Estratto dal

Periodico di Matematiche

Aprile 1966 - Serie IV, vol. XLIV
n. 2 (pagg. 106-122)

C. F. MANARA

Sul problema delle formule ben formate

Bologna
Nicola Zanichelli
Editore

Periodico di Matematiche serie IV vol. XLIV n. 2 - aprile 1966

SOMMARIO

G. CELLINI - Le dimostrazioni di Cavalieri del suo principio pag. 85

C. F. MANARA - Sul problema delle formule ben formate pag. 106

M. SPOGLIANTI - Il tema del concorso A VII pag. 123

QUESTIONI DIDATTICHE
B. DE FINETTI - Paradossi sulle medie pag. 138

Programmi di matematica nei nuovi Licei pag. 151

RECENSIONE pag. 159

QUESTIONI pag. 162

Editore NICOLA ZANICHELLI - Bologna

Il **Periodico di Matematiche** continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da **Federico Enriques** nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il **Periodico** pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

I Collaboratori sono pregati di inviare i manoscritti alla direzione del **Periodico di Matematiche**, presso l'Istituto Matematico della Università di Milano - Via Saldini, 50.

I manoscritti non si restituiscono.

I libri inviati in dono verranno annunziati indipendentemente dalla recensione che potrà esserne pubblicata. Le recensioni sono fatte dalla Redazione del **Periodico**, ovvero da persone che ne ricevono l'incarico.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Aprile 1966 - Serie IV, vol. XLIV
n. 2 (pagg. 106-122)

Sul problema delle formule ben formate

1. - Non c'è bisogno di ricordare ai nostri Lettori l'importanza che è stata assunta in questi ultimi tempi dalla Logica matematica: abbiamo detto altrove anche della possibilità che questa dottrina possa essere inclusa nei programmi dei Licei, almeno come uno tra gli argomenti facoltativi che l'insegnante può scegliere per dare ai suoi alunni un'idea delle teorie più importanti della Matematica moderna.

Riteniamo quindi non inutile esporre un breve capitolo di logica, riguardante un argomento che non ci sembra privo di interesse. È superfluo aggiungere che la trattazione che segue ha carattere essenzialmente divulgativo: non possiamo addentrarci nell'impresa di esporre qui un argomento cosiffatto in modo sempre rigoroso. Tuttavia crediamo così di poter dare qualche aiuto agli insegnanti, che potranno avere del materiale di esempio tra il quale scegliere gli argomenti, presentando i problemi logici fondamentali al fine di dare almeno la consapevolezza della loro esistenza, anche se non sarà possibile esporre la loro completa soluzione.

2. - A ben riflettere, il problema che ci proponiamo di trattare, cioè il problema delle « formule ben formate », sussiste anche a livello del linguaggio comune; tuttavia noi non siamo abituati a prenderlo in considerazione, perchè abbiamo imparato dai primi anni di vita, con l'uso del linguaggio comune (appreso in modo — per così dire — « operativo ») a costruirci il concetto di « frase dotata di senso ».

Prima di proseguire, notiamo che con il termine « frase » vogliamo indicare un discorso — formato da una proposizione o da più proposizioni, magari anche molto numerose — del quale abbia senso dire se è vero o falso; quindi nel senso che vogliamo dare-qui a questo vocabolo, non sarà una frase la seguente: «Che bella giornata!». È infatti questa la manifestazione di un apprezzamento estetico o di uno stato psicologico, che non può essere giudicata vera o falsa.

Abbiamo imparato — dicevo — nei primi anni di vita a distinguere le frasi dotate di senso dalle semplici successioni di parole che senso non hanno: per es. la successione di parole: «Socrate è un uomo» è una frase, mentre non lo sarebbe se mi limitassi a dire: «Socrate è un».

Analogamente al concetto di «frase dotata di senso», abbiamo anche appreso il concetto di «formula ben formata» quando ci sono stati insegnati gli elementi dell'Algebra: invero, indicando (come si fa abitualmente) con lettere latine minuscole

$$a, b, c, \dots\ x, y, z, \dots$$

dei numeri, ed indicando con i soliti simboli le operazioni su di essi, ci appare come del tutto evidente il fatto che delle successioni di segni come la seguente

$$a+b=b+a \tag{1}$$

sono formule dotate di un senso, almeno nel campo dell'Algebra, mentre non lo sono delle successioni come le seguenti:

$$ab+ \quad \text{oppure} \quad a+b= . \tag{2}$$

In questo ordine di idee il concetto di «formula ben formata» non viene quasi mai presentato nè richiamato esplicitamente, perchè ovviamente i segni dell'Algebra, per quanto in certa misura «artificiali», vengono sempre usati con una ben precisa relazione al loro significato. Quindi la formula ben formata coincide, in modo che diremmo naturale, con la «formula avente significato». Per servirci del linguaggio della Logica, potremmo dire che, nell'insegnamento dell'Algebra elementare e dell'uso dei suoi simboli, vengono regolarmente mescolati i due piani: sintattico e semantico, e quest'ultimo acquista quasi sempre un ufficio dominante rispetto al primo.

