuiti come assolutamente chiari, come due *species* contenute nel *genus* del continuo.
Sarebbe lungo analizzare quanto grande sia stata l'influenza di questa concezione del continuo materiale sulla nascita del calcolo infinitesimale; certo è che in Galileo ed in Newton poi troviamo delle argomentazioni che fanno appello alla evidenza di una proprietà di continuità che si presume posseduta dalla materia e che non si pensa lontanamente di mettere in dubbio.
Una seconda circostanza che autorizza in certo senso la rivendicazione della matematica a lingua di

tutto il sapere scientifico è correlativa alla prima e ne costituisce per così dire il complemento: a nostro parere essa è data dalla certezza della deduzione, che viene in questo caso ridotta al calcolo. Ed infatti una volta che una grandezza viene rappresentata con i numeri, non soltanto essa è individuata in modo certo, ma può esser messa in relazione ad altre, può essere sottomessa a quel procedimento certissimo di deduzione che è il calcolo. Non vi sono parole da impiegare, non argomentazioni: soltanto conti da fare, che chiunque potrebbe sviluppare perché il significato di quei simboli che sono stati usati per cifrare la realtà non è legato strettamente ai contenuti che hanno generato le cifre, e le leggi del calcolo non dipendono dal significato che le cifre hanno: sono le leggi ferree della deduzione matematica, che sono le leggi della grammatica dei simboli utilizzati per rappresentare la realtà.

L'esempio della geometria analitica, la cui invenzione è attribuita ai geni di *R. Descartes* e *P. Fermat*, è abbastanza calzante per spiegare il significato ed il successo di questa metodologia: parlando con i termini di oggi, la geometria analitica non è un insieme di contenuti, ma semplicemente un metodo, come bene avverte Descartes alla fine della sua "Géométrie": mediante certe operazioni convenzionali, ad ogni oggetto della geometria (per esempio ad ogni punto) viene associato un insieme di numeri, che sono le sue coordinate. Le relazioni geometriche tra punti vengono tradotte in relazioni aritmetiche o algebriche tra i numeri che li rappresentano. In teoria quindi ogni teorema, che la geometria classica dimostrava con metodi sillogistici o comunque con il ricorso al ragionamento verbale, può essere ricondotto alla verifica del sussistere di certe relazioni tra numeri; ogni problema, che nella geometria classica veniva risolto con la fantasia, con il ragionamento, con l'invenzione, diventa qui un problema di algebra, che questa scienza risolve. Il solo compito del geometra è quello di interpretare i risultati, cioè di 'decifrare' il linguaggio, giunto alle conclusioni ed alle risposte in forza delle sue leggi interne, senza che il significato delle cifre fosse conosciuto durante il procedimento di risoluzione.

Ovviamente è chiaro che un atteggiamento di questo tipo era impossibile presso la matematica greca, perché presuppone un'algebra che sia una dottrina autonoma e già matura; mentre (abbiamo detto) presso i Greci la geometria aveva invece una specie di funzione vicariante nei riguardi dell'algebra, che non esisteva nella forma che conosciamo. Senza volere fare un'analisi di cause ed effetti, è tuttavia importante constatare il completo rovesciamento di prospettiva, e il conseguente ampliamento di orizzonti che la scienza della natura otteneva da questa mentalità nuova.

Ci pare che un esempio tipico di questa crisi del potere del linguaggio comune nei riguardi degli enti della matematica sia fornito dal celebre paradosso dell'infinito che Galileo presenta (Discorsi e dimostrazioni matematiche, giornata I) e che potrebbe essere espresso brevemente con la domanda: nell'insieme dei numeri interi sono più numerosi i numeri che sono quadrati o quelli che non lo sono? La risposta che Galileo dà conduce sostanzialmente a riconoscere che nel campo degli insiemi infiniti (quale è quello degli interi) i concetti di *maggiore* e *minore*, di *tutto* e di *parte*, vanno applicati con precauzione, se non si vuole giungere a risultati a paradossali.

