L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 9 N.10
OTTOBRE 1986

Rivista mensile. Spedizione in abb. post. Gr. III/70%
Tassa riscossa - Taxe perçue

Organo del
CENTRO RICERCHE DIDATTICHE
UGO MORIN

Istituti Filippin
PADERNO DEL GRAPPA

L'insegnamento della Matematica è un servizio che il Centro Ricerche Didattiche «U. MORIN» vuol rendere agli insegnanti italiani della scuola preuniversitaria per il miglioramento dell'insegnamento della matematica e, in senso interdisciplinare, delle altre scienze.

Questo periodico è iscritto all'Unione Stampa Periodica Italiana

La rivista è distribuita gratuitamente ai Soci.

Questa rivista viene pubblicata anche con contributi del CNR e dell'Istituto Filippin.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 9 N.10
OTTOBRE 1986

Direttore responsabile:
Candido Sitia

Editore:
Centro Ricerche Didattiche
UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4
31010 PADERNO DEL GRAPPA

Proprietà ed Amministrazione:
Centro Ricerche Didattiche «Ugo Morin»
Via S. Giacomo, 4
31010 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso)

Reg. Trib. Bassano del Grappa
N. 4/78 R.P. 21-7-78
Sped. in abbonamento postale Gr. III/70%

Tipolitografia Battagin & C. s.n.c. - S. Zenone d'Ezzelini (TV)

 Vol. 9 - N.10
Ottobre 1986

INDICE

Sez. B

L A   L O G I C A
N E L L A   S C U O L A
D E L L ' O B B L I G O

****

Carlo Felice Manara
Dipartimento di Matematica
MILANO

L'INSEGNAMENTO DELLA LOGICA NELLA SCUOLA DELL'OBBLIGO

Spunti didattici

Prof. Carlo Felice Manara

SUNTO - Si richiamano alcune nozioni elementari di logica simbolica, relative alle proposizioni non analizzate. Si presentano poi alcuni spunti didattici, per mettere in evidenza il parallelismo tra il calcolo delle proposizioni ed i calcoli dell'aritmetica "modulo 2". Si dànno inoltre alcuni cenni di possibili estensioni di queste idee, suggerendo alcune procedure che possono permettere di trattare i problemi logici come problemi matematici.

****

§1. - E' noto che i nuovi programmi per le scuole dell'ordine elementare e medio menzionano tra gli argomenti di Matematica anche la Logica.

Ripetiamo qui ciò che abbiamo già detto in altre occasioni: abbiamo la massima stima per i Colleghi che hanno consigliato la introduzione di questi argomenti, ma non condividiamo il loro parere; e ciò non perchè crediamo che la logica non sia utile, anzi.

Noi crediamo infatti che uno degli scopi della scuola sia quello di allenare alla formulazione precisa dei concetti ed alla deduzione rigorosa; ma pensiamo anche che, nell'età adolescenziale e nell'età precedente, questo scopo possa essere raggiunto di fatto senza dover passare attraverso l'insegnamento del formalismo della logica matematica. Anzi noi temiamo che l'insegnamento di questo formalismo possa in qualche modo frenare il cammino spontaneo dell'intelletto facendo credere che siano indispensabili certe procedure e certi simboli che sono soltanto utili, forse anche utilissimi, ma spesso rischiano di impacciare il ragionamento invece di facilitarlo, costringendo la mente a degli sforzi di codificazione, simbolizzazione, ed interpretazione che non sono sempre necessari.

Non è nostra intenzione riaprire qui la discussione su decisioni già prese; tale discussione sarebbe oziosa ed inutile, anche perchè si è voluto far apparire che le decisioni siano state prese dopo la consultazione di numerosi esperti. Noi rimaniamo tuttavia del parere che non sia il numero degli esperti a determinare la verità, e quindi a convalidare la bontà di una decisione. Resta comunque il fatto che di fronte a questi nuovi capitoli può nascere qualche inquietudine negli insegnanti, che non riescono a disporre facilmente di una trattatistica elementare e di materiale didattico. Pensiamo quindi di fare cosa utile presentando alcuni spunti didattici su questi argomenti, senza illusioni di completezza, e soprattutto senza la pretesa di approfondire dei problemi che meriterebbero ben altra attenzione e fatica di studio.