Le ragioni di questo modo abituale di procedere sono varie: possiamo anzitutto osservare che gli enti che si considerano vengono quasi automaticamente pensati come appartenenti a certi insiemi (anelli o campi numerici) dotati di leggi di composizione interna; e quasi naturalmente, quando si spiegano le convenzioni per costruire le formule, o per eseguire le operazioni indicate in esse, non ci si sofferma mai a ricordare esplicitamente che ogni operazione eseguita su una coppia di elementi dell'insieme dà (naturalmente!) un elemento dell'insieme. Così per es. quando si insegnano ai giovani (spesso con molta fatica) le convenzioni che reggono l'ordine in cui vanno eseguite le operazioni indicate in una espressione, si tralascia di ricordare una cosa che appare come del tutto naturale: così, quando si spiega che il simbolo

$$(a+b)\times c \tag{3}$$

esprime qualcosa di ben diverso dal simbolo

$$a+b\times c \tag{4}$$

si tralascia di dire che « *il numero* ottenuto dalla operazione indicata tra parentesi nella prima deve essere moltiplicata per c » perchè appare del tutto « naturale » che la operazione indicata con

$$a+b$$

quando è eseguita su due numeri dia per risultato un numero.

Questo abituale modo di presentare le regole dell'Algebra non ci esime tuttavia dall'osservare che, anche nell'Algebra elementare, le « espressioni » potrebbero essere presentate senza riferimento al loro significato, come pure sequenze [1] di simboli di tre tipi: lettere (indicanti numeri), simboli di operazione, simbolo di uguaglianza; si potrebbe quindi dare anche a questo livello la nozione di « formula ben formata », mantenendosi sul piano puramente sintattico.

3. - A complemento delle osservazioni del tutto elementari che abbiamo fatto nel § precedente, vogliamo ulteriormente ricordare che l'uso delle parentesi nelle formule algebriche potrebbe essere

---

(1) Useremo il termine « sequenza » come sinonimo della espressione « successione finita di segni »; l'useremo di preferenza, invece dei suoi sinonimi, in relazione al particolare problema che vogliamo qui trattare.

presentato anche in altro modo, che è più abituale nelle presentazioni dei calcoli logici e non è sempre sufficientemente messo in evidenza nelle trattazioni comuni; precisamente potrebbe essere presentato come la esistenza di una specie di « gerarchia » tra i segni di operazione. Per es. invece di dire che nella (4) la operazione di moltiplicazione, indicata con il segno « $\times$ » va eseguita prima della operazione di somma, indicata con il segno « $+$ » (e che se si volesse indicare che l'ordine della esecuzione va invertito dovremmo usare le parentesi, come nella (3)), si potrebbe convenire di dire che il segno « $+$ » è « più forte » del segno « $\times$ » e quindi estende il suo dominio, in avanti e all'indietro, fino a che si incontra un segno del suo stesso livello gerarchico. Invece il segno di moltiplicazione « $\times$ » estende il suo « dominio » fino al punto in cui si incontra un segno dello stesso suo livello gerarchico, oppure di livello superiore. Tale gerarchia può essere alterata mediante le parentesi, perchè si conviene che tutto ciò che viene scritto tra due parentesi deve essere inteso come un tutto unico.

Si può convenire infine che il segno « $=$ » sia di un livello gerarchico superiore a tutti gli altri segni e che in ogni espressione ve ne debba essere uno solo.

Come abbiamo detto, questo modo di presentare le cose è frequente quando si tratta di calcoli logici. Ricordiamo per es. le convenzioni che si espongono nella presentazione del calcolo delle proposizioni non analizzate; indichiamo con lettere latine minuscole in carattere neretto

$$\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}, \ldots$$

le singole proposizioni e indichiamo con i simboli soliti

$$\neg,\quad \vee,\quad \wedge, \tag{5}$$

i tre connettivi fondamentali: negazione, alternativa e congiunzione logica. Faremo uso anche del simbolo di « condizionale », chiamato anche « implicazione materiale », ponendo come al solito

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \tag{6}$$

convenzionalmente come un altro modo di scrivere l'alternativa

$$\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$$

e leggendo la (6) « p implica q » oppure anche « se p allora q ».

