Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Dicembre 1957 - Serie IV, vol. XXXV, n. 5 (pagg. 279-285)

CARLO FELICE MANARA

SUL CONCETTO DI EQUIVALENZA PER I POLIGONI ED I POLIEDRI

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il quinto numero (Dicembre 1957) della trentacinquesima annata consta di 68 pagine e contiene, oltre le Recensioni e Questioni, i seguenti articoli:

L. DI PASQUALE - *I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari e i controcartelli di Nicolò Tartaglia.*

C. F. MANARA - *Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri.*

O. CHISINI - *La superficie cubica* (parte seconda).

Abbonamento 1958: Italia L. 1000— - Estero L. 2000—.

Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli

---

Le annate complete 1924, 25, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 55, 56 e 57 dell'attuale serie del

PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1600 l'annata, per l'Italia, L. 2400 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei 20 volumi al prezzo di:
L. 600 al fascicolo per l'Italia — L. 1200 per l'estero.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Dicembre 1957 - Serie IV, vol. XXXV, n. 5 (pagg. 279-285)

Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri

1. Sono note le cautele necessarie per introdurre il concetto di « area di una figura piana » con una trattazione che, pur rimanendo nell'ambito elementare, si proponga di salvare il rigore logico. Una delle vie abitualmente seguite è quella che conduce alla definizione per astrazione del concetto di « area » passando attraverso alla trattazione della relazione di « equivalenza »: supponiamo di avere enunciato i Postulati che abitualmente si enunciano nelle trattazioni elementari che seguono più o meno lo schema classico (1); supponiamo che sia nota la relazione di « uguaglianza » ovvero « congruenza » tra figure piane; allora si definiscono anzitutto come « equivalenti » due poligoni P e P' se avviene che tanto l'uno che l'altro si possano decomporre in uno stesso numero finito di parti (2) e che tra le parti di P e quelle di P' si possa stabilire una corrispondenza biunivoca in cui le parti corrispondenti sono congruenti.

Si verifica poi che la relazione di « equivalenza » così definita possiede le tre proprietà formali (riflessiva, simmetrica e transitiva) della congruenza e si giunge infine con facilità a determinare i criteri in base ai quali si può stabilire, con

(1) Supponiamo quindi di avere enunciato anche il Postulato che si suole chiamare di EUDOSSO - ARCHIMEDE e quindi non ci occuperemo delle questioni che hanno condotto D. HILBERT a distinguere la « uguaglianza per somma » (zerlegungsgleichheit) dalla « uguaglianza per differenza » (inhaltsgleichheit); il Lettore che volesse informarsi può consultare direttamente la classica opera di HILBERT: *Grundlagen der Geometrie* oppure l'Articolo di U. AMALDI: *Sulla Teoria dell'Equivalenza* Art. VII, § 5, in *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, raccolte da F. ENRIQUES.

(2) Supponiamo ovviamente noto che cosa si intenda indicare parlando di « parti » di un poligono.

un numero finito di operazioni, se due poligoni dati siano equivalenti oppure se uno di essi sia equivalente ad una parte dell'altro.

La teoria che così si viene a stabilire per i poligoni risulta del tutto elementare e soltanto quando si voglia estendere la validità della relazione di equivalenza alle figure aventi contorno curvilineo (per es. alla circonferenza) sorge la necessità di introdurre ulteriori Postulati e di far ricorso a procedimenti — pes es. al classico procedimento di « exaustione » — che si possono ritenere di tipo più elevato rispetto ai procedimenti che sono sufficienti per i poligoni.

Se si cerca di seguire una via analoga a quella che abbiamo qui brevemente ricordata quando si voglia introdurre il concetto di « volume » per le figure spaziali si incontrano — come è noto — delle difficoltà notevoli ed a prima vista inaspettate: infatti un Teorema classico di M. DHEN assicura che non è possibile definire la relazione di equivalenza in modo analogo a quello seguìto per i poligoni neppure per figure — come i poliedri — che a prima vista dovrebbero presentare il caso « elementare ». Esistono infatti delle coppie di poliedri che sono da considerarsi come aventi volumi eguali e che non ammettono decomposizioni in parti che abbiano le proprietà sopra ricordate. Pertanto anche per trattare la relazione di equivalenza nel caso dei poliedri risulta necessario ricorrere a procedimenti di tipo meno elementare, come il procedimento di exaustione già ricordato, oppure enunciare opportuni Postulati, per es. il cosiddetto « Principio del Cavalieri ».

