Reggio Emilia, 26 ottobre 1998
Carlo Felice Manara

# DAI PROBLEMI CLASSICI DELL'ANTICHITÀ ALLA GEOMETRIA ANALITICA

**W. Kandisky. Swinging 1925. Tate Gallery**

... La semplice immaginazione non implica per sua natura alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta, ma, per poter esser certi delle cose che immaginiamo, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, e cioè il ragionamento....[Baruch Spinoza. *Tractatus theologico-politicus*.]

## 1 - La geometria greca, prodigio di chiarezza intellettuale.

Si potrebbe dire, senza timore di esagerazione, che la matematica greca costituisce una specie di miracolo intellettuale nella storia dell'umanità. (*) La cosa appare evidente se si paragona la matematica greca a quella coltivata e sviluppata da altri popoli. E ciò sia detto senza ignorare la ingegnosità, a volte grandissima, che altre civiltà, diversa dalla greca, hanno dimostrato nel trattare i concetti matematici. Ma il mio giudizio è fondato sul fatto che la matematica greca presenta i caratteri di astrattezza, di generalità, di rigore deduttivo che ne fanno una scienza nel senso proprio del termine. Ed in questo ordine di idee si potrebbe dire che il celebre trattato degli "Elementi" di Euclide si presenta a noi come il primo esemplare storico di trattato scientifico nel pieno senso della parola. E ciò, a mio parere, è provato anche dal fatto che il trattato euclideo è stato per secoli considerato come il paradigma dell'esposizione scientifica: infatti in esso noi incontriamo la procedura tipica della conoscenza delle cose che ci appaiono; conoscenza ottenuta, per così dire, dall'interno, attraverso la spiegazione. E lo schema metodologico è quello di sempre: schema che conduce a precisare il significato dei termini che si impiegheranno, ad enunciare chiaramente le cose che si accettano senza dimostrazione, perché "si vedono", e dedurre rigorosamente le altre.

Direi che su questo schema metodologico è fondato quello che oggi chiamiamo "metodo assiomatico" per la presentazione di una teoria scientifica; metodo che, come sappiamo, conduce ad enunciare all'inizio dell'esposizione teorica le proposizioni che si danno senza dimostrazione, e che vengono chiamate gli "assiomi" della teoria; ogni proposizione enunciata al di fuori del sistema di assiomi deve poi essere rigorosamente dimostrata.

È noto che, secondo certe nostre abitudini linguistiche, spesso col termine "*assioma*" si vorrebbe indicare una proposizione che si dà come evidente, e che quasi si impone all'assenso dei lettori o degli ascoltatori. Ma gli storici della matematica hanno osservato che il termine impiegato da Euclide è più blando e meno perentorio: come è noto esso è "*richieste*"; in greco "*aitèmata*", in italiano "Postulati", dal verbo latino "postulo" che vale "richiedo". Ed in questa scelta di termini da parte di Euclide gli storici hanno voluto vedere una preoccupazione critica, un'apertura dell'autore ad eventuali altre enunciazioni, diverse da quelle che egli stesso fornisce.

Da un certo punto di vista si potrebbe dire che per i Greci la geometria si avvicina ad essere un primo capitolo della fisica. Una dottrina che nasce dalla teorizzazione delle nostre esperienze sugli oggetti materiali e sui fenomeni energetici (raggi di luce ecc.) e dalle proprietà che noi, più o meno consciamente, intendiamo considerare come fondamentali per gli oggetti stessi. Per esempio penso che la manipolazione degli oggetti rigidi della realtà quotidiana abbia sempre fornito la maggior parte del materiale di osservazione sul quale è stata costruita la geometria euclidea classica; quella che F. Klein [1] considera come la "geometria fondamentale". E l'esistenza di una stretta contiguità tra la geometria e la fisica, intesa come scienza della materia, è confermata, a mio parere, per esempio dalle celebri argomentazioni che Platone svolge per identificare nei primi quattro poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro) le forme delle molecole elementari che costituiscono i quattro elementi fondamentali, nell'ordine: fuoco, terra, aria, acqua, dei quali si credeva costituito l'universo materiale secondo la fisica del tempo. [2]

Inoltre mi pare che non sia soltanto una "curiosità" il fatto che, secoli dopo Platone, all'inizio della chimica modernamente intesa, si tentò di spiegare le valenze chimiche degli elementi conosciuti all'epoca con la forma geometrica dei poliedri piccolissimi che si immaginava costituissero le loro molecole.

È da osservarsi infine che vari problemi logici posti dalla trattazione euclidea, e dalla filosofia greca, furono discussi nella matematica di tutti i secoli successivi; ed alcuni trovarono una sistemazione soltanto in epoca relativamente recente. Tra questi problemi vorrei ricordare quello della continuità, e quello della definizione "per astrazione", sui quali mi propongo di ritornare nel seguito di questo incontro.