Si potrebbe scorgere qui la prima affermazione della necessità di inventare dei simboli appositi per gli enti della matematica e della logica, che sarà una delle caratteristiche dell'analisi dei fondamenti

dell'inizio del sec. XX.
Pensiamo di poter dire che una delle glorie della matematica di quest'epoca è stata quella di aver sentito la necessità di inventare dei concetti e dei simboli appositi per esprimere l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande, e per poter calcolare su questi enti, cioè per poter proseguire sulla strada che riduce la deduzione a calcolo, della quale abbiamo già parlato poco fa.
Camminando lungo questa via la scienza si avvicinava a quell'ideale di cui abbiamo già detto , che consiste nel tendere a dare alla meccanica la stessa trasparenza che la scienza greca aveva dato alla geometria. In particolare i fenomeni della natura che questo livello di matematizzazione raggiunge sono essenzialmente (salvo qualche eccezione) quelli reversibili, cioè quelli in cui il senso del tempo non ha importanza; per esprimerci con una frase pittoresca, anche se ormai logorata dall'uso, le leggi che Newton assegna al sistema solare ci danno l'avvenire come il passato e descrivono questo sistema quasi come un orologio le cui ruote possono impunemente essere fatte girare in un senso oppure nel senso opposto. Sarebbe occorsa un'ulteriore maturazione della matematica perché questa diventasse il linguaggio della scienza che tiene conto della evoluzione temporale in cui (come avviene in realtà) l'universo non si presenta come un sistema reversibile, ma il tempo scorre in un senso privilegiato.

4 - Ciò che abbiamo detto or ora giustifica la nostra scelta che associa un terzo livello di matematizzazione ad uno stadio della scienza a cui abbiamo associato i nomi di *J. B. Fourier* e di *P. S. Laplace*. Nel caso di Fourier questa scelta convenzionale è giustificata dal fatto che egli ha dato la teoria matematica completa di un fenomeno che è in certo senso il paradigma dei fenomeni naturali non reversibili: la trasmissione del calore. Pertanto si potrebbe dire che Fourier ha messo le basi di quella scienza termodinamica che ha avuto il suo compimento alla fine del secolo XIX, sviluppandosi via via col pensiero di Carnot, Gibbs, Boltzmann.
Non è necessario dire che lo sfruttamento della energia termica sta alla base della nostra vita associata e del fenomeno della industrializzazione, o almeno della prima e della seconda industrializzazione e che quindi l'acquisizione di questo tipo di fenomeno al trattamento matematico incide profondamente sulla nostra visione della natura e dei nostri rapporti con essa. Ma vorremmo ricordare il nome di Fourier anche per un'altra ragione, che fonda la modernità della sua concezione dell'uso della matematica nella conoscenza della natura; egli infatti dichiara che i suoi sviluppi sulla teoria del calore hanno una validità che prescinde dalla natura di questo ente; di conseguenza essi sono validi se il calore è concepito, come si diceva una volta, come un 'fluido sottilissimo' oppure come un movimento statistico di molecole, come è concepito oggi.
A nostro parere, questa concezione di Fourier prelude ad un atteggiamento molto moderno della fisica; va ricordato infatti che questa scienza ha spesso parlato di *modelli* della realtà. Un caso classico è rappresentato dal modello dell'atomo di *Bohr*, immaginato come un microscopico sistema planetario, del quale il nucleo atomico rappresenta il Sole e gli elettroni rappresentano i pianeti. Alla luce delle concezioni successive, potremmo dire che questo modello era basato più sulla immaginazione che

sulla logica e sui dati sperimentali. Questi costrinsero la fisica ad abbandonare un modo così ingenuo di concepire il modello della realtà, per adottare soltanto una concezione di legge fisica che nulla concede alla immaginazione, ma scrive direttamente le relazioni matematiche tra le grandezze osservate, senza cercare di appoggiarle ad un modello concreto, che soddisfi alla nostra abitudine di immaginare ciò che sfugge ai nostri sensi come un infinito impiccolimento o ingrandimento delle cose che esperimentiamo nella vita quotidiana.

La realtà delle leggi fisiche è invece ben diversa: per esempio gli uomini grandi grandi immaginati da J. Swift nel paese di Brobdingnag non si reggerebbero in piedi, perché le loro ossa cederebbero sotto il carico, se fossero della stessa sostanza delle nostre.

