L'insegnamento della Matematica
e delle Scienze Integrate — Vol. 6 - N. 2 - Aprile 1983

# INDICE

# GEOMETRIA E FISICA
## SPUNTI PER UNA ANALISI

Carlo Felice Manara
Università