L'idea direttiva del Teorema del DEHN è della massima semplicità: si tratta anzitutto di far vedere che se due poliedri sono decomponibili in un numero finito di parti poliedrali, in modo tale che si possa stabilire tra le parti una corrispondenza biunivoca in cui le parti corrispondenti sono congruenti (brevemente si usa dire che i due poliedri sono « equidecomponibili ») *deve* sussistere tra le ampiezze dei loro diedri ed il diedro piatto una relazione lineare a coefficienti *interi* (3); in

---

(3) Ricordiamo qui che si possono stabilire anche delle relazioni necessarie che legano le lunghezze degli spigoli di due poliedri equidecomponibili; cfr. O. NICOLETTI: *Sulla equivalenza dei poliedri* « Rend. Lincei », 22_5 (1913), 767-771 e Rend. Palermo, 37 (1914), 47-75.

un secondo tempo si constata che esistono due poliedri (per es. un cubo ed un tetraedro regolare) che hanno lo stesso volume e per i quali la suddetta relazione lineare non sussiste.

Se la linea logica che conduce a stabilire il Teorema del DEHN appare molto semplice e chiara, non altrettanto si può dire della dimostrazione che pur essendo notevole per la eleganza con cui supera delle difficoltà delicate, appare di una certa lunghezza e complicazione [4].

Da una parte queste complicazioni e dall'altra la importanza che ha la teoria della equivalenza anche per la Scuola dell'ordine secondario, fanno ritenere non inutile l'analisi di esempi in cui per le figure piane poligonali viene ottenuto (per così dire) artificialmente il fenomeno che si presenta per i poliedri: il fenomeno cioè della esistenza di figure che, pur avendo uguale « estensione », non sono da ritenersi « equivalenti », qualora della relazione di « equivalenza » sia data una definizione (artificialmente) più restrittiva di quella usuale.

L'idea, dovuta a G. VACCA [5], è qui sviluppata con procedimenti diversi da quelli seguiti da questo A., con metodi elaborati dalla Dott. S. DENTELLA nella Sua Tesi di Laurea vertente su questi argomenti [6] ed ispirata a ricerche di H. HADWIGER [7].

2. Un fenomeno del tipo cui accennavamo verso la fine del precedente paragrafo si può ottenere per le figure piane quando si restringa la definizione di « equivalenza »; a tal fine si può giungere operando nel modo seguente: supponiamo che sia noto il concetto di « movimento rigido nel piano » con

[4] Si veda per es. l'Art. citato in [1] di U. AMALDI oppure in questo Periodico l'art. di O. CHISINI: *La non equidecomponibilità di poliedri equivalenti*, 12_4 (1932), 279.

[5] Cfr. G. VACCA, *Su alcuni teoremi di Geometria piana analoghi a quelli di* M. DEHN *nella Geometria solida*, « Rend. Lincei », 2_5 (1913), 417-423.

[6] La Tesi è stata discussa presso le Università di Milano nella sessione estiva del 1952; sostanzialmente è dovuto alla citata Dottoressa il concetto di « stella vettoriale associata ad un poligono » di cui faremo uso in seguito.

[7] Si vedano per es. i lavori di questo A. pubblicati in *Collectanea Mathematica* (1950) e di H. HADWIGER e P. GLUR in *Elemente der Mathematik* (1951).

tutte le sue proprietà, in particolare quella che i movimenti rigidi costituiscono un gruppo di trasformazioni. Osserviamo ora che nel gruppo dei movimenti rigidi esiste un sottogruppo invariante: quello delle « traslazioni ». Definiamo allora « congruenti per traslazione » o anche brevemente « T-congruenti » due figure piane tali che l'una di esse si ottiene dall'altra mediante una operazione del sottogruppo.

Consideriamo ora due poligoni P e P': diciamo che P è « equivalente per traslazione a P' » o anche brevemente che « P è T-equivalente a P' » se P e P' sono decomponibili in un numero finito di parti in modo tale che si possa stabilire tra le parti una corrispondenza biunivoca in cui parti corrispondenti sono T-congruenti. In forza della proprietà che hanno le traslazioni di formare un gruppo, si ha facilmente che la relazione di T-equivalenza è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Si costruiscono poi facilmente delle coppie di poligoni che sono T-equivalenti senza essere T-congruenti: un esempio di coppie di poligoni cosiffatti è dato dalla coppia di quadrati, l'uno dei quali si ottiene dall'altro mediante una rotazione di un angolo diverso dall'angolo retto; come è illustrato dalla annessa fig. 1 ognuno dei quadrati si può decomporre in cinque parti che sono T-congruenti alle parti corrispondenti dell'altro quadrato (in fig. le parti T-congruenti sono state contrassegnate con la stesse lettera: a, b, c, d, e).