Come è noto, si conviene che tra i simboli (5) quello di negazione sia a livello gerarchico inferiore a tutti gli altri, e che gli altri due siano di livello gerarchico uguale tra loro; così per es. nella proposizione seguente

$$(7) \qquad \neg p \vee q$$

il segno di negazione si riferisce alla sola proposizione p; invece il segno di alternativa « $\vee$ » estende il suo dominio tanto al segno « $\neg p$ » che al segno « q ».

Per alterare la gerarchia dei segni nella (7) occorrerebbe usare le parentesi, e scrivere quindi per es.

$$(8) \qquad \neg (p \vee q)$$

per indicare la negazione della intera alternativa « $p \vee q$ ».

Da questo primo esempio si trae subito che l'uso delle parentesi risulta necessario per svolgere un calcolo logico, così come lo è nel calcolo algebrico. Si considerino a tal fine ulteriormente i seguenti esempi:

anzitutto lo schema di proposizione che traduce il dilemma « aut-aut », cioè la proposizione che è vera allora ed allora soltanto che una fra le due proposizioni p e q è vera e l'altra è falsa; tale proposizione è ovviamente data da

$$(9) \qquad (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

o anche, applicando una delle leggi di De Morgan

$$(10) \qquad (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \,.$$

In questo caso l'uso delle parentesi appare essenziale per dare senso alla proposizione. Analogamente si consideri la proposizione che traduce la « reductio ad absurdum », proposizione che scriveremo facendo uso del segno di implicazione materiale, riservandoci di tradurla poi con l'uso della alternativa e della negazione; tale proposizione è la seguente:

$$(11) \qquad [p \rightarrow (q \wedge \neg q)] \rightarrow \neg p \,;$$

traducendo come si è detto si ottiene la

$$\neg[\neg p \vee (q \wedge \neg q)] \vee \neg p$$

applicando a questa una legge di De Morgan si ha

$$[\neg(\neg p) \wedge \neg(q \wedge \neg q] \vee \neg p$$

ed applicando un'altra volta le leggi di De Morgan e la legge della « doppia negazione » si ha in definitiva:

$$[p \wedge (\neg q \vee q)] \vee \neg p\,. \tag{12}$$

È chiaro che anche in questo caso l'uso delle parentesi appare come essenziale.

Come è noto, poichè l'impiego delle parentesi potrebbe appesantire troppo le formule, si sono escogitate delle altre convenzioni per alterare le « gerarchie » tra i segni; una tra le più diffuse è quella convenzione che porta all'uso di punti accanto ai connettivi fondamentali, convenendo che un connettivo accanto al quale sta un gruppo di r punti « dómini », dalla parte dove i punti stanno, tutta quella parte di formula che contiene dei connettivi dello stesso livello gerarchico accanto ai quali stanno meno di r punti (²).

Con queste convenzioni le (10) e (12) sarebbero scritte nella forma seguente:

$$p \vee q \cdot \wedge \cdot \neg p \vee \neg q\,. \tag{10'}$$

$$p \wedge \cdot \neg q \vee q \cdot \cdot \vee \neg p\,. \tag{12'}$$

In modo analogo si consideri la proposizione seguente che in alcuni libri non specializzati viene considerata come equivalente alla « reductio ad absurdum »:

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q] \rightarrow \neg p \tag{13}$$

che, eliminando il simbolo di implicazione, si può scrivere

$$[(\neg p \vee q) \wedge q] \vee \neg p \tag{14}$$

(²) Si veda per es. Willard V. O. Quine, *Manuale di logica.* (Milano, 1960, trad. di M. Pacifico), parte 1, § 4.

e, con l'uso dei punti

(14') $$\neg p \vee q \cdot \wedge q \cdot\cdot \vee \neg p.$$

Gli esempi che abbiamo esposti sin qui, ed altri molti che si potrebbero esporre, mostrano chiaramente che è necessaria una indagine a livello strettamente sintattico, cioè sull'aspetto — per così dire — puramente grafico delle espressioni, a prescindere dal significato o dai significati che ad esse si potranno o si vorranno attribuire, per poter costruire un qualunque simbolismo che abbia un minimo di efficacia e di coerenza. Ed il primo passo nella indagine di cui abbiamo detto è quello che porta a precisare il concetto di «formula ben formata».

Invero questo concetto di «formula ben formata» (espressione che viene spesso richiamata con la sigla «f.b.f.» nei trattati in lingua italiana oppure con la formula «wff», abbreviazione della espressione inglese «well formed formula») risulta essere il correlativo, sul piano puramente sintattico, del concetto di «espressione dotata di senso» sul piano semantico. La sua precisazione pertanto ha costituito un progresso fondamentale della logica simbolica, analoga alla distinzione fondamentale tra semantica e sintassi.