## 2 - La critica filosofica

La nostra ammirazione per la scienza matematica greca non può arrestarsi a considerare l'imponente massa dei risultati che ci sono stati tramandati, ma, per essere completamente giustificata, deve spingersi a considerare anche l'analisi che i Greci hanno fatto delle procedure scientifiche, codificandole e sondando le ragioni della loro validità. Infatti in Aristotele ed in Euclide, e poi, secoli dopo, in Pappo troviamo presentate ed analizzate le procedure logiche che la nostra mente deve seguire per giungere a dimostrare inconfutabilmente una verità o per risolvere un problema. È noto che tali procedure vengono realizzate in due momenti, che i Greci hanno chiamato "analisi" e "sintesi". È appena necessario dire che esse sono valide ancora oggi, e sono sostanzialmente seguite ogni volta che si vuole fare un ragionamento rigoroso; anche se molti credono che siano state scoperte recentemente, e danno loro nomi inglesi come "top down" e "bottom up". Infatti Euclide, già nel III secolo a.C., scrive:

"<Si chiama> analisi un procedimento in cui si ammette come vera una certa proposizione [che si vuole dimostrare] e si deduce da questa ipotesi una serie di conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è evidente, oppure è stata ammessa come vera.

<Si chiama> sintesi il procedimento con il quale, partendo da certe proposizioni accettate, si giunge ad una proposizione che si vuole dimostrare." [3].

E Pappo, matematico alessandrino, qualche secolo dopo commenta: "L'analisi dunque prende come punto di partenza ciò che si cerca, e da qui deduce le conseguenze, fino a giungere a qualche proposizione che è ammessa come vera; perché nell'analisi noi accettiamo come dato ciò che vogliamo [dimostrare] e cerchiamo quali sono i fondamenti sui quali si basa, ed ancora i fondamenti dei fondamenti, e così via, fino a che riusciamo a giungere, in questo cammino a ritroso, a qualche cosa che è già noto, o che appartiene alla classe dei primi principi: questo metodo noi lo chiamiamo analisi o soluzione col metodo retrogrado.

Nella sintesi invece, invertendo il procedimento, prendiamo come punto di partenza ciò a cui siamo arrivati con l'analisi, e via via, dimostrando come tesi quelle proposizioni che avevamo prese come ipotesi, e collegandole in ordine logico, giungiamo alla fine a costruire o a dimostrare ciò che si cercava.

Possiamo ora osservare che l'analisi può essere di due tipi: l'analisi di un primo tipo si prefigge come scopo la ricerca della verità, ed è pertanto chiamata teoretica; quella del secondo tipo ricerca ciò che viene proposto come scopo di un problema e viene quindi chiamata problematica.” [4].

F. Enriques [5] descrive le procedure in parola nel modo seguente:
“La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa analisi si comincia a supporre che il problema $P$ sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza dei precedenti, finché si giunga ad un problema $R$ che si sappia risolvere.

La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema $R$, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di $P$. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di $P$ sono soluzioni di $R$, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc.”

È noto che i problemi che potremmo chiamare "di confine con la matematica" che la filosofia greca ha affrontato non si limitano alle questioni metodologiche riguardanti le procedure di ricerca della verità o delle soluzioni dei problemi; altre questioni riguardano ciò che si potrebbe chiamare la costituzione intima del continuo geometrico ed il suo significato, ed infine la portata ed il significato delle procedure infinite. Forse il problema storicamente più antico che riguarda la natura e, per così dire, la costituzione del continuo è quello che scaturisce dalla scoperta dell’esistenza di coppie di grandezze incommensurabili, conseguenza questa del teorema detto "di Pitagora". È pure noto che la dimostrazione della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili, per esempio il lato e la diagonale di uno stesso quadrato, viene ottenuta sulla base di considerazioni aritmetiche, che riguardano in particolare l'esistenza della decomposizione unica di un intero in fattori primi, e le leggi delle potenze.

È stato osservato che l'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un medesimo quadrato implica la non esistenza di un preteso "atomo" di spazio geometrico, comunque piccolo esso si immagini: si tratta quindi di una conferma della supremazia del ragionamento, della logica, sopra ogni possibile esperienza od osservazione.

Il continuo geometrico poneva quindi dei problemi squisitamente intellettuali, che in certo modo sancivano l' insufficienza dell'aritmetica a dominare tutto l'universo geometrico. Si dovettero quindi prendere in considerazione anche altri numeri, diversi dagli interi e dai rapporti tra gli interi. Numeri che sono rappresentati da rapporti tra grandezze continue, e che i Greci chiamarono "alogoi" o anche "arrhetoi": inesprimibili con rapporti; e poiché il rapporto veniva anche indicato con "logos", ed in latino con " ratio", questi numeri, non rappresentabili con un unico rapporto tra interi, vengono oggi abitualmente chiamati anche "irrazionali". Un nome che talvolta provoca perplessità in qualcuno non molto esperto del linguaggio matematico, il quale si meraviglia del fatto che la matematica, che pretende di presentarsi come il dominio della razionalità suprema ed assoluta, abbia a che fare con l'irrazionale. (!)

In forza di queste osservazioni appare abbastanza naturale il fatto che il concetto di continuità geometrica sia stato collegato anche con i problemi riguardanti le procedure infinite, ed il loro significato. Si può dire che a questo filone appartengono le problematiche nate dai celebri paradossi eleatici, come quello del moto e quello detto "di Achille". E strettamente collegate con le questioni riguardanti le classi infinite sono anche quelle classiche, legate alla teoria delle proporzioni; argomento su cui ritorneremo.