Non si vuole con questi discorsi condannare a priori ogni tentativo di farsi una immagine ragionevole del mondo utilizzando la immaginazione; si vuole soltanto dire che spesso certe 'crisi' della fisica sono state semplicemente provocate dal fatto che certe immagini che trasportavano nella scala atomica delle esperienze effettuate alla nostra scala macroscopica si sono rivelate contraddittorie. Ciò non significa affatto una contraddittorietà della realtà, come qualcuno si è affrettato a concludere, perché le relazioni matematiche fondate sulla esperienza e sulla deduzione matematica restavano e restano sempre valide; ciò significa invece che il livello logico della conoscenza è ben diverso dal livello a cui si arresta la immaginazione. Spesso quella che viene chiamata "intuizione fisica" non è che una estensione delle nostre esperienze, adatte alla nostra scala, a domini molto piccoli o molto grandi; estensione che nessun esperimento giustifica e che quindi non ha validità diversa da quella che le è conferita dalla immaginazione o da una ragionevole presunzione.

Accanto al nome di J. B. Fourier abbiamo ricordato quello di P. S. Laplace; la ragione di questa menzione è data dal fatto che viene attribuito a Laplace il primo trattato organico in cui viene definito il concetto di probabilità, ed in cui questo concetto viene fondato con il metodo classico di definizione e deduzione per calcolo. Ripetiamo ancora una volta che mai come in questo caso le indicazioni che diamo sono convenzionali: è infatti ben noto che il calcolo delle probabilità non incomincia con Laplace: bastino i nomi di *B. Pascal*, di *P. Fermat*, di *Bernoulli* per far ricordare che questa disciplina era coltivata da più di un secolo prima di Laplace. Ma abbiamo fatto il nome di questo grande matematico per mettere in evidenza la circostanza che la sua epoca e la sua opera segnano l'inizio di una trattazione sistematica dei fenomeni aleatori e quindi il primo passo per tentare di ricuperare alla razionalizzazione matematica ciò che si era sempre pensato come non razionalizzabile, cioè il caso. Anche in questo caso, al di là delle minuzia della storiografia, si tratta di un passo essenziale, di un ampliamento imprevisto del dominio delle cosa che si presumano cadano sotto la matematizzazione. Non ci interessa per il momento soffermarci sulla problematica che nasce dalla impostazione che Laplace dà al calcolo delle probabilità, né ricordare le aporie alle quali dà luogo la teoria classica (che oggi viene anche chiamata *teoria oggettiva*) quando si ricerchi la saldatura tra la definizione teorica della probabilità e la applicazione concreta che del calcolo viene fatta per la descrizione dei fenomeni dei collettivi e ancor più per l'inferenza statistica. Ci interessa qui soltanto osservare che la visione di

Laplace apriva nuovi campi alla matematizzazione della realtà fisica ed umana.

5 - Abbiamo collegato l'ulteriore livello di matematizzazione al nome di *A. Einstein* ed alla teoria della relatività; dedicheremo i prossimi paragrafi a giustificare questa nostra scelta, ma prima dobbiamo ricordare che dopo la matematizzazione a cui abbiamo associato i nomi di Fourier e Laplace e quella a cui associamo il nome di Einstein si è verificata una crisi nella matematica, che ha cambiato radicalmente la fisionomia di questa scienza, portandola dall'assetto classico a quello attuale o moderno. Non ci interessa ovviamente ricordare qui la massa di risultati che è giusto vanto della matematica del secolo XIX: ci interessa, ripetiamo, l'assetto logico, e la immagine che la scienza aveva di se stessa all'inizio del secolo. Per avere un'idea possiamo ricordare che nella classica Enciclopedia di Diderot la matematica viene ancora definita come *scienza della quantità*, e che questa viene suddivisa in quantità continua (che è oggetto della geometria) e quantità discreta (che è oggetto della aritmetica).