Noi pensiamo inoltre che la necessità, in cui sono posti gli insegnanti, di trattare questi argomenti, possa offrire agli insegnanti stessi l'occasione per presentare un'idea della Matematica molto più ampia di quella che si usa dare con l'insegnamento classico di questa materia. A nostro parere infatti è forse bene che il giovane di oggi si convinca del fatto che la Matematica non è soltanto la "scienza dei numeri" oppure la "scienza della quantità", come certi sprovveduti pensano di poterla definire. Da parte nostra, non pretendiamo di poter dare qui in poche parole una definizione soddisfacente della Matematica;ci limitiamo a dire che gradiremmo vedere presentato, accanto agli aspetti tradizionali della Matematica, anche un altro aspetto: l'aspetto di scienza che studia le procedure rigorose di deduzione per mezzo di simboli convenzionali. In questo ordine di idee, e secondo questo aspetto, rientra nel dominio della Matematica anche la Logica formale, nella misura in cui essa riesce a rappresentare con simboli i concetti e le loro relazioni, e riesce ad eseguire delle deduzioni rigorose in forza delle leggi sintattiche dei simboli adottati. Pertanto, in questo ordine di idee, ogni calcolo può essere considerato come una deduzione: e la risoluzione di un problema assume l'aspetto della trasformazione delle informazioni, che sono già implicite nei dati, in modo che esse diventino facilmente interpretabili.

§2. - Come è noto, il primo capitolo della Logica simbolica tradizionale si presenta come la teoria della proposizioni non analizzate; e la teoria della trasformazione di queste proposizioni, semplici e composte, si presenta appunto come una specie di calcolo: precisamente quello che D.Hilbert già chiamava "Aussagenkalkül", calcolo delle proposizioni non analizzate.

Per gli sviluppi che seguono, riteniamo utile richiamare brevemente qualche concetto di questa teoria, e ricordare anche alcune convenzioni di linguaggio e di simbologia.

Nel seguito converremo di indicare con singole lettere maiuscole dell'alfabeto latino

(1) $A, B, C, \ldots$

delle proposizioni non analizzate; con questa espressione intendiamo dire che, data una proposizione, rinunciamo a distinguere in essa un soggetto, una copula verbale ed un predicato, come si fa in logica classica, che si avvale del linguaggio comune; ci limiteremo invece a prendere in considerazione quello che chiamaremo il "valore di verità" della proposizione, cioè il fatto che essa sia vera oppure falsa.

Vengono utilizzate varie notazioni per indicare i valori di verità di una proposizione; così si trova presso alcuni autori la coppia di simboli "V" e "F" per indicare il valore di verità rispettivamente vero oppure falso; talvolta si trovano anche le lettere "T" e "F", dalle iniziali delle parole inglesi che indicano il vero oppure il falso.

Noi utilizzeremo convenzionalmente dei simboli numerici per indicare i valori di verità di una proposizione.

Tali simboli saranno i numeri 1 e 0, adottati convenzionalmente per indicare i valori di verità rispettivamente vero e falso. Converremo anche di associare ad ogni lettera maiuscola che indica una proposizione la stessa lettera, in carattere minuscolo, per indicare il valore di verità.

Così per es. se A, B, C sono delle lettere con le quali indicheremo certe proposizioni, con a, b, c rispettivamente indicheremo dei numeri che possono prendere soltanto i valori uno e zero e che indicano i valori di verità delle proposizioni corrispondenti.

Quindi scrivendo per esempio

$$a = 1 \tag{2}$$

indicheremo che il valore di verità della proposizione A è 1, e quindi affermeremo che la proposizione stessa è vera.

Si può osservare che anche la (2) può essere interpretata come una proposizione, cioè precisamente la proposizione che afferma che la A è vera; pertanto, a rigore, anche la (2) potrebbe avere un valore di verità; tuttavia noi converremo che le proposizioni come la (2), che assegnano valori di verità ad altre proposizioni, siano sempre considerate come vere; questa convenzione mira ad evitare che si possano costruire delle situazioni antinomiche e paradossali, come quella che si avrebbe con le considerazioni seguenti.