## 3 - Esistenza, costruzioni ed operazioni.

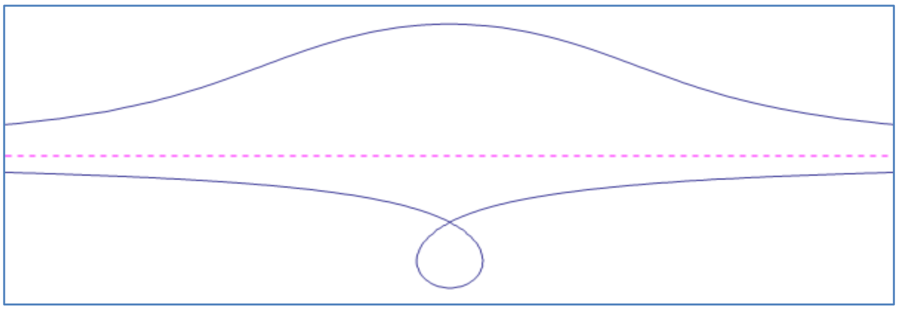
Le questioni cui abbiamo accennato nel precedente paragrafo conducono in modo naturale al problema della "esistenza" degli enti della matematica. È opinione comune che la matematica greca non accettasse enunciazioni di esistenza che non fossero collegate con la costruzione concreta degli enti di cui si parla. Tuttavia anche questo atteggiamento viene messo in crisi dalla problematica relativa alla continuità; problematica che viene incontrata in occasione della teoria delle proporzioni. Ritorneremo in seguito su questi ultimi problemi.

A proposito delle costruzioni e della costruibilità degli enti che si nominavano, ricordiamo che i Greci ammettevano come eseguibili anche certe manipolazioni che noi oggi preferiamo non prendere in considerazione. Ricordo a questo proposito l'opinione di H. G. Zeuthen [6], il quale scrive che per "inserzione" in generale, si intende "…la costruzione di un segmento di retta, i cui estremi siano situati su delle linee date e che passa, esso stesso il suo prolungamento, per un punto dato. Tale segmento può in ogni caso ottenersi meccanicamente senza grande difficoltà <...>. Nella geometria dei Greci accade sovente di rintracciare che una costruzione è ricondotta ad un problema "di inserzione" e si riscontra pure che, ricondotta una costruzione proposta ad un'inserzione, non è detto nemmeno come poi si effettui questa operazione."

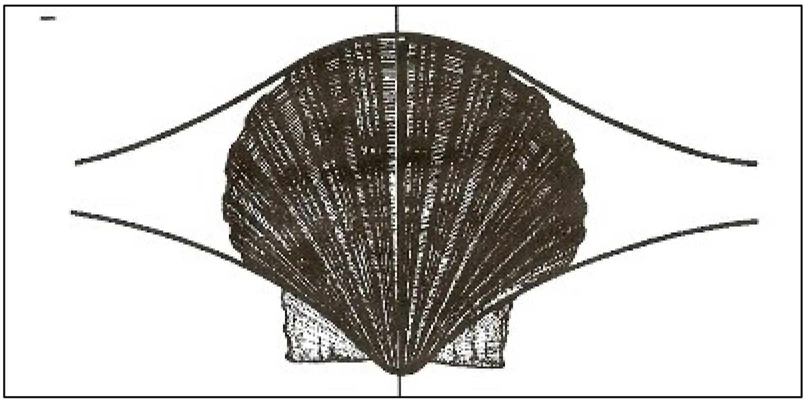
Oggi l'elaborazione dei problemi geometrici con gli strumenti della geometria analitica, e l'analisi delle procedure risolutive dell'algebra, conducono ad una classificazione dei problemi che è molto più profonda di quelle elaborate dalla geometria antica, che non possedeva i nostri strumenti concettuali.

Si consideri per esempio il caso della classica curva piana che viene talvolta indicata con il nome di "Concoide di Nicomede". Essa può essere definita nel modo seguente: si fissino una retta $r$ ed un punto $O$ fuori di essa. Si fissi poi un segmento di lunghezza fissa, di estremi $A$ e $B$. Se si fa scorrere il punto $A$ sulla retta $r$, modo che il prolungamento del segmento passi sempre per $O$, il secondo estremo $B$ descrive una curva del quart'ordine che è appunto la Concoide di Nicomede.

Si evince da qui che il problema seguente: " Date due rette $r$ ed $s$, incidenti in un punto $P$, ed un punto $O$ fuori di esse, determinare le rette del fascio $O$ tali che il segmento intercettato su di esse dalle rette $r$ ed $s$ abbia una lunghezza data", viene risolto da un'equazione di IV grado, che in generale si verifica non risolubile elementarmente.



http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/concoide.html



http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/concoide.html

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte a proposito della classica costruzione con cui si risolve il problema della trisezione di un angolo qualunque (minore di un retto). Tale costruzione viene attribuita ad Archimede (Vedere l'articolo di A. Conti citato in [6]), e richiede che venga inserito un segmento di lunghezza data, in modo che gli estremi appartengano rispettivamente ad una retta e ad una circonferenza opportune, e che il suo prolungamento passi per un punto dato. Secondo il nostro modo di vedere le cose, questo problema non viene considerato come "elementare"; anche perché la nostra tradizione ha ormai classificato come "strumenti elementari" la riga ed il compasso, ed anche questi debbono essere usati in modo ben determinato. Per esempio la riga non deve essere graduata, e deve essere utilizzata soltanto per determinare l'intersezione tra una retta ed un'altra, oppure tra una retta ed una circonferenza. Inoltre l'algebra ha classificato e caratterizzato le equazioni risolubili con radicali quadratici, il che ha permesso di determinare e classificare chiaramente i problemi geometrici risolubili con strumenti elementari. Ovviamente queste osservazioni possono essere ulteriormente ampliate, con la considerazione dei problemi che noi oggi classifichiamo come "problemi trascendenti".