Ciò che abbiamo detto sin qui potrebbe forse essere considerato come un bizantinismo inutile, da chi si pone dal punto di vista della Matematica tradizionale; tuttavia non si può non osservare che tale distinzione, tra semantica e sintassi, è stata messa in luce come necessaria dagli studi di Logica; e non c'è appello alla «intuizione» oppure magari alla «intelligenza» del lettore che possa esimere dal lavoro di ricerca del rigore nell'uso del formalismo.

4. - Poniamoci dal punto di vista della logica che viene chiamata «di primo grado» oppure anche «logica delle proposizioni non analizzate» [3]; più precisamente poniamoci dal punto di vista strettamente sintattico, cioè prescindiamo dal significato dei se-

(3) Abbiamo mutuato queste espressioni dai trattati correnti; in particolare la seconda mette in luce la differenza tra le teorie che stiamo trattando e la Logica classica, la quale *analizzava* le proposizioni, distinguendo in esse soggetto, predicati ecc.

gni che scriveremo; pertanto, secondo l'uso, diremo che l'insieme delle regole che daremo saranno delle regole di un « calcolo logico ».

Abbiamo detto che i segni che scriveremo saranno considerati come sprovvisti di significato (nel senso intuitivo del termine): essi dovranno avere la sola caratteristica di essere riconoscibili dalla loro forma tipografica. La definizione di « formula ben formata » conduce a precisare, tra tutte le possibili sequenze dei segni che scriveremo, quelle che considereremo accettabili nel nostro calcolo.

Considereremo tre tipi di segni: i segni del primo tipo saranno delle lettere latine minuscole, che scriveremo in carattere grassetto, come nelle formule da (6) a (14).

Per la verità osserviamo che si potrebbe usare una sola lettera, per es. $\boldsymbol{p}$, apponendo degli apici o degli asterischi quando si tratti di distinguere dei segni diversi; per es. i segni del primo tipo potrebbero essere

$$(15) \qquad \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}^{*},\ \boldsymbol{p}^{**},\ \boldsymbol{p}^{***},\ \boldsymbol{p}^{****}, \ldots$$

e così via.

Tuttavia per comodità di scrittura e di lettura si introducono anche delle altre lettere, come noi abbiamo già fatto.

I segni del secondo tipo sono i tre connettivi (5) che hanno la forma tipografica da noi già presentata

$$(5) \qquad \neg \quad \vee \quad \wedge$$

e che chiameremo, *convenzionalmente* « segno di negazione », « segno di alternativa » e « segno di congiunzione » rispettivamente, anche se non attribuiremo a queste denominazioni il significato che esse hanno abitualmente quando vengono usate.

Considereremo infine anche, tra i segni che dobbiamo usare, le parentesi, e precisamente la parentesi aperta e la parentesi chiusa « (» e «) ». A questi ultimi segni daremo il significato abituale che si dà anche nell'Algebra: precisamente se conveniamo di chiamare « proposizioni atomiche » i singoli segni che sono elencati nella (15) e di chiamare « proposizioni molecolari » quelle che sono formate dalle proposizioni atomiche per mezzo delle regole che daremo, le parentesi potranno essere usate per rinchiudere una singola proposizione molecolare, in modo che quella a sua volta possa essere sottoposta alle manipolazioni che ammetteremo valide, per ottenere ulteriori proposizioni.

Le regole cui accennavamo sono le seguenti:

1) Ogni proposizione atomica è una f.b.f.

2) Ogni formula che si ottiene premettendo il segno di negazione ad una f.b.f. è pure una formula ben formata.

3) Ogni formula che si ottiene ponendo il segno di alternativa o il segno di congiunzione tra due f.b.f. è una formula ben formata.

4) Nessuna altra formula del nostro calcolo è una formula ben formata (4).

Le quattro regole che abbiamo enunciate permettono di costruire, con un numero finito di operazioni, ogni formula ben formata del nostro calcolo. È interessante osservare che queste regole permettono anche di *decidere* se una formula scritta appartiene alla categoria delle formule ben formate, cioè di quelle che, in una interpretazione semantica del nostro calcolo, possono essere considerate come proposizioni. Tuttavia, a questo scopo, è necessario stabilire prima delle convenzioni per l'uso corretto delle parentesi: tali convenzioni possono forse apparire come tediose, ma le ricordiamo qui per dare un esempio delle precauzioni che si devono osservare per svincolarsi da quella che è abitualmente chiamata la «intuizione» e che può portare a delle fallacie dalle quali è difficile liberarsi.