Indichiamo con B la proposizione (2) e chiamiamo b il suo valore di verità. Se ora immaginiamo che la proposizione A sia la

$$b = 0 \tag{3}$$

abbiamo costruito un esempio del classico paradosso del **mentitore**, che è noto fino dall'epoca della sofistica greca; sappiamo che la enunciazione classica di tale paradosso è data da una frase come la seguente:

" Un cretese dice che tutti i cretesi mentiscono sempre "

La situazione che abbiamo costruita sopra è analoga e per evitare appunto situazioni come questa abbiamo enunciato la convenzione di cui sopra, riguardante la verità delle proposizioni come la (2) che assegnano valori di verità alle proposizioni considerate.

Le proposizioni singole, elementari e non analizzate sono anche, per comodità, chiamate **atomiche**, per distinguerle dalle proposizioni composte, che verranno costruite mediante questi simboli e certi altri, che vengono chiamati **connettivi**. Ovviamente i singoli simboli delle proposizioni atomiche hanno ciascuno un significato per se stesso: essi sono pertanto chiamati simboli **categorematici**; invece i simboli che indicano i connettivi sono dotati di significato soltanto se accompagnati ai primi, con determinate regole sintattiche; pertanto essi sono chiamati anche simboli **sincategorematici**.

§3. – Esistono vari tipi di notazioni e di convenzioni per indicare i connettivi; ricordiamo qui brevemente le notazioni della scuola anglosassone, che hanno avuto la loro origine nelle notazioni del matematico italiano G.Peano e nei lavori di Whitehead e Russel; le notazioni della scuola polacca e le notazioni della scuola tedesca, che ha avuto la sua origine nei lavori del matematico D.Hilbert e della sua scuola. Noi utilizzeremo queste notazioni, ricordando che esistono anche altre convenzioni, che vengono utilizzate per esempio dagli studiosi e costruttori di circuiti elettrici, e delle macchine elettroniche per la elaborazione della informazione e per il calcolo.

Il primo simbolo sincategorematico che prenderemo in considerazione è il simbolo di negazione. Esso sarà rappresentato ponendo il simbolo "$\neg$" davanti al simbolo della proposizione che si intende negare.

Pertanto, data per es. la proposizione indicata con A, la sua negazione sarà indicata con il simbolo

$$\neg A$$

da leggersi "non A", questa proposizione sarà falsa se la A è vera, vera se la A è falsa.

Il simbolo di negazione è l'unico simbolo sincategorema■

tico che opera su una unica proposizione. Presenteremo qui altri connettivi che serviranno per costruire delle proposizioni composte con due altre.

Abbiamo detto poco fa che ci interessa soltanto il valore di verità di una proposizione; quindi, se una data proposizione è composta con due altre (e ovviamente con un connettivo) i casi che si possono presentare sono quattro soltanto.

Stabiliremo un ordine convenzionale, che manterremo sempre nel seguito, per enumerare tutti i casi possibili di valori di verità che possono essere assunti da due proposizioni A e B con le quali viene composta una terza proposizione. Tale ordine convenzionale è dato dalla seguente tabella:

(1)

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0

Di conseguenza ogni connettivo sarà determinato dai valori di verità che la proposizione corrispondente assume quando i valori di verità delle due proposizioni componenti sono dati nell'ordine che è stabilito dalla tabella (1), che non ripeteremo più in seguito, limitandoci a dare i quattro valori di verità che corrispondono ai casi enumerati nell'ordine scelto.

Si suol dire che i quattro valori di verità che corrispondono ad un determinato connettivo formano la "matrice di verità" del connettivo stesso.

Enumereremo qui di seguito i connettivi che sono di uso più frequente nella logica delle proposizioni.

1) Connettivo "et" (che viene anche indicato col termine inglese "and"); la proposizione che si ottiene da due date mediante l'utilizzazione di questo connettivo viene abitualmente indicata ponendo il simbolo "/\" tra i simboli delle due; date per es. le proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

(2) A /\ B

da leggersi "A et B" oppure "A and B".