## 4 - La teoria delle proporzioni e l'infinito.

È classica la definizione che Euclide dà della proporzionalità nel Libro V degli "Elementi" [7]:
"Si dice che quattro grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda, ed una terza rispetto ad una quarta, quando risulta che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta, presi pure secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente tra i secondi, tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo [quando cioè presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza,

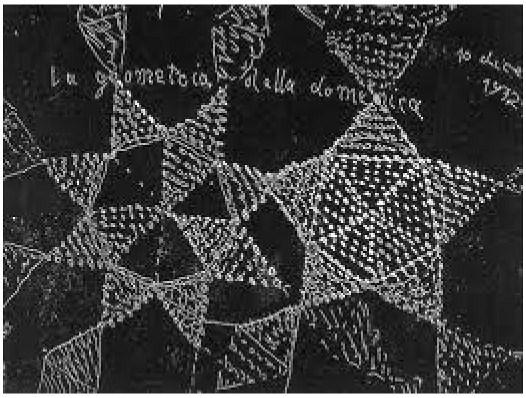
ed equimultipli della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta].”

Galileo esprime questi concetti nel modo seguente [8]: “Allora quattro grandezze sono proporzionali quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre, nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta.”

A proposito di questa definizione sono state fatte due osservazioni essenziali: la prima di queste conduce a rilevare che le frasi riportate non dicono "che cosa è" il rapporto tra due grandezze, ma si limitano a precisare quando i rapporti di due coppie di grandezze siano da considerarsi uguali fra loro. La seconda osservazione conduce a rilevare che la definizione dell’uguaglianza dei rapporti di due coppie di grandezze coinvolge necessariamente una infinità di operazioni, perché “...occorre paragonare tra loro, nel modo indicato dalla definizione, tutti gli equimultipli (rispettivamente delle due coppie di grandezze) secondo qualunque molteplicità”. [9]

Si osserva infine che anche la verifica [supposta possibile] dell’uguaglianza dei rapporti non garantisce l’esistenza degli enti che si nominano: ciò è stato rilevato dai commentatori di Euclide a proposito della celebre lacuna logica del libro V, lacuna che si presenta in occasione della dimostrazione della proposizione 18 del libro V, proposizione che dimostra la validità di quella operazione sulle proporzioni che viene abitualmente ricordata con il termine "componendo".

Precisamente è stato osservato che in questa dimostrazione si dà per valida l'esistenza della grandezza che è quarta proporzionale dopo tre date, esistenza che non è stata dimostrata in generale, né postulata.




**Leonardo Sinisgalli**

## 5 - Archimede. I problemi di quadratura e dei numeri grandi.

È impossibile far menzione qui di tutte le finezze logiche e le ingegnosità della matematica greca; ma anche in una rassegna sommaria e rudimentale come questa non è possibile passare sotto silenzio il nome di Archimede. In particolare mi pare necessario ricordare questo genio perché i suoi atteggiamenti e certi metodi da lui escogitati appaiono preludere ad atteggiamenti ed a metodi che dovevano realizzarsi molti secoli dopo di lui.

Il primo dei problemi che vorrei ricordare e che furono risolti da quel grande è il calcolo della superficie del segmento di parabola [10]. E vorrei ricordare particolarmente quella soluzione che oggi qualcuno potrebbe chiamare "euristica"; infatti l'argomentazione archimedea si fonda sulla suddivisione della superficie considerata in strisce sottilissime, e sulla applicazione di proprietà di statica, e dei baricentri delle figure. È noto che la prima procedura sarà ripresa, secoli più tardi, da Bonaventura Cavalieri [1598-1647] nella sua "Geometria degli indivisibili", che prelude al moderno calcolo integrale (Cfr. l'articolo di O. Chisini citato in [10]). La seconda procedura poi mi sembra confermare l'affermazione che ho fatto poco sopra, asserendo che per i Greci la geometria era in certo modo il primo capitolo della fisica; cioè una dottrina che mirava ad una conoscenza per così dire "dall'interno" dell'universo materiale che ci circonda.

Il secondo problema riguarda la rappresentazione dei numeri; è questo un problema di grandissima importanza, sul quale dovremo ritornare; qui ci basti ricordare che le convenzioni adottate dai Greci per rappresentare i numeri non avevano la chiarezza e la potenza di quelle indiane che, secoli dopo, ci sono state trasmessi dagli Arabi. Infatti, in mancanza di convenzioni chiare e potenti, i calcoli risultano particolarmente faticosi; appare quindi ammirevole la procedura che Archimede escogitò per dare risposta al problema della quadratura del cerchio. È noto che egli diede una valutazione della costante $\pi$, oggi abitualmente chiamata "pigreco", con le approssimazioni:

$$223/71 < \pi < 22/7;$$

approssimazioni che scaturiscono dall'applicazione del "metodo di exaustione" .