In altre parole la matematica veniva considerata come una scienza che era specificata e determinata dai suoi oggetti, dai suoi contenuti. In particolare la geometria veniva considerata come una scienza che ha determinati oggetti e che li studia, rilevando dalla osservazione le proprietà evidenti e dimostrando con la logica le proprietà più riposte. Ora proprio la geometria, durante il secolo XIX doveva iniziare quella crisi epistemologica che ha costretto la matematica a cambiare l'immagine che aveva di se stessa e ad imboccare la strada che porta alla situazione moderna e quindi al concetto moderno di matematizzazione.

Come è ben noto, la crisi che ha determinato questa evoluzione potrebbe essere chiamata crisi delle geometrie non euclidee e poi delle *geometrie-non*, semplicemente. È ben noto che la crisi ha radici molto lontane e trae la sua origine dalle discussioni secolari del cosiddetto *Quinto postulato* di Euclide, o postulato della parallela; ci basti ricordare qui che tale postulato afferma sostanzialmente che, data una retta ed un punto fuori di essa, per il punto passa una sola retta che è parallela alla retta data; non è questa la formulazione di Euclide, ma si tratta di una proposizione che è equivalente a quella di Euclide e quindi possiamo discutere su di essa.

Questa proposizione è stata criticata fin dalla antichità classica, e criticata da alcuni come "poco evidente"; non analizziamo i fondamenti psicologici su cui si fondava questo giudizio (o si pensa si fondasse). Sta di fatto che da una parte la proposizione veniva considerata come "vera", cioè rispondente alla realtà fattuale delle cose, e dall'altra veniva criticata nella sua formulazione. Nacque da questo atteggiamento quella che oggi si suol chiamare la *questione del quinto postulato,* che diede luogo a molti tentativi di dimostrazione della proposizione. Tentativi che ovviamente si fondavano sulla evidenza degli altri postulati enunciati da Euclide e sulle leggi della logica, ed inoltre (presso gli autori meno provveduti) su altre proposizioni introdotte surrettiziamente come evidenti, eppure esplicitamente sostituite al postulato euclideo e giudicate come "più evidenti" di esso.

Tutti questi sforzi di menti insigni testimoniano tra l'altro della concezione classica della geometria: non si aveva il minimo dubbio sul fatto che la geometria dicesse "qualche cosa" di vero (il proprio oggetto). Pertanto questo oggetto fondava la certezza della evidenza iniziale delle proposizioni date senza dimostrazione, ma soprattutto fondava la coerenza e non contraddittorietà dell'insieme delle proposizioni iniziali. La dimostrazione del fatto che le geometrie non euclidee, cioè quei sistemi logici che partono da presupposti tra cui c'è anche la negazione del postulato euclideo della parallela, sono consistenti, metteva in crisi questa concezione tradizionale della geometria e del suo oggetto. Invero ancora oggi nessuno è disposto ad accettare che possano esistere due teorie perfettamente coerenti, ma contraddittorie tra loro, di un medesimo oggetto.

Da questa crisi nascevano varie conseguenze molto importanti sulle quali dovremo soffermarci perché caratterizzano l'atteggiamento moderno della matematica. Anzitutto la geometria, nel senso classico del termine, veniva ad acquistare due aspetti nettamente diversi tra loro: il primo è l'aspetto di una teoria che un matematico ha chiamato *ipotetico - deduttiva*. In questa scienza le proposizioni iniziali sono scelte con un atto libero di colui che costruisce la teoria stessa e non imposte da una evidenza che non viene più accettata come criterio di verità in questo senso: di conseguenza la verità delle proposizioni che si deducono non è data dalla loro rispondenza ad una verità oggettiva (i teoremi), ma soltanto dal fatto che esse sono dedotte dalle proposizioni iniziali scelte con il rispetto assoluto delle regole logiche di deduzione (se questa viene fatta verbalmente) o delle regole di deduzione del calcolo simbolico che è stato adottato per rappresentare gli enti di cui si parla. Questi sono dei puri simboli verbali vuoti, e la loro definizione viene data implicitamente dal sistema di proposizioni primitive, che in questo ordine di idee si presentano come delle "regole di gioco"; ovviamente in questo atteggiamento il nome che viene dato agli oggetti di cui si parla non ha significato; allora non vi è scandalo nel fatto che la 'retta' della geometria euclidea si comporti in modo contradditorio rispetto a quella della geometria non euclidea: si tratta infatti di concetti diversi, anche se indicati con nomi uguali; e sono diversi perché sono diverse le loro definizioni, che sono fornite da diversi sistemi di postulati. Siamo un poco nella situazione analoga a quella di un gioco di carte, nel quale ovviamente la vera definizione delle varie figure è data dalle regole del gioco e nessuno si scandalizza se l'asso del bridge è diverso dall'asso del gioco della scopa: si hanno infatti due oggetti diversi, anche se denotati con nomi uguali, e sono diversi proprio per il fatto che si riferiscono a diversi sistemi di regole.