La matrice di verità della proposizione (2) è data dalla seguente tabella, nella quale · ripetiamo - i casi sono elencati nell'ordine dato dalla tabella (1):

(3) 1 , 0 , 0 , 0 ;

pertanto la proposizione (2) è vera nel solo caso in cui sono vere entrambe, la A e la B.

La operazione che, a partire dalle due proposizioni A e B conduce alla proposizione composta (2) viene chiamata "congiunzione" oppure anche "prodotto logico" delle due proposizioni.

2) Connettivo "vel" (che viene indicato anche con il termine inglese "or"); la proposizione che nasce dalle due date in forza di questo connettivo viene indicata ponendo il segno "\/" tra i simboli delle4 due proposizioni; date le due proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

(4) $$A \vee B$$

da leggersi "A vel B" oppure "A or B". I valori di verità della proposizione (4) sono dati dalla seguente tabella

(5) $$1 \; , \; 1 \; , \; 1 \; , \; 0 \; ;$$

pertanto la proposizione (4) è vera quando anche una sola delle due proposizioni A e B è vera; in altre parole, la proposizione (4) è falsa nel solo caso in cui siano false entrambe, la A e la B, e vera in tutti gli altri casi.

La operazione che, a partire dalle due proposizioni semplici A e B, conduce alla proposizione composta (4) viene anche chiamata "alternativa" o anche "somma logica" delle due proposizioni.

3) Connettivo "freccia".

La proposizione che nasce da due mediante questo connettivo viene indicata ponendo una freccia "$\rightarrow$" tra i simboli delle due; pertanto, date le due A e B la proposizione composta si scriverà

(6) $$A \rightarrow B \; .$$

La lettura del simbolo (6) viene fatta in vari modi; si usa leggere per es. "Se A allora B" ed il simbolo "freccia" viene chiamato "simbolo di implicazione materiale".

I valori di verità della proposizione (6) sono dati dalla tabella sguente

(7) $$1 \; , \; 0 \; , \; 1 \; , \; 1 \; .$$

Questi valori di verità sono gli stessi della proposizione

(8) $\neg A \vee B$;

pertanto alcuni autori considerano la proposizione (6) come una forma diversa della proposizione (8).

Spesso anche la proposizione A viene chiamata **antecedente** della implicazione materiale, e la proposizione B viene detta **conseguente** della stessa.

4) Connettivo "doppia freccia". La proposizione che si ottiene mediante la utilizzazione di questo connettivo viene indicata ponendo il segno "$\leftrightarrow$" tra i simboli delle due proposizioni date; date per es. A e B si scriverà

(9) $A \leftrightarrow B$

simbolo che potremo leggere convenzionalmente "A doppia freccia B" oppure anche "A è equivalente a B".

I valori di verità della proposizione (9) sono dati dalla tabella seguente

(10) 1 , 0 , 0 , 1 ;

pertanto la proposizione (9) risulta vera se entrambe la A e la B sono vere oppure se sono entrambe false.

Ciò spiega anche la convenzione di lettura secondo la quale il connettivo doppia freccia viene anche chiamato connettivo di equivalenza.

Notiamo tuttavia che questa lettura può indurre in equivoci e confusioni, perchè non ha lo stesso significato della relazione di equivalenza tra proposizioni che, nei trattati di Matematica, viene indicata con il simbolo convenzionale "$\Longleftrightarrow$".

Invero in quel caso si tratta di proposizioni analizzate ognuna delle quali, assunta come ipotesi, può condurre alla dimostrazione dell'altra come tesi, quando ovviamente si intendano conosciute le regole della logica deduttiva e quando anche, in un certo ambito di teoria, si ammettano come note altre proposizioni non ricordate esplicitamente nella enunciazione della equivalenza.

§4. - Le definizioni che abbiamo ricordato poco fa permettono di determinare il valore di verità di ogni proposizione che sia composta di due con i connettivi presentati, ed anche delle proposizioni più complicate, composte con più di due proposizioni collegate tra loro con i connettivi considerati.