Ancora più interessante appare la trattazione che Archimede diede del problema dei numeri grandi. Nella lettera d'introduzione alla sua opera "L'Arenario" egli polemizza con i contemporanei, i quali dichiaravano che il numero dei granelli di sabbia esistenti al mondo è infinito; espressione che era una esplicita confessione di incapacità e di impotenza a dominare il problema. Archimede invece riuscì a costruire un sistema di concetti e di espressioni simboliche che gli permisero di "contare" il numero dei granelli di sabbia che riempirebbero una sfera avente il centro nel centro della terra ed avente come raggio la distanza tra la terra ed il sole. E aggiunse che tale numero [che appare così imponente alla nostra immaginazione] non è neppure il più grande tra i numeri che egli sa rappresentare.

## 6 - L'eredità greca e la rivoluzione linguistica .

I pochi, sommari e rudimentali cenni sulla matematica greca che abbiamo dato hanno come scopo anche quello di ricordare le radici remote dei problemi che la matematica dei nostri tempi ha dovuto affrontare.

È comprensibile che l'influenza esercitata dalla matematica classica sia stata molto grande nei secoli successivi. In particolare la soluzione geometrica di certi problemi, che oggi noi trattiamo abitualmente con metodi algebrici, appariva di una tale semplicità ed evidenza che addirittura quasi favoriva preclusioni alle ricerche ed alle indagini scientifiche. Per chiarire ciò che diciamo, ricordiamo per esempio ciò che scrive Gerolamo Cardano [1501-1576] nella sua opera intitolata "Ars Magna, sive da regulis algebraicis":

“...non appena l'uomo sarà giunto a conoscere i capitoli [cioè le regole] sino a quelli relativi al cubo <....> allora ne ha quanto basta per ogni caso algebrico, perché sino al cubo si trova gradazione in natura: in fatti vi sono linee, superficie e corpi: e le linee corrispondono alle incognite lineari, le superficie ai quadrati, i corpi ai cubi. Se pertanto abbiamo fornito su queste notizie sufficienti, sarà noto ciò che è necessario...”

Ed in un altro luogo afferma di arrestarsi a quelli che noi chiamiamo "monomi di terzo grado", affinché “...non fosse assolutamente stolto per noi l'aver progredito oltre, in ciò che non è lecito in natura” [11].

Vedremo che soltanto un progresso radicale degli strumenti espressivi permetterà alla scienza di uscire da queste strettoie. Tuttavia, prima di occuparmi di questo argomento, vorrei ricordare l'opera matematica di Niccolò Cusano [Cardinale Nikolaus Chriffs (1401-64); nato a Cues (latinizzato in Cusa) sulla Mosella].

Ricordo questo Autore perché ha affrontato il problema del calcolo di pigreco con un atteggiamento che a me appare del tutto nuovo, rispetto a quello di Archimede, cui abbiamo accennato. Infatti Archimede inscrive nella circonferenza di raggio dato dei poligoni regolari aventi i lati in numero crescente, e quindi di perimetro crescente: il valore approssimato di 22/7 per $\pi$ si ottiene, come è noto, con un poligono di 96 lati. Invece il Cusano tiene fisso il perimetro del poligono e calcola i raggi dei poligoni regolari aventi i lati in numero crescente che hanno quel perimetro. Con questa procedura egli si immette anche nel filone delle ricerche di massimi condizionati, che la geometria greca aveva iniziato e che riguardano i problemi abitualmente chiamati degli "isoperimetri". Inoltre l'impostazione di Cusano permette di costruire un algoritmo, una comoda procedura ricorrente per ottenere elementarmente dei valori sempre meglio approssimati della grandezza che si cerca [13].

Riprendo il filo del discorso, per parlare di quella che ho chiamato "rivoluzione linguistica". Tale infatti mi pare l'evento storico che si è verificato con l'introduzione nella civiltà occidentale delle convenzioni (inventate dagli Indiani, e trasmesse dagli Arabi) che ancora oggi tutte le nazioni civili impiegano per rappresentare i numeri. È noto che tale importazione si deve a Leonardo Pisano detto Fibonacci [1170-1250]. A mio parere questo evento può veramente essere detto rivoluzionario per l'enorme progresso apportato, con la facilità di rappresentazione dei numeri, e con l'efficacia nell'esecuzione delle operazioni su di essi; e la sua influenza si farà sentire nei secoli successivi, che hanno visto la rinascita rinascimentale della scienza.

## 7 - La Géométrie di Cartesio.

Anche sull'argomento della scienza rinascimentale mi è possibile dare soltanto una serie di cenni rudimentali e molto sommari. È d'obbligo tuttavia ricordare l'importanza del posto che la matematica occupa nel sorgere della scienza moderna; posto che non abbandonerà più nel seguito, fino ai nostri giorni.

Mi sembrano paradigmatiche a questo proposito le celebri parole scritte da Galileo [14]. Egli afferma che il gran libro dell'universo il quale continuamente sta aperto davanti ai nostri occhi "...è scritto con caratteri matematici"; e quindi chiunque ignori quei caratteri non potrà leggere nel libro, e si aggirerà nell'universo come in un "oscuro labirinto".