Ovviamente in questa concezione resta ben poco della vecchia idea della geometria, e nascono dei problemi di cui dovremo dire brevemente. Il primo potrebbe essere formulato domandandosi quale diritto ha un puro gioco logico di chiamarsi ancora 'geometria' e quale relazione ha un gioco cosiffatto con le nostre esperienze concrete sui corpi fisici, che pure hanno dato origine, nei tempi classici, alla dottrina geometrica. La risposta viene data osservando che nessuno obbliga a scegliere le proposizioni primitive in modo che siano totalmente staccate dalle nostre esperienze spaziali; la sola cosa che si pretende è che non sia attribuita a queste proposizioni il carattere di verità assoluta evidente e incontrastabile; in questo ordine di idee quindi la geometria nel senso classico diventa, come è stato detto pittorescamente, il 'primo capitolo della fisica'; cioè acquista il carattere di una teoria fisica della quale non ha senso dire che è completamente vera o completamente falsa; che ci dà delle verità ma non la verità assoluta; che ci dà un modello razionale della realtà sperimentale sensibile con un certo ordine di approssimazione. Pertanto una teoria che dà, entro certi limiti, un ritratto razionale delle nostre esperienze e permette anche di prevedere il risultato di altre, senza tuttavia pretendere di dare tutta la verità e di esaurire tutto il contenuto inesauribile delle esperienze possibili. È questo l'atteggiamento del fisico, che accetta le teorie in modo che si potrebbe dire ‘provvisorio', non negando il loro valore conoscitivo, ma anche non elevando questo valore a livelli assoluti.

Per fare un altro paragone, si potrebbe ricordare che una carta topografica di una regione ristretta della terra è certamente una rappresentazione che contiene degli errori, perché è dimostrato che con una carta (flessibile ma non estendibile) non si può rivestire mai una regione, anche limitata, di una superficie curva come quella della Terra senza che nascano lacerazioni o duplicazioni; ma nessuno oserà dire che la carta topografica non dà indicazioni che hanno una loro validità, pratica ed anche puramente conoscitiva. Ovviamente questa discussione viene ad avere la stessa portata di una discussione sulla validità conoscitiva di una teoria fisica o addirittura di una teoria scientifica in generale, e pertanto non possiamo qui approfondire la questione.

Un secondo problema fondamentale che nasce dal nuovo atteggiamento della geometria, intesa come una teoria ipotetico - deduttiva, riguarda invece una questione che non è soltanto matematica ma anche logica. Invero se le proposizioni primitive di una teoria (sia essa una geometria, sia essa una qualunque teoria deduttiva) nella quale i nomi non indicano delle cose di un mondo esterno, ma sono dati puramente per indicare degli oggetti di pensiero che traggono la loro definizione dall'insieme delle proposizioni primitive, nasce il problema di garantire che questo insieme non nasconda una contraddizione, la quale non viene percepita immediatamente nel momento della enunciazione, ma si renderebbe manifesta quando si siano tratte conseguenze in numero sufficiente dalle proposizioni scelte. Saremmo in una situazione analoga a quello di un inventore di un nuovo gioco, il quale non si avvede che le regole da lui scelte possono condurre a situazioni contraddittorie e paradossali, per esempio possono condurre ad una situazione in cui entrambi i giocatori possano a buon diritto dichiararsi vincitori. Se così fosse, ovviamente la teoria costruita non avrebbe alcun valore, perché dal sistema di proposizioni scelte si potrebbe dedurre ogni proposizione secondo la legge logica che già era nota alla logica classica, secondo la quale “ex falso sequitur quidquam”. Questo problema, che è tipico della impostazione moderna della matematica, verrà incontrato ad un livello ancora più profondo nei riguardi dei fondamenti dell'aritmetica e pertanto ci riserviamo di toccarlo ancora nel seguito. Qui vorremmo soltanto osservare che esso è stato posto dallo sviluppo della geometria nel corso del secolo XIX, e conduce necessariamente allo sbocco nella visione moderna della matematica, e ad una visione nuova del problema della natura degli oggetti di questa scienza.