Si può osservare tuttavia che la determinazione dei valori di verità delle proposizioni composte a partire dai valori di verità delle proposizioni componenti e delle matrici di verità di queste può essere spesso una impresa abbastanza penosa e difficile. Appare quindi opportuno il dare delle procedure che possano facilitare questa operazione; presentiamo qui alcune di queste procedure, che a noi appaiono interessanti anche perchè mostrano in modo abbastanza evidente il parallelismo che intercede tra la procedura di deduzione ed il calcolo delle espressioni algebriche, come lo consideriamo abitualmente.

A questo proposito ricordiamo che abbiamo già detto alla fine del §1, osservando che ogni calcolo può essere considerato come una deduzione, nel senso che è una trasformazione di un insieme di espressioni dotate di senso convenzionale, in altre, pure dotate di senso, secondo regole prestabilite, che costituiscono la sintassi di quelle espressioni.

Per dare qualche idea di questo parallelismo tra le operazioni di un calcolo e la operazione logica di deduzione richiamiamo brevemente alcuni fatti della aritmetica elementare, che possono offrire qualche utile spunto didattico all'insegnante che voglia sfruttarli.

A tal fine richiamiamo qui brevemente le regole sintattiche della aritmetica "modulo 2"; si potrebbe presentare tali regole come quelle che reggono le operazioni che si eseguono sulle classi di equivalenza degli interi naturali, quando si considerano come equivalenti due interi che hanno lo stesso resto quando sono divisi per 2; oppre si potrebbe pensare a tali regole come quelle che reggono le operazioni quando si suddividono gli interi in due sole classi: quella dei numeri pari e quella dei dispari.

Per comodità, noi ci rifaremo qui a quest'ultima interpretazione, indicando convenzionalmente con il simbolo "0" la classe dei numeri pari, e con "1" la classe dei numeri dispari. In tale aritmetica valgono le seguenti leggi:

per la somma:

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$
$$0 + 0 = 1 + 1 = 0 \,.$$

Per il prodotto:

$$1 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1 \,.$$

Conseguono da queste leggi due proprietà che valgono per ogni espressione:

$$a + a = 2a = 0 \quad ; \qquad a^2 = a$$

Utilizzeremo per questa aritmetica le abituali leggi che valgono per le espressioni numeriche ed algebriche. In particolare terremo presenti le leggi secondo le quali le operazioni di prodotto vengono eseguite prima delle operazioni di somma; e converremo di scrivere direttamente uno accanto all'altro i simboli di due numeri che si vogliono moltiplicare tra loro, omettendo il segno di operazione di prodotto.

Queste regole elementari, che riguardano i simboli numerici e le operazioni su di essi, ammettono una una interessante applicazione al calcolo dei valori di verità delle proposizioni composte. A tal fine daremo qui di seguito le matrici di verità delle proposizioni composte con i connettivi che abbiamo presentato nel § precedente, ed accanto a ciascuna di esse daremo anche la formula che permette di calcolare il valore di verità di una proposizione composta a partire dai valori delle proposizioni semplici. Si intende che le operazioni aritmetiche sono eseguite nell'aritmetica modulo 2 che abbiamo introdotto e che in particolare ad ogni valore numerico che si ottiene può essere sostituito il resto della sua divisione per 2.

Anzitutto si verifica che, indicato con a il valore di verità della proposizione A, il valore della negazione ¬ A è a+1. I valori delle proposizioni composte con i connettivi che abbiamo presentati sono dati dalla Tabella seguente.

TAB. I

Connettivo	Matrice di verità	Formula che fornisce il valore di verità nel'aritmetica mod 2
$A \wedge B$	1,0,0,0	$a\,b$
$A \vee B$	1,1,1,0	$a\,b + a + b$
$A \longrightarrow B$	1,0,1,1	$a\,b + a + 1$
$A \longleftrightarrow B$	1,0,0,1	$a + b + 1$

Con l'utilizzazione di queste formule è possibile ricondurre la verifica di certe proprietà logiche al calcolo aritmetico, e la soluzione di certi problemi logici alla soluzione di problemi che si possono tradurre in formule e risolvere come dei problemi algebrici, nel senso abituale del termine.

§5. - Abbiamo cercato di mettere in evidenza il parallelismo che vale tra le procedure di deduzione e il calcolo, attraverso le formule che permettono di calcolare i valori di verità di una proposizione composta, a partire dai valori di verità delle proposizioni componenti, utilizzando le leggi di calcolo della aritmetica module 2.