Nell'ambito della geometria mi pare di poter dire che l'opera geometrica di Cartesio appartiene pure a quel filone di evoluzione scientifica generato dalla rivoluzione linguistica della matematica. Vorrei ricordare che la prima edizione della celebre "Géométrie" apparve come appendice del celebre "Discours de la Méthode" [15].

In questo ordine di idee mi sembra che i progressi dell'algebra, avvenuti nel XVI secolo, abbiano permesso finalmente di realizzare in forma matematica quella procedura di analisi che era stata codificata dai Greci, come abbiamo visto nel paragrafo 2. Le costruzioni che permettono di rappresentare con lunghezze di segmenti ogni potenza della variabile, e l'utilizzazione delle leggi formali algebriche, permettono a Cartesio di ridurre la deduzione ad un calcolo, cioè alla applicazione delle leggi sintattiche del linguaggio utilizzato per rappresentare gli enti della geometria. Viene così superata quella barriera che erroneamente Cardano vedeva nella "natura" materiale, e che probabilmente gli era stata suggerita dalla costante rappresentazione geometrica degli enti dell'algebra.

In questa luce, la geometria ci si presenta come il primo esempio di teoria fisico-matematica moderna; cioè una teoria che utilizza il linguaggio matematico (simbolismo e regole sintattiche) per rappresentare una realtà di cui si presume data la struttura, per indagarne le proprietà e le leggi. È noto che soltanto in epoca relativamente recente [nella seconda metà del secolo XIX] si è riconosciuta la necessità logica di postulare la proprietà di continuità in relazione all'universo delle figure geometriche; tali enunciati di continuità vengono presentati con riferimento a vari Autori, anche nella manualistica corrente: Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert. Correlativamente quindi ha trovato cittadinanza anche l'insieme degli enti definiti da algoritmi infiniti. Inoltre risulta chiaro a noi il fatto che la classificazione dei problemi dipende ovviamente dall'insieme di strumenti che si considerano adoperabili, e dall'insieme delle operazioni che si considerano eseguibili.

Per esempio, mi pare chiaro che, a ben guardare, l'estrazione di radice quadrata [ed anche di ogni altra radice] genera un procedimento infinito, che noi trattiamo tranquillamente, senza lasciarci fermare da scrupoli generati dai paradossi sui quali riflettevano i Greci. Ma non sempre analizziamo quanto influisca l'immagine geometrica su questa tranquillità.

Ritengo inutile insistere qui sull'importanza che la visione matematica ha sulla scienza di oggi. Prenderò quindi a prestito le parole di un autore [Hans Magnus Enzensberger] di cui un giornale ha recentemente pubblicato un articolo, sotto un titolo abbastanza provocante: "L'irragionevole pesantezza della matematica". In questo articolo si leggono le parole seguenti: “...non è ancora esistita una civiltà che, come la nostra, sia stata in tal modo pervasa e si sia resa così dipendente, sin nella vita quotidiana, dai metodi matematici. <....> Si può essere a ragione del parere che viviamo in un'epoca d'oro della matematica.”

[1] Felix Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Vorschungen.
Tradotto in italiano da Gino Fano col titolo "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti." Annali di matematica. Serie II. Tomo XVII (1889-1890).
L'opera viene spesso richiamata con l'espressione "Programma di Erlangen", perché contiene sostanzialmente la dissertazione programmatica inaugurale, pronunciata dall'Autore all'inizio dei suoi corsi presso l'Università di Erlangen.

[2] Platone. Timeo.V, e.

[3] Euclide. Elementi. Lib. XIII. Gli storici sono propensi a giudicare le frasi riportate come interpolate. Cfr. per es. Thomas L. Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. New York (Dover Publications), 1956. Vol. I , C. IX, §6, pag. 138.

[4] Cfr. Heath, loc. cit. in [3].

[5] Federigo Enriques. Enciclopedia italiana. Istituto Treccani. Voce "Analisi".

[6] Cfr. L'articolo di Alberto Conti, intitolato: "Problemi di 3° grado: Duplicazione del cubo - Trisezione dell'angolo", in "Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques". Parte seconda. Bologna (Zanichelli), 1926. Pag.343.

[7] Cfr. Attilio Frajese & Lamberto Maccioni. Gli Elementi di Euclide.
Torino (Classici UTET),1970. Pag. 299.

[8] Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche. Giornata prima.

[9] Frajese & Maccioni. Op. cit. in [6], Pag.301.

[10] Oscar Chisini. Aree, lunghezze e volumi nella Geometria elementare. In "Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques". Parte I, Vol. II, Art.VIII. Bologna (Zanichelli), 1925. Pagg.61-131.

[11] Silvio Maracchia. Da Cardano a Galois. Milano (Feltrinelli), 1979. Pag.204.

[12] Oscar Chisini. Sulla teoria elementare degli isoperimetri. In "Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques. Parte III. Art.XXVI. Bologna (Zanichelli), 1926.

[13] La validità della idea di Niccolò Cusano non mi pare inficiata, nella sostanza, dagli errori materiali rilevati da Johannes Müller [1436-76] da Koenigsberg, detto Giovanni "Regiomontano" a seguito della latinizzazione del suo nome.