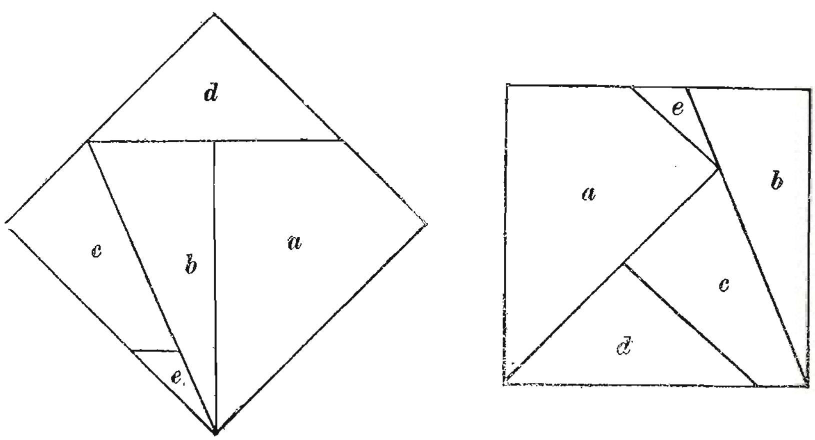

Fig. 1

3. È chiaro che se tra due poligoni sussiste la relazione di T-equivalenza ora definita sussiste pure la relazione di equivalenza nel senso abituale; che non sia vero anche il viceversa risulterà chiaro non appena avremo stabilito una relazione *necessaria* che deve sussistere tra due poligoni T-equivalenti ed avremo constatato che esistono coppie di poligoni che sono equivalenti nel senso abituale nel termine ma non soddisfano alla suddetta condizione.

Per evitare analisi troppo minute avvertiamo qui che nel seguito parlando semplicemente di « poligono » sottintenderemo la clausola « non intrecciato ». Consideriamo dunque un poligono P e fissiamo su ogni lato un'orientazione positiva, per es. con la convenzione abituale in modo tale che immaginando di percorrere un lato qualunque in senso positivo l'interno del poligono sia alla sinistra di chi percorre (Cfr. fig. 2).

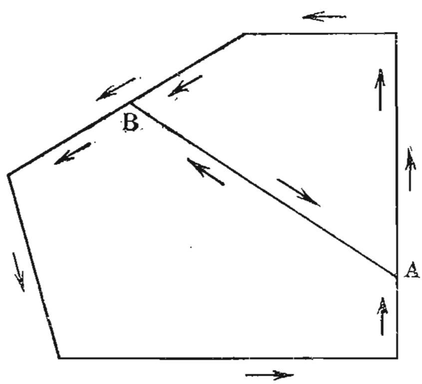

Fig. 2

Fissiamo poi in modo del tutto arbitrario un punto O e riportiamo, a partire da O come origine, dei segmenti orientati (vettori) uguali paralleli ed equiversi ai lati del poligono, convenendo di eseguire la somma algebrica dei vettori che appartengono alla stessa retta (e *soltanto* in questo caso).

Si ottiene così un insieme di vettori che potremo chiamare la « stella vettoriale relativa a P »; potremo anche chiamare il punto O « origine della stella » (Cfr. la fig. 3 che fornisce la stella relativa al poligono rappresentato dalla fig. 2).

Non è escluso che la stella vettoriale relativa ad un poligono si riduca alla sua origine (cioè sia — come converremo di dire — « nulla »).

Si immagini ora che il poligono P sia stato suddiviso in due parti poligonali P_1 e P_2 mediante una trasversale (per es. con riferimento alla fig. 2, sia AB la trasversale).

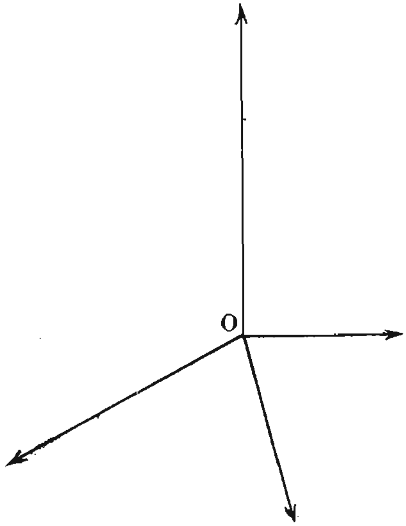

Fig. 3

Consideriamo le due stelle vettoriali relative alle due parti poligonali in cui è stato suddiviso il poligono P; supponiamo che esse abbiano la stessa origine e supponiamo di eseguire le somme dei vettori appartenenti ad una stessa retta in base alle convenzioni spiegate poco sopra. In forza delle convenzioni che abbiamo stabilito per orientare i lati dei poligoni, si verifica immediatamente che la stella vettoriale relativa al poligono P risulta la somma (nel senso precisato) delle stelle relative ai poligoni P_1 e P_2 in cui P è stato suddiviso dalla trasversale.