Si presenta del tutto spontanea l'idea di utilizzare questo parallelismo per risolvere anche dei problemi di logica, i quali - con queste convenzioni - vengono trasformati in problemi di Algebra.

Prima di presentare queste idee tuttavia vogliamo ribadire qui una osservazione che abbiamo già fatto, distinguendo tra la pura presentazione di una proposizione e la sua affermazione; questa distinzione è fondamentale per la operazione che faremo subito, di trasformazione di un sistema di equazioni logiche in un sistema di equazioni algebriche.

Svilupperemo il nostro pensiero in relazione ad un esempio, che prendiamo dal libro di TOMAS VARGA, intitolato "Fondamenti di logica per insegnanti" ed edito a Torino (1973 - Ed. Boringhieri), pag.127. Tale problema viene enunciato nel modo seguente:

> Ci fu un furto in un grande magazzino.
> L'inchiesta diede i seguenti risultati:
> i) Se il colpevole è un uomo, è di piccola statura
> ii) Se è di piccola statura, entrò attraverso la finestra
> iii) Il colpevole è un uomo, o quanto meno indossò abiti maschili
> iiij) Se indossò abiti maschili, ammesso che il racconto del testimone oculare sia degno di fede, egli entrò per la finestra.
> La visita al luogo del misfatto mostrò peraltro che il colpevole non era entrato dalla finestra.
> Si tratta di scoprire il colpevole.

Indicheremo con le seguenti lettere maiuscole le proposizioni:

U: il colpevole è un uomo;
P: il colpevole è di piccola statura;
M: il colpevole indossò abiti maschili;
F: il colpevole entrò per la finestra;
T: il testimone ha fatto un racconto degno di fede.

Come abbiamo già detto, indicheremo con le lettere minuscole corrispondenti i valori di verità delle proposizioni sopra rappresentate.

Le proposizioni enunciate nel problema possono essere tradotte con l'impiego dei connettivi nel modo seguente:

i) $U \longrightarrow P$

ii) $P \longrightarrow F$

iii) $U \vee M$

iiij) $M \longrightarrow (T \longrightarrow F)$.

Secondo la Tabella presentata nel §4 tradurremo ora le proposizioni con i simboli dell'aritmetica modulo 2, assegnando anche alle proposizioni i valori numerici che loro competono in base al fatto che tali proposizioni sono affermate.

Quindi per es. la proposizione i) ha i valori di verità dati, in funzione di u e p dalla formula

$$u p + u + 1 ;$$

questo valore deve essere uguale ad 1, perchè la proposizione viene affermata. Si ha quindi la equazione numerica:

(1) $$u p + u = u (p + 1) = 0$$

Analogamente, sempre tenendo conto della Tabella del §4 ed attribuendo il valore di verità alle proposizioni affermate, si trovano le equazioni

(2) $$p (f + 1) = 0$$

(3) $$(m + 1) (u + 1) = 0$$

(4) $$m t (f + 1) = 0$$

Inoltre dall'ultima affermazione del problema si trae che nelle equazioni scritte deve essere fatto

(5) $$f = 0 .$$

Da questo sistema di equazioni algebriche, che legano i numeri dell'aritmetica modulo 2, si trae con pochi passaggi il seguente sistema di soluzioni:

(6) $$p = 0 \quad ; \quad u = 0 \quad ; \quad m = 1 \quad ; \quad t = 0 .$$

Quindi il testimone non è degno di fede, il colpevole non era un uomo, non era di piccola statura ed era travestito da uomo.

Come si è visto, la ricerca della soluzione del problema di logica viene fatta esattamente in modo parallelo alla ricerca della soluzione di un problema algebrico; vorremmo infatti osservare che le procedure applicate ammettono certe operazioni che vengono accettate quasi come "naturali" nei calcoli algebrici abituali, ma che nelle trasformazioni delle formule di logica vengono esplicitamente codificate come "leggi di deduzione".

Per esempio, appare del tutto naturale sostituire in una equazione il risultato ottenuto da un'altra, oppure risolvere le equazioni indipendentemente dall'ordine in cui vengono presentate, ed altre che il Lettore riconoscerà facilmente.