Le convenzioni per l'uso delle parentesi a cui accennavamo traggono origine dalla procedura che conduce alla costruzione delle f.b.f.; questa procedura sostanzialmente porta a rinchiudere ogni f.b.f. tra due parentesi, la prima aperta e l'altra chiusa, quando da una f.b.f. che non sia una delle iniziali (15) si voglia costruirne una seconda a partire dalle regole 3 e 4.

Ovviamente il problema diventa un poco più complicato quando si sia di fronte ad una data espressione e ci si domandi di decidere, con un numero finito di operazioni, se essa appartenga

---

(4) Si veda per es. ETTORE CASARI, *Lineamenti di logica matematica*, (Milano, 1959), cap. 1, § 2.

alla classe delle f.b.f., cioè essa sia stata ottenuta soltanto utilizzando le regole 1, 2, 3, 4.

A tal fine occorre dare un criterio per decidere anzitutto se l'uso delle parentesi è stato fatto in modo corretto; una breve analisi porta a concludere che devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Il numero delle parentesi che entrano in una f.b.f. è pari (eventualmente zero);

2) Il numero delle parentesi aperte è uguale a quello delle parentesi chiuse;

3) Esaminando i segni della formula per es. da sinistra a destra, la prima parentesi che si incontra deve essere aperta e l'ultima deve essere chiusa.

Quando siano verificate queste tre condizioni, il controllo del fatto se una espressione è una f.b.f. si può fare con la procedura seguente: procedendo da sinistra a destra, si consideri la prima parentesi chiusa che si incontra; questa non può essere la prima parentesi, per la condizione 3; si consideri poi la parentesi immediatamente precedente la prima parentesi chiusa incontrata; essa è aperta e *la formula racchiusa tra queste due deve essere una f.b.f.*; si «segnino» queste due parentesi considerate e si proceda di nuovo in avanti, fino ad incontrare la prima parentesi chiusa che non sia stata già segnata; si retroceda fino alla parentesi aperta (non già segnata) immediatamente precedente; la formula compresa tra queste due parentesi deve essere una f.b.f.; si segnino queste due parentesi e si proceda in avanti, fino alla prima parentesi chiusa che non sia già stata segnata e così via ...

Si consideri a titolo di esempio la formula seguente, dove abbiamo segnato con a_1, a_2, a_3 le parentesi chiuse che si incontrano successivamente con il procedimento e con b_1, b_2, b_3 le corrispondenti parentesi aperte che vengono «segnate» in corrispondenza alle parentesi chiuse incontrate:

$$\underset{b_3}{(}\neg\underset{b_1}{(}\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{q}\underset{a_1}{)}\vee\underset{b_2}{(}\neg\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{q}\underset{a_2}{)}\ \underset{a_3}{)}\wedge\boldsymbol{q}\,.$$

Si noti anche che la clausola la quale impone che la formula racchiusa tra due parentesi che vengono segnate insieme sia una formula ben formata è fondamentale; a titolo di esempio si veda la formula seguente, nella quale sono soddisfatte le condizioni 1, 2, 3 riguardanti le parentesi

$$(\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee)\, \boldsymbol{q}$$

ma che non è una formula ben formata (5).

5. - Prima di proseguire con gli ulteriori sviluppi, vale forse la pena di osservare che le regole esposte per verificare se le parentesi sono bene messe in una formula ben formata possono apparire non molto semplici ma che, d'altra parte, di regole cosiffatte non possiamo fare a meno; invero se il lettore si ferma un poco a riflettere, troverà che anche nell'Algebra elementare si dovrebbero esporre delle regole analoghe per verificare se una espressione algebrica è scritta bene, cioè rappresenta un numero, dell'anello ovvero del campo che si considera. Il fatto che di solito tali regole non vengano enunciate non significa che esse non siano necessarie: significa soltanto che, nel caso delle espressioni algebriche, l'aspetto semantico prevale in modo tale sull'aspetto sintattico che si pensa bene di affidare al «buon senso» la constatazione che le parentesi siano ben messe; come è noto, per facilitare il compito, si indicano in modo diverso le coppie di parentesi «corrispondenti»: con graffe, parentesi quadre, parentesi tonde di vario tipo; di fatto tuttavia noi automaticamente seguiamo le regole che sono state enunciate quando vogliamo raggiun-

(5) Si noti che le convenzioni che noi esponiamo qui non sono le sole che possono essere adottate per le parentesi: poichè l'argomento è di grande importanza anche per i linguaggi dei calcolatori elettronici, in tali linguaggi si sono messe a punto delle procedure per il controllo delle parentesi. Una tale procedura potrebbe essere quella di assegnare il «peso» $+1$ ad ogni parentesi aperta, il «peso» -1 ad ogni parentesi chiusa imponendo che siano soddisfatte le seguenti condizioni: *a*) il «peso» delle parentesi di una parte di formula a partire da sinistra deve sempre essere positivo; *b*) il «peso» complessivo di una formula deve essere uguale a zero.