Riservandoci quindi di tornare in seguito su tale questione fondamentale, non soltanto per la matematica ma anche, e diremmo soprattutto, per la matematizzazione, cioè per l'impiego della matematica come linguaggio principe della scienza rigorosa della natura, vorremmo parlare qui brevemente della concezione che venne avanzata da F. Klein e che diede un indirizzo diverso dapprima alla geometria pura e poi alla concezione di questa come scienza della natura. Invero pare a noi che la concezione kleiniana conduca in modo abbastanza naturale a quella geometrizzazione della fisica che caratterizza il livello di matematizzazione che abbiamo associato al nome di Einstein ed alla relatività (speciale e generale). Non abbiamo qui lo spazio per esporre con la dovuta completezza la visione kleiniana, che è stata esposta nella celebre dissertazione inaugurale che viene comunemente indicata dagli storici con la espressione "*Programma di Erlangen*". Daremo quindi soltanto qualche idea in proposito, riattaccandoci a quanto abbiamo avuto occasione di dire parlando dei metodi della geometria analitica instaurati da Descartes. Abbiamo detto che il metodo della geometria analitica consiste essenzialmente nello stabilire un sistema di convenzioni che associa ad ogni punto certi enti dell'algebra, e traduce ogni relazione tra punti in relazioni tra numeri che rappresentano i punti stessi; è del tutto evidente che le coordinate che vengono associate ad ogni punto sono dipendenti dalle convenzioni adottate: per esempio dalla posizione del sistema di riferimento, e dalla scelta del segmento che è unità della misura delle lunghezze. Il che del resto si verifica anche in pratica: anche sulla superficie terrestre infatti ogni punto può essere rappresentato mediante due coordinate (longitudine e latitudine), ma è ben chiaro che il valore di queste dipende essenzialmente dalla scelta di certi elementi arbitrari: per esempio il valore della longitudine dipende anche dal fatto che il meridiano di Greenwich è stato scelto per convenzione internazionale come il meridiano di longitudine zero. Pertanto quei numeri che vengono convenzionalmente associati agli elementi geometrici non danno direttamente delle proprietà geometriche dell'ente che si studia; quelle proprietà si costruiscono, si leggono con certe operazioni che si eseguiscono a partire dalle coordinate. Per esempio, per restare nel caso della superficie terrestre, ovviamente la distanza tra due punti sulla Terra non deve dipendere dalle coordinate geografiche dei due punti: essa deve rimanere la stessa, anche se si cambiassero le convenzioni che si adottano per attribuire ad ogni punto una coppia di coordinate; essa è invariante di fronte ad ogni cambiamento della convenzioni. Orbene l'idea fondamentale di Klein consiste appunto nell'aver collegato le varie geometrie, nate dal rigoglioso sviluppo della scienza geometrica del secolo XIX, alla ricerca di *invarianti* che sono le vere proprietà geometriche, quelle che interessano al ricercatore, indipendentemente dalle convenzioni che conducono a "cifrare" la realtà geometrica mediante numeri. Klein ha avuto il merito di associare i vari cambiamenti di convenzioni ad una struttura algebrica, la struttura di *gruppo*, che permette di formalizzare in modo rigoroso e preciso i cambiamenti di coordinate che conseguono dalle differenti scelte delle convenzioni di rappresentazione. In questo modo Klein ha introdotto un criterio di classificazione delle varie 'geometrie' che erano nate dal ceppo vetusto della geometria classica, cioè delle varie dottrine che tentavano di razionalizzare le nostre esperienze sul mondo esterno che riguardano la forma, la posizione e i rapporti spaziali tra i vari oggetti della fisica; ma ha anche fornito i criteri per tradurre in forma matematica rigorosa certe esigenze di obbiettività che stanno alla base della analisi della realtà sensibile che viene fatta dalla scienza.