Inoltre si può osservare che i sistemi di equazioni algebriche che traducono i problemi logici non sempre hanno soluzione unica, come è naturale. Per fissare le idee, prenderemo in considerazione un secondo esempio, tratto, come il primo, dal libro di T.Varga citato sopra (pag. 135).

Se farà bel tempo faremo una gita. Se non faremo gite non ci bagneremo. Se il tempo non diventa bello, ci bagneremo.

Indichiamo convenzionalmente le proposizioni enunciate con i simboli seguenti :

A farà bel tempo
B ci bagneremo
C faremo una gita

Adottando queste convenzioni le proposizioni si possono simbolizzare con le formule seguenti :

$$A \longrightarrow C \quad ; \quad \neg C \longrightarrow \neg B \quad ; \quad \neg A \longrightarrow B \quad .$$

Adottiamo anche le convenzioni esposte sopra, secondo le quali il valore di verità di una proposizione viene indicato con la stessa lettera che indica la proposizione, in carattere minuscolo. Ricordiamo inoltre che le proposizioni sopra elencate sono tutte affermate; quindi, analogamente a quanto abbiamo detto poco fa, le proposizioni enunciate vengono trasformate nelle seguenti equazioni, da risolvere in numeri interi modulo 2 :

$$(7) \qquad \begin{aligned} a\,(c+1) &= 0 \\ b\,(c+1) &= 0 \\ (a+1)\,(b+1) &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni (7) ammettono le seguenti soluzioni :

A) $a = c = 1$; b qualunque
B) $b = c = 1$; a qualunque

§6.- La strada che abbiamo percorsa fin qui per trasformare un problema di logica in uno di Matematica, e precisamente per tradurre un sistema di condizioni logiche in un sistema di equazioni nell'aritmetica modulo 2 non è l'unica che può essere battuta. Ci pare interessante presentare quì altre modalità per tradurre un problema in un altro, per confermare ancora una volta il perallelismo tra le strutture della Matematica e quelle della logica formale.

A tal fine si può osservare che i valori di verità delle proposizioni composte che sono stati forniti dalle formule della TAB. I del § 4 possono essere espressi anche dalle formule seguenti :

TAB. II

Negazione	$\neg$ A	1 - a
Alternativa	A \/ B	Max (a,b)
Congiunzione	A /\ B	Min (a,b)
Freccia	A ---> B	Max (1-a,b)

Le espressioni che abbiamo dato qui sopra con la TAB. II permettono di mettere in evidenza il fatto che il parallelismo tra le procedure della logica e quelle dell'algebra può essere esteso anche alle procedure che riguardano la logica detta " a più valori " e che viene considerata in certo modo come la generalizzazione della logica tradizionale, indicata come " a due valori ".

Esporremmo qui di seguito qualche esempio di queste possibili teorie, senza la pretesa di dire nulla di nuovo, nè di imporre la nostra impostazione di fronte a quelle dei logici di professione.

Inizieremo ripetendo l'osservazione che le espressioni delle funzioni di verità date nella TAB. II, nel caso della logica bivalente considerato sopra, danno gli stessi valori che abbiamo calcolato con le formule dell'aritmetica modulo 2; tuttavia le espressioni della TAB. II si prestano per eseguire le deduzioni anche quando si abbandoni lo schema della logica bivalente. Si supponga, per esempio, che una proposizione A possa avere 5 valori di verità, che richiameremo con nomi convenzionali, i quali peraltro non hanno alcuna pretesa di esprimere dei concetti rigorosi del calcolo delle probabilità; i valori sono i seguenti:

0 **falso** ; 0.25 **poco probabile** ; 0.5 **probabile,**

0.75 **molto probabile** ; 1 **vero** .

In questo ambito le espressioni della TAB. II, hanno senso e si possono quindi prestare per esprimere le relazioni logiche tra le proposizioni.

A titolo di esempio, prendiamo in considerazione l'ultimo degli esempi trattati, ed esprimiamo i valori di verità delle proposizioni coinvolte; ricordiamo inoltre che per tradurre con i simboli matematici gli enunciati, è necessario assegnare dei valori di verità alle proposizioni composte che si enunciano.