Si veda per es. ROBERT L. LEDLEY, *Programming and utilizing digital computers*, (New York, 1962, cap. 5, Sez. 5.8) oppure SILVANO AMBROSIO, *Linguaggi algebrici*, (Torino, 1965), § 1.43.

Per quanto riguarda la questione delle parentesi nelle formule, si veda anche STEPHEN C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, (Amsterdam, 1959), cap. 2, § 7.

gere tale scopo; la sola differenza è che tra due parentesi che sono state « segnate », in una delle fasi del procedimento che è stato descritto, deve esserci non una f.b.f. ma un « numero », cioè un numero singolo oppure uno ottenuto con l'applicazione corretta delle operazioni.

Sorge tuttavia spontanea la domanda se non sia possibile escogitare delle altre procedure, che possano essere giudicate più semplici o per es. possano dar luogo ad un programma semplice quando si voglia affidare la loro esecuzione ad un calcolatore elettronico.

A tal fine ci interessa qui ricordare che il sistema di notazioni logiche di cui abbiamo parlato non è l'unico che storicamente è stato escogitato.

Ricordiamo per es. che G. Frege aveva escogitato un sistema di notazioni logiche, le quali tuttavia pongono delle gravi difficoltà tipografiche per essere realizzate e dànno luogo ad un simbilismo che non è molto comodo. Tuttavia, accanto alle notazioni che abbiamo esposte, e che risalgono essenzialmente a D. Hilbert ed alla sua scuola, vi sono anche altre notazioni, che risalgono alla scuola del logico polacco Lukasiewicz; esse possono apparire forse a prima vista più complicate di quelle della scuola di Hilbert e di quelle equivalenti della scuola di Peano e poi di B. Russel, ma per un matematico risultano essere forse più comode, e soprattutto permettono di risolvere con estrema facilità, come vedremo, il problema della decisione in relazione alle f.b.f., cioè di dare un criterio che appare molto più semplice di quelli esposti fin qui per determinare se una espressione sia una f.b.f. oppure no.

Nelle notazioni della scuola polacca vi sono dei segni di tre specie; quelli della prima specie sono analoghi a quelli che abbiamo così chiamati in relazione al calcolo logico che abbiamo esposto; saranno da noi indicati con lettere minuscole dell'alfabeto latino, scritte in carattere solito (non grassetto).

Vi è un unico segno di seconda specie: la lettera maiuscola N; vi sono due segni di terza specie: le lettere maiuscole A e K. Il segno N corrisponde al segno di negazione del calcolo logico

---

(6) Si veda per es. Innocenzo M. Bochenski, *Nove lezioni di logica simbolica*, (Roma, 1938).

di HILBERT, le lettere A e K corrispondono rispettivamente ai segni di alternativa e di congiunzione del calcolo logico suddetto.

Si hanno così le seguenti corrispondenze di simbolismo, tra la notazione di HILBERT e quella della scuola polacca:

Negazione (non p)	$\neg p$	Np
Alternativa (p oppure q)	$p \vee q$	Apq
Congiunzione (p e q)	$p \wedge q$	Kpq.

Le regole per la formazione delle f.b.f., nelle quali — ripetiamo — non sono precisati i significati dei simboli, sono le seguenti:

1) I segni di prima specie sono f.b.f.;

2) Una f.b.f. preceduta da N è pure una f.b.f.;

3) Una coppia di f.b.f. preceduta da uno dei segni A oppure K è pure una f.b.f;

4) Nessuna altra f.b.f. può essere costruita con procedimenti diversi da questi.

La convenzione di costruire le f.b.f. facendo precedere i segni di seconda e terza specie a quelli di prima oppure alle coppie di f.b.f. permette di eliminare le parentesi da questo calcolo.

Per convincersi della verità di questa asserzione si può pensare ad un sistema di convenzioni del seguente tipo: si convenga di assegnare un «peso» ad ogni lettera e precisamente: il «peso» $+1$ alle lettere minuscole, il «peso» zero alla lettera N, il «peso» -1 alle lettere A e K. Allora dalle regole di formazione che abbiamo date si trae immediatamente che ogni f.b.f. necessariamente soddisfa alle seguenti condizioni:

a) ogni f.b.f. possiede «peso» complessivo $+1$;

b) ogni f.b.f. è tale che, sopprimendo a partire da sinistra un numero qualunque di segni successivi che le appartengono, il peso della sequenza che rimane è maggiore di zero.