Ora risulta del tutto evidente che una stessa stella può essere considerata come relativa a P ed a ogni poligono T-congruente a P stesso; inoltre, per la osservazione fatta ora, anche tutti i poligoni T-equivalenti a P hanno la stessa stella vettoriale di P. Si ha pertanto il facile

Teorema. - Perchè due poligoni P e P' siano T-equivalenti devono avere la stessa stella vettoriale, relativa ad una stessa origine O.

Si constata ora con tutta facilità che esistono coppie di poligoni che non sono T-equivalenti pur essendo equivalenti nel senso abituale. A tal fine consideriamo un qualsiasi poligono P che abbia una stella vettoriale non nulla, per es. un triangolo, e consideriamo il poligono P' che si ottiene da P mediante una rotazione (di un angolo diverso all'angolo giro). Ovviamente la stella vettoriale relativa a P' si ottiene da quella relativa a P mediante rotazione di un angolo uguale a quello che ci è servito per ottenere P' da P. Se le stelle non sono nulle le condizioni del Teorema non sono soddisfatte e quindi i due poligoni non possono essere T-equivalenti.

Si vede pure immediatamente che la condizione richiesta dal Teorema non è sufficiente perchè due poligoni siano T-equivalenti: per es. due quadrati qualunque hanno stella vettoriale nulla e non sono neppure equivalenti (nel senso abituale) se non hanno lati congruenti.

4. La osservazione con cui si chiude il precedente paragrafo suggerisce l'idea di ricercare una condizione semplice ed espressiva che sia sufficiente per la T-equivalenza di due poligoni. Rimane anche aperta la questione di determinare quale sia il *minimo* numero di parti T-congruenti nelle quali si devono suddividere due poligoni T-equivalenti.

Segnalo qui tali questioni a titolo di esempio come abbastanza interessanti per chi voglia trattare nel campo elementare una teoria che, come abbiamo visto, può avere un certo interesse per l'insegnamento medio.

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

ABEILLE - *Nuove tavole logaritmiche finanziarie a otto decimali*	1200
Atti del Congresso internazionale dei Matematici (1928) 6 volumi. Ciascuno	1000
Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937	3000
BELLUZZI - *Scienza delle costruzioni.* Vol. I	5000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. II	5000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. III, p. I	1800
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. III, p. II	2000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. IV, p. I	4000
— — *Metodi semplici per lo studio delle lastre curve*	400
BOLCATO - *Chimica delle fermentazioni.* II edizione	5000
BRONZI - *La tecnica dei radiotrasmettitori*	4000
CANNERI - *Nozioni di chimica analitica*	4000
CASTELNUOVO - *Memorie scelte,* pubblicate in occasione del giubileo scientifico	1250
CHISINI - *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*	3000
— — *Esercizi di geometria analitica e proiettiva*	2000
COULSON - *La valenza*	3000
DORE - *Fondamenti di fotogrammetria*	2000
ENRIQUES - *Il significato della storia del pensiero scientifico*	150
— — *Le superficie algebriche,* con prefazione di G. Castelnuovo	3000
— — *Memorie scelte di geometria.* Volume I, 1893-1898	8000
ENRIQUES e DE SANTILLANA - *Compendio di storia del pensiero scientifico*	1100
ENRIQUES e MAZZIOTTI - *Le dottrine di Democrito d'Abdera*	1500
EVANGELISTI - *La regolazione delle turbine idrauliche*	2000
FERRI - *Guida dei principali prodotti chimici.* Vol. I	6000
FILIPPI - *Resistenza dei materiali.*	2000
FINZI - *Meccanica razionale* Voll. I-II	6000
FINZI e PASTORI - *Calcolo tensoriale e applicazioni*	2000
FOÀ - *Fondamenti di termodinamica*	3000
FUBINI e ALBENGA - *La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni.* Vol. I	4000
Vol. II	6000
LEVI-CIVITA - *Opere matematiche - Memorie e note.*	
— — Volume I: 1893-1900	8000
— — Volume II: 1901-1907	9000
— — Volume III: 1908-1916	9000

ZANICHELLI - BOLOGNA