L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 24A-B N.6 - NOVEMBRE - DICEMBRE 2001

Spedizione in A.P. - art. 2, comma 20/c - Legge 662/96 - Vicenza Ferrovia - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie.

CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN

ATTI DEL XXX SEMINARIO NAZIONALE

AGOSTO 2001

NUMERO DOPPIO

Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN - Istituti Filippin - PADERNO DEL GRAPPA

Lettera al Direttore

GIGO 2

Qualche tempo fa mi è accaduto di occuparmi dei disegni che spesso accompagnano gli articoli di matematica elementare, ed ho scritto a questo proposito un articolo, al quale ho dato un titolo un po' scherzoso: «L'effetto GIGO in geometria». E qui l'acrostico "GIGO" è stato preso dal linguaggio degli addetti all'informatica: esso è formato con le iniziali della frase inglese "Garbage In, Garbage Out", e vuole richiamare il fatto, del tutto ovvio, che le macchine non creano verità: se ci si introduce spazzatura (garbage) esse sfornano spazzatura.

Nel caso della geometria il mio richiamo scherzoso era originato dal fatto di aver letto talvolta alcune avvertenze relative a certi disegni che accompagnavano articoli di riviste; secondo le avvertenze citate i disegni erano fatti al computer; ma purtroppo non erano giusti, perché non obbedivano alle regole della geometria descrittiva.

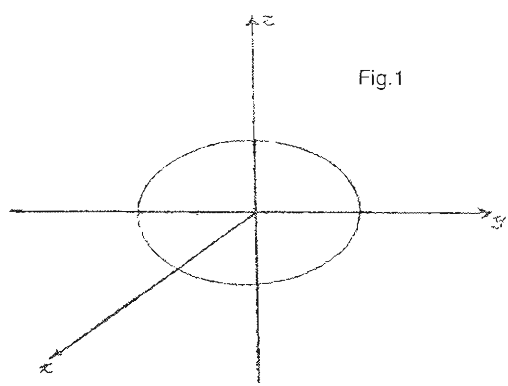


Fig.1

Ritorno qui sul questo problema per sviluppare alcune argomentazioni che io avevo affidato alle presunte conoscenze di geometria proiettiva da parte dei cortesi lettori; purtroppo tale materia non fa più parte dei corsi universitari abituali; ma le argomentazioni proiettive possono essere facilmente sostituite con calcoli elementari di geometria analitica, come cercherò di far vedere qui di seguito.

Sono stato stimolato ad occuparmi di questo argomento dal fatto di aver incontrato varie volte dei disegni come quello rappresentato qui dalla Fig.1.

A questo proposito direi che **se** gli Autori intendono così rappresentare la proiezione su un piano di una circonferenza giacente nel piano degli assi cartesiani x,y di un riferimento ortogonale, la loro intenzione non raggiunge lo scopo; e ciò vale quali che siano gli strumenti utilizzati per tracciare i disegni: dalla mano libera al computer più perfezionato.

2.- Sia dato nello spazio un sistema ortogonale monometrico di assi cartesiani x,y,z. Supponiamo che il piano sul quale intendiamo rappresentare gli oggetti dello spazio sia quello del disegno (o della pagina che sta sotto gli occhi del Lettore), piano che d'ora innanzi verrà indicato convenzionalmente col termine "quadro"; e supponiamo che questo coincida con il piano degli assi delle y e delle z di riferimento; poniamo inoltre che l'asse delle x "esca" dal quadro, avendo la sua parte positiva nel semispazio in cui sta anche l'osservatore del disegno (o il Lettore); scegliamo nello spazio un punto improprio Ω, che assumeremo come centro di proiezione, e poniamo che questo sia caratterizzato da tre numeri: 1, q, r proporzionali ai coseni direttori delle rette che vi passano. Per i numeri q, r faremo l'ipotesi che si abbia:

(1) $$q > 0 \; ; \; r > 0.$$

Ciò comporta, tra l'altro, che il centro di proiezione non appartenga alla retta *impropria* di nessun piano del sistema di riferimento.

Sia ora dato sul piano

(2) $$z = 0$$

un punto U di coordinate

(3) $$x = a \; ; \; y = b.$$

La retta che congiunge U col centro di proiezione può essere rappresentata dalle equazioni

(3) $$x = a + z/r \quad , \quad y = b + qz/r,$$

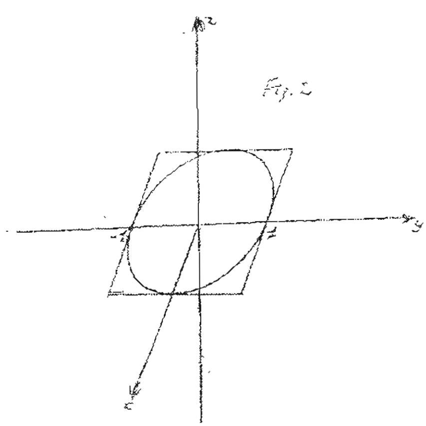
Supponiamo ora che il punto U appartenga alla circonferenza di raggio 1 che giace sul piano (2) ed ha centro nell'origine degli assi; si avrà quindi:

(4) $$a^2 + b^2 = 1$$

Sostituendo nella (4) le espressioni di a e b tratte dalle (3) si ottiene, con pochi passaggi di calcolo, la equazione:

(5) $$(rx - z)^2 + (ry - qz)^2 = r^2$$

la quale rappresenta il cilindro, costituito da tutte le rette che passano per un punto della circonferenza (4) e per il centro di proiezione Ω; in altre parole la (5) rappresenta il cilindro proiettante la (4) da Ω.



Quindi secando tale cilindro con il quadro si otterrà la proiezione da Ω

della circonferenza (4) sul quadro stesso.

Per la scelta del riferimento che abbiamo fatto, il quadro ha ovviamente equazione x = 0. Quindi la proiezione della circonferenza (4) da Ω sul quadro è rappresentata, nelle coordinate cartesiane ortognali y e z, dalla equazione

$$(5)\quad z^2 + (ry - qz)^2 = r^2.$$

Ora si osserva che la (5) rappresenta bensì un'ellisse nel piano degli assi y e z, ma che essa non è riferita agli assi e quindi non può essere rappresentata correttamente dal disegno di Fig.1. Essa, nei punti:

$$(6)\qquad y = \pm 1 \;\; ; \;\; z = 0$$

è tangente alle rette:

$$ry \,.\, qz = \pm\, r\,;$$

e queste sono parallele alla retta che sul quadro rappresenta la proiezione da Ω dell'asse delle x.

Pertanto un disegno che voglia rispettare la geometria dovrebbe essere del tipo di quello che appare nella Fig.2.

C.F. Manara *21 giugno 2001*