In base a queste condizioni necessarie si trae immediatamente la validità della seguente

OSSERVAZIONE - In ogni f.b.f. l'ultimo segno a destra deve essere di prima specie, ed il primo a sinistra, quando la formula contenga più di un segno, non può essere di prima specie (cioè deve essere di seconda o di terza specie).

La prima parte della osservazione risulta essere evidente dalla condizione *b*); la seconda dalle regole 2 e 3.

Per intenderci, nelle analisi che seguiranno, useremo anche modi di esprimerci che porteranno a considerare i segni di seconda e terza specie (lettere maiuscole) come « operatori »: precisamente il segno N come un operatore che, premesso ad una formula ben formata, produce una seconda formula pure ben formata, in base alla regola 2; la f.b.f alla quale è premesso l'operatore N verrà chiamata anche l'« argomento » di questo operatore; analogamente le lettere A e K saranno considerate come operatori ognuno dei quali, premesso ad una coppia di f.b.f., dà una f.b.f., secondo la regola 3; le f.b.f. della coppia ordinata, alla quale è premesso uno degli operatori A oppure K verranno pure chiamate « argomenti » di questi operatori.

In base a quanto precede, si possono stabilire le convenzioni precise che permettono di evitare l'uso delle parentesi, per es. nel modo seguente: anzitutto si conviene che, quando nell'esame dei segni che costituiscono una f.b.f. si incontra una lettera N, l'argomento di questo operatore sia la prima sequenza di peso $+1$ che si incontra immediatamente a destra del segno N.

Inoltre si esamini la formula, per ipotesi ben formata, da sinistra a destra; se la prima lettera a sinistra è N, sopprimendo questa lettera si ottiene una formula che è ancora ben formata (regola 2) e che è l'argomento dell'operatore N. Se la prima lettera a sinistra rimasta è ancora N si ripete il ragionamento precedente, fino a sopprimere ogni simbolo N a sinistra; se la prima lettera rimasta a sinistra è A oppure K, sopprimendo tale lettera si ottiene una sequenza che non è più una f.b.f., perchè è di peso $+2$; si esamini allora tale sequenza *a partire da destra* e si « stacchi » da essa la prima sequenza che così si incontra e che soddisfa alla duplice condizione di essere una f.b.f. e che ciò che rimane dopo la sua soppressione sia ancora una f.b.f. Le due formule ben formate che così si ottengono (quella che si è « staccata » e quella che rimane) sono gli « argomenti » dell'operatore A oppure K che è stato soppresso a sinistra.

Per la illustrazione delle convenzioni ora esposte, si consideri ad esempio la seguente formula:

$$\neg\,[\,(\neg\,(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})) \vee \neg\boldsymbol{r}] \tag{16}$$

la quale, scritta con il simbolismo di HILBERT, richiede, come si vede, quattro coppie di parentesi e che viene tradotta nel simbolismo della scuola polacca con la formula seguente

(17) $$NAKNApqANpqNr\,.$$

È facile anzitutto verificare che la formula precedente soddisfa alle condizioni *a*) e *b*) enunciate sopra. Si noti poi che in essa non vi è bisogno di parentesi: invero, soppressa la prima N a sinistra che ha come argomento tutta la f.b.f. che sta alla sua destra, e che corrisponde al segno di negazione che è il primo nella formula (16), e soppresso poi il simbolo A che viene subito dopo il simbolo N, si ottiene la sequenza di segni

$$KNApqANpqNr$$

che non è più una f.b.f., perchè è di peso $+\,2$. Se esaminiamo ora la sequenza a cominciare da destra si vede che esiste un solo modo di individuare a partire da destra una sequenza che abbia peso $+\,1$ e che, una volta staccata, lasci alla sua sinistra una f.b.f.: precisamente non si può che staccare la sequenza Nr; ciò che rimane è la sequenza

$$KNApqANpq$$

che è una f.b.f.; se conveniamo di indicarla per brevità con l'unica lettera s, avremo che la (17) può essere scritta nella forma

$$NAsNr\,.$$

L'analisi può ora essere ripresa sulla f.b.f. che abbiamo indicata con s, e non offre più nessuna difficoltà.

Per concludere questo paragrafo, possiamo dare a titolo di esempio e di esercizio la traduzione, con le convenzioni del calcolo di cui ci stiamo occupando, delle formule (10), (11) e (14) scritte sopra. Esse vengono trascritte, senza l'uso di parentesi, con le formule seguenti rispettivamente:

(10″) $$KApqANpNq$$

(12″) $$AKpANqqNp$$

(14″) $$AKANpqqNp\,.$$

6. - L'analisi che abbiamo condotto fin qui ci permette anche di ottenere qualche cosa di più: precisamente permette di dimostrare che le condizioni *a*) e *b*), enunciate nel § precedente come ovviamente necessarie perchè una sequenza di segni delle tre specie sia una f.b.f., sono anche sufficienti perchè si verifichi tale circostanza.

Per dimostrare questa proprietà applichiamo il metodo di induzione; precisamente chiamiamo *lunghezza* di una sequenza il numero di segni che la costituiscono ed osserviamo che la proprietà è certamente vera per una sequenza di lunghezza 1; dimostriamo poi che se la proprietà è vera per ogni sequenza di lunghezza minore di n essa risulta vera anche per una sequenza di lunghezza n.

Supponiamo quindi data la nostra sequenza S di lunghezza n; osserviamo che potremo sempre supporre che il primo segno a sinistra non sia N; infatti sopprimendo quel segno o quei segni N che eventualmente vi fossero al primo posto a sinistra otterremmo una sequenza dello stesso peso della prima, che soddisfa alle stesse condizioni della prima e che ha lunghezza minore di n. Supposto che sia $n > 1$, osserviamo che il primo segno a sinistra non può essere di prima specie: infatti, se così fosse, ciò che si ottiene sopprimendo tale segno dovrebbe avere peso zero, per la proprietà *a*) e per la convenzione di peso che abbiamo attribuito ai segni di prima specie; ma ciò contraddice alla proprietà *b*). Quindi il primo segno a sinistra è certo un segno A oppure K; sopprimendolo abbiamo una sequenza che non può certo essere una f.b.f., perchè è di peso $+2$.

Poichè il numero $+2$ può essere ottenuto in un modo soltanto come somma di due numeri interi maggiori di zero e precisamente come somma di $1+1$, potremo considerare la nuova sequenza di peso $+2$ che abbiamo ottenuta come una successione di due sequenze di peso $+1$: indichiamole nell'ordine da sinistra a destra con S_1 ed S_2, ed osserviamo che a prima vista vi può essere ambiguità nella determinazione di S_1 ed S_2, perchè se vi fossero dei segni N nel punto in cui finisce l'una ed incomincia l'altra, essi potrebbero venire indifferentemente considerati appartenenti alla S_1 oppure alla S_2 senza alterare il peso di tali sequenze parziali; conveniamo pertanto di attribuire tutti i segni N, eventualmente presenti nel punto di separazione, alla S_2 in modo che il segno finale della S_1 sia di prima specie.

Allora la S_2 risulta essere chiaramente una sequenza di lunghezza minore di n e soddisfacente alle condizioni *a*) e *b*) del § precedente e pertanto per ipotesi risulta essere una f.b.f. Ma tale risulta essere anche la S_1, perchè essa pure ha lunghezza minore di n e soddisfa alle condizioni suddette: infatti la sequenza ottenuta dalla successione delle sequenze parziali S_1 ed S_2 ha peso $+2$; ma la S_2 è una f.b.f. come abbiamo già dimostrato e, per il modo con cui è stata costruita la S_1, si vede immediatamente che anche per essa sono soddisfatte le condizioni *a*) e *b*) più volte richiamate. Pertanto ognuna delle sequenze parziali S_1 ed S_2 è una formula ben formata, per ipotesi, e la sequenza originaria è stata ottenuta premettendo un segno di terza specie (di peso -1) ad una coppia di f.b.f. ed è quindi a sua volta una f.b.f.

C. F. Manara

Abbonamento 1966: Italia L. 2.400

estero L. 3.800

Il Periodico si pubblica in 5 fascicoli annuali ed il prezzo dei singoli fascicoli in corso è: Italia L. 600 - estero L. 900

L'importo dell'abbonamento, la richiesta di fascicoli sciolti o annate arretrate e ogni altra comunicazione di carattere amministrativo va indirizzata alla Casa Editrice Zanichelli - via Irnerio, 34 - Bologna (conto corrente postale 8/36).

Annate arretrate

Sono disponibili le annate complete della serie in corso (quarta) qui indicate: 1939 - 40 - 41 - 42 - 43 - 46 - 47 - 48 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59 60 - 61 - 62 - 63 - 64 - 65

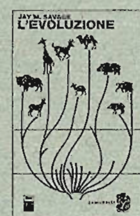
prezzo per l'Italia L. 2.400

prezzo per l'estero L. 3.800

Esistono anche fascicoli separati dei vari volumi al prezzo unitario di L. 800 per l'Italia e L. 1.200 per l'estero.

Collane di divulgazione scientifica

BMS Biblioteca di Monografie Scientifiche



Biologia Moderna **BM**

MM Matematica Moderna

Scienza **S**

M Matematica

Zanichelli