[14] Galileo Galilei [1564-1642]. Il Saggiatore.

[15] René Descartes [1596-1650]. La Géométrie.

Reggio Emilia, 26 ottobre 1998.

*File reimpaginato giugno 2013*

N. d. R. (*) Vedere anche: Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata*. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna. Feltrinelli Editore, Milano, 1996.

Si può anche vedere, nella homepage del sito www.lincei.it in evidenza, il testo scritto della conferenza conclusiva dell'adunanza solenne dell'Accademia dei Lincei il 10 giugno 2016, in chiusura dell'Anno accademico 2015-2016, ad opera di Enrico Bombieri, dal titolo "*La matematica: Scienza astratta ma indispensabile per il bene comune della società*".

http://www.lincei.it/files/documenti/Bombieri_chiusura_AA.pdf

## ARTICOLO DICIANNOVESIMO

# Problemi di 3° grado: Duplicazione del cubo - Trisezione dell'angolo di ALBERTO CONTI a Firenze.

### INTRODUZIONE

Il problema della duplicazione del cubo è provenuto a noi dalla più remota antichità. Ne fa fede un documento autentico, una lettera inviata al re Tolomeo III dal geometra greco ERATOSTENE, nato a Cirene nel 3° secolo av. Cristo.

Ivi si legge (1),

« Eratostene a Tolomeo salute:

« Narrano che uno degli antichi poeti tragici (2) facesse « apparire sulla scena Mino (3) nell'atto di far costruire una « tomba a Glauco (4), e che Mino accorgendosi che questa « era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse « piccolo spazio « invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo con- « servandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti « i lati del sepolcro ». Or è chiaro che egli si ingannava. « Infatti, duplicandone i lati una figura piana (5) si quadrupla « mentre una solida (6) si ottuplica. Allora anche fra i geo-

(1) V. ARCHIMEDIS: *Opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg (Lipsiae, 1881. Vol. III, p. 102-106).

(2) Secondo alcuni sarebbe Euripide (cfr. REINER: *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continuae proportionalibus inter duas datas.* Gottingae, 1798, p. 20).

Altri lo negano (cfr. HEIBERG, pag. 105 del volume citato nella nota precedente).

(3) Antico re di Creta.

(4) Suo figlio.

(5) Il quadrato.

(6) Il cubo.

« metri si pose la questione in qual modo si potesse duplicare « una data figura solida qualunque conservandone la specie. « E questo problema fu chiamato *duplicazione del cubo*.

« Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per « primo Ippocrate da Chio trovò che se fra due linee rette, « delle quali la maggiore sia doppia della minore, si inscri- « vono due medie in proporzione continua, il cubo sarà dupli- « cato, e così tramutò una difficoltà in altra non minore.

« Si narra poi che più tardi i Delii spinti dall'oracolo [1] « a duplicare una certa ara, caddero nello stesso imbarazzo [2]. « E dei legati vennero spediti ai geometri che convenivano « con Platone nell'Accademia, per eccitarli a cercare quanto « era richiesto. Essi se ne occuparono con diligenza e si dice « che, avendo cercato d'inserire due medie fra due rette, « Archita Tarantino vi riuscisse col semicilindro ed Eudosso « invece mediante linee curve. Questi furono seguiti dagli « altri, nel rendere più perfette le dimostrazioni, ma non « poterono effettuare la costruzione ed accomodarla alla pra- « tica, eccettuato forse Menecmo e con gran fatica... ».

Questa, nel suo esordio, la lettera con cui Eratostene riassumeva l'origine favolosa del problema e i primi tentativi fatti per risolverlo; ed insieme con tale lettera, Eratostene inviava al re Tolomeo una sua propria risoluzione del problema stesso, che in appresso riferiremo (§ 6).

A noi preme intanto soffermarci sull'idea attribuita ad Ippocrate da Chio (vissuto nella seconda metà del V secolo av. C.) per concorde parere degli Storici, di ridurre cioè il problema in questione, all'altro cosidetto della « *inserzione fra due segmenti dati di due medie proporzionali* », problema che, con un linguaggio più moderno, possiamo così enunciare:

*Dati due segmenti* a, b, *costruirne altri due* x, y, *che con* a, b, *presi come termini estremi, formino la progressione geometrica*

$$\div\!\div\, a : x : y : b,$$

[1] È noto che in Delo, piccola isola del mare Egeo, Apollo aveva altare e culto speciale.

[2] Donde il nome di *problema di Delo*, sotto cui talvolta designasi la questione di cui è qui fatta parola.



diguisachè si abbia

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \tag{1}$$

Invero, da questa catena di rapporti uguali deriva:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x = \dfrac{ab}{y} \end{cases}$$

da cui

$$x^3 = a^2 b \tag{2}$$

donde apparisce che il segmento $x$ è il *lato di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo assegnato, che ha come base il quadrato di lato* a *e come altezza* b [1].

In particolare, se si prende $b = ma$, deriva dalla (2)

$$x^3 = ma^3$$

cioè l'equazione della moltiplicazione d'un cubo per un numero intero $m$ qualsivoglia; e, più particolarmente ancora, se si prende $b = 2a$ si ricade appunto nel problema della duplicazione del cubo di lato $a$.