6 - Le idee di Klein, che abbiamo cercato di esporre in forma elementare, hanno condotto a quella geometrizzazione della fisica che a nostro parere è una delle caratteristiche fondamentali del livello di matematizzazione che abbiamo associato al nome di Einstein ed alla teoria della relatività. Con questo - ripetiamo - non intendiamo affermare che esplicitamente e coscientemente vi fosse nei ricercatori che hanno costruito il calcolo differenziale assoluto (o calcolo tensoriale) tutta questa visione; intendiamo soltanto indicare una delle possibili linee di derivazione della visione relativistica della fisica e del livello di matematizzazione che ne consegue.

Se cerchiamo di analizzare i fondamenti di questo tipo di ricerca fisica troviamo anzitutto che tra i postulati di Einstein vi è la negazione di un osservatore privilegiato nella fisica; di conseguenza ogni osservatore ha diritto di descrivere l'universo mediante il proprio sistema di coordinate, che riguardano in questo caso non soltanto i fenomeni spaziali, ma anche le coordinate temporali. È questa una prima differenziazione dalla visione newtoniana, che attribuiva alle misure un significato assoluto, cioè indipendente dall'osservatore. In questo caso invece, la 'cifratura' della esperienza avviene con un procedimento ben più generale di quello di misura, che – come abbiamo visto - presuppone certe proprietà (postulate) degli enti della fisica e delle nostre esperienze su di essi.

Pertanto, nella visione einsteiniana, ogni osservatore ha diritto di dare una sua descrizione del mondo e delle sue leggi con le sue convenzioni di coordinate. La cosa che più interessa, dal punto di vista epistemologico, è che siano conosciute le leggi che traducono la descrizione dell'universo e delle sue leggi fatta da un osservatore in quella di un altro osservatore, di modo che sia possibile, con i metodi del calcolo tensoriale, andare alla ricerca degli invarianti, cioè di quelle relazioni e di quelle proprietà che, essendo indipendenti dalle convenzioni che ogni osservatore ha dovuto necessariamente adottare, rappresentano quindi delle proprietà che si potrebbero chiamare obbiettive della realtà fisica osservata.

Klein identifica questi cambiamenti di descrizione dell'universo fisico con elementi di un gruppo di trasformazioni e pertanto permette di ricercare metodicamente gli invarianti; il che, a nostro parere, corrisponde esattamente a quella ricerca di obbiettività, di indipendenza interoggettiva, che forma una delle prerogative della ricerca scientifica, o almeno della ricerca scientifica in qualche campo della scienza della natura. In questo senso pertanto la geometrizzazione della fisica operata dalla visione einsteiniana non implica per nulla la confusione tra la categoria spaziale e quella temporale che venne temuta da qualche analisi filosofica all'epoca della comparsa della relatività speciale e generale. Sappiamo che per la teoria gravitazionale che forma il nucleo di questa dottrina, la presenza di materia produce una "curvatura del cronotopo"; e qui il termine "curvatura del cronotopo" ha un significato strettamente tecnico, e pertanto sarebbe vano ed inutile cercare di dare ad esso una interpretazione che si rifaccia alle proprietà degli enti geometrici della nostra esperienza quotidiana e quindi soddisfi la fantasia. Tuttavia benché questo modello matematico della realtà fisica non sia rappresentabile facilmente con la fantasia, ciò non toglie che sia coerente e pertanto valido per rappresentare la realtà stessa, almeno entro certi margini di approssimazione. Come abbiamo detto, il vero scopo della teoria

è quello di esprimere delle relazioni fisico-matematiche che abbiano validità indipendentemente dall'osservatore che le rileva e quindi siano delle proprietà obbiettive (nel senso detto sopra, di intersoggettività) dei fenomeni e quindi della realtà osservata e studiata.
Si giustifica così la considerazione del livello einsteiniano, che potremmo brevemente descrivere come livello di geometrizzazione della fisica, come una fase fondamentale della matematizzazione della nostra conoscenza della natura.