Per esempio possiamo anunciare le seguenti proposizioni:

E' molto probabile che se farà bel tempo faremo una gita.
E' certo che se non faremo gite non ci bagneremo.
E' probabile che, se il tempo non diventa bello, ci bagneremo.

Con le convenzioni stabilite, potremmo tradurre questi enunciati con le seguenti equazioni, che non sono algebriche, ma che si prestano abbastanza bene ad una discussione ed ad una soluzione, anche numerica:

(1) $\mathrm{Max}(1 - a, c) = 0.75$
(2) $\mathrm{Max}(c, 1 - b) = 1$
(3) $\mathrm{Max}(a, b) = 0.5$

La soluzione di questo sistema di equazioni potrebbe anche essere conseguita con l'impiego di un piccolo calcolatore tascabile programmabile, e la stesura del relativo programma potrebbe costituire un utile esercizio per il docente che volesse insegnare un impiego intelligente di questi mezzi di calcolo; ma non insistiamo per ora su questi argomenti, che ci porterebbero lontano dagli scopi che vogliamo conseguire qui.

Ci limitiamo quindi a dire che il sistema scritto ammette una sola soluzione, data dai valori:

$a = 0.5$ probabilmente farà bel tempo
$b = 0$ certamente non ci bagneremo
$c = 0.75$ molto probabilmente faremo una gita.

L'analisi di questo esempio potrebbe portare qualcuno a pensare che la trattazione dei problemi logici con gli schemi della logica polivalente pare sia più aderente alla realtà di quella della logica abituale bivalente.

Si osservi tuttavia che ogni schematizzazione della realtà con i simboli artificiali non deve mai pretendere di rendere esattamente tutti gli aspetti della realtà stessa; la minore o maggiore aderenza alle realtà che si considerano dipende ovviamente dagli scopi che si vogliono conseguire e non può essere giudicata con criteri che siano validi in generale.

VITA DELL'ASSOCIAZIONE

1.- E' da poco terminato il nostro XIV Seminario Nazionale dedicato alla Statistica ed alla Probabilità. Ci sentiamo autorizzati, in base all'alto numero dei partecipanti (120, di cui 80 docenti della scuola Media Inferiore e Superiore), all'impegno nel lavoro ed ai risultati del questionario compilato dai partecipanti, ad esprimere un giudizio largamente positivo di questo "servizio reso alla Scuola Italiana" (espressione di uno dei partecipanti). Anche il parere ampiamente positivo, espressoci da due Ispettori centrali presenti a tutti i lavori, che verrà riportato nelle loro relazioni, è motivo di soddisfazione per tutti coloro che hanno lavorato alla realizzazione di questo seminario.
2.- Il numero di Dicembre costituirà un quaderno ad hoc in cui si riporteranno gli Atti del Seminario.
3.- Il Centro Morin si rivela fecondo: l'intelligente e appassionata intraprendenza, a Treviso della Prof.ssa Maria Pia D'Argenzio, ed a Trento della Prof.ssa Maria Fait, ha già coagulato attorno a loro gruppi numerosi di docenti e le iniziative si fanno sempre piú numerose ed ampie, scaricando la sede centrale (che tra l'altro, sotto l'aspetto logistico, è piuttosto disagevole) ed ampliando cosí le nostre disponibilità di servizio. A Trento, ad es., dal giorno 8 al giorno 10 settembre si svolgerà un Seminario analogo a quello tenutosi a Paderno, con l'intervento dei prof.i Boffa, Dupont, Fait, Sitia e si sta organizzando - per la prima quindicina di novembre un altro Convegno (con l'intervento della Provincia Autonoma) e l'intervento di G.Papy e altri sulla scuola elementare. A Treviso, oltre al solito corso di perfezionamento domenicale, si sta organizzando un corso che continui il nostro Seminario con la collaborazione del Prof. Pesarin (corso che probabilmente si terrà a Padova).
3.- Terremo informati i nostri Soci su queste iniziative, eventualmente con circolari, e nel frattempo rinnoviamo un caldo invito: **"ABBONATEVI PER IL 1987 E FATE PROSELITI!GRAZIE**