Colla scoperta attribuita ad Ippocrate la difficoltà era soltanto cambiata di forma e non si era conseguito altro vantaggio che quello di presentare la questione primitiva come un problema di geometria piana; e invano si facevano tentativi per risolverlo, col semplice uso della riga e del compasso. Nelle condizioni in cui era posto, il problema era impossibile a risolversi, ma l'evidenza di questa impossibilità dipende da considerazioni d'una natura completamente estranea alle investigazioni dei Greci.

È tuttavia presumibile che i Greci stessi sospettassero non esser possibile risolvere il problema coi soli mezzi della geometria elementare, attesochè i risultati di ARCHITA, PLATONE, MENECMO, ERATOSTENE, APOLLONIO, NICOMEDE, DIOCLE dimostrano, come vedremo, che, almeno provvisoriamente, questi geometri dovettero rinunciare alle condizioni che s'erano

[1] Così è manifesto che alla inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti dati $a$, $b$ è ricondotto pure il problema generale della costruzione di un cubo equivalente ad un dato parallelepipedo rettangolo.

imposte dapprima ed escogitare delle risoluzioni fondate su metodi essenzialmente diversi da quelli da essi medesimi adoperati per la risoluzione degli altri problemi geometrici.

* * *

Del *problema della trisezione dell'angolo*, non si hanno positive testimonianze circa la sua antichità, ma *l'ordine dei progressi dello spirito umano non permette di dubitarne* (¹); dopo aver diviso l'angolo in due parti uguali, la prima questione che si sarà affacciata alla mente sarà stata la divisione dell'angolo in tre parti uguali, se pure non sia stata addirittura l'altra più generale della divisione dell'angolo in due parti aventi tra loro un dato rapporto, come parrebbe di dover desumere dall'invenzione della *quadratrice* di IPPIA (§ 11). Da Ippia ad ARCHIMEDE non troviamo da menzionare altro matematico per questo problema della trisezione; e da Archimede veniamo a PAPPO, che nel IV libro della *Collezione* riferisce due costruzioni, da ritenersi fra le più antiche, ma delle quali non si sa a chi, originariamente, siano dovute.

Anche per questo problema furono fatti innumerevoli tentativi infruttuosi, e possiamo ripetere col BOSSUT (²) che « cet acharnement devint une espèce de maladie épidémique, « qui s'est trasmise de siècle en siècle jusqu'à nos jours: « elle devait cesser et elle cessa en effet pour ceux qui suivirent « le progrès des Mathématiques, lorsque dans les temps mo- « dernes on commença d'appliquer l'Algèbre à la Géometrie. « Aujourd'hui le mal est incurable pour ceux qui attaquent « ces questions avec les armes des anciens parce que n'étant « pas au courant des sciences actuelles, il n'existe aucun « moyen de les guérir ».

Tutte pertanto le varie ricerche occasionate da questo problema e dall'altro della duplicazione del cubo, sono state assai utili, sia per diversi strumenti ingegnosi inventati per risolvere i detti problemi in modo approssimato e più che sufficiente per la pratica, sia sopratutto per le nuove teorie geometriche di cui esse furono seme fecondo.

(¹) Cfr. J. F. MONTUCLA: *Histoire des Mathématiques*. Paris, 1792-1807. Parte I, libro III.

(²) Cfr. CHARLES BOSSUT: *Histoire générale des Mathématiques*. Paris, 1810.



Ciò premesso, passiamo a parlare di questi due problemi classici, dimostrando anzitutto l'impossibilità di risolverli *elementarmente*, cioè col solo uso della riga e del compasso (cfr. art. XVI, § 10), ed accennando ai più notevoli metodi adoperati dagli antichi e dai moderni per risolvere questi problemi o mediante le coniche, o mediante linee d'ordine superiore al secondo, o con apparecchi appositamente costruiti, o con metodi elementari d'approssimazione.

Terminiamo con un cenno dei metodi atti a risolvere i problemi più generali del 3° grado, mostrando in particolare come essi si possano ricondurre tutti o alla trisezione dell'angolo o all'inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti dati.

Sull'argomento di cui trattiamo, c'è tutta una estesa letteratura di tutti i tempi e di tutti i paesi, tanta è stata l'attrattiva esercitata da questi problemi! Per averne un'idea, basta consultare la *Bibliografia* del dott. WÖLFFING (¹), il quale, con grande diligenza, ha rintracciati e classificati cronologicamente, centinaia di lavori relativi alla divisione dell'angolo in tre o più parti uguali.

Più difficile quindi il nostro compito per mantenerci entro limiti proporzionati all'opera di cui fa parte quest'articolo, per segnalare tuttavia le più notevoli ricerche degli antichi e dei moderni, per riconoscere la somiglianza delle varie soluzioni, affine di evitare inutili ripetizioni e per scartare, senz'altro, tutti i tentativi pienamente infruttuosi.

Possa tale considerazione meritarci una maggiore indulgenza dei lettori!

## I.

**§ 1. Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della duplicazione del cubo.** — Se $l$ è il lato di un dato cubo e perciò $l^3$ ne rappresenta il volume, il lato di un altro

(¹) Cfr. *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftliche Vereins in Württemberg* - 1900 (Januar-Oktober) - 1912 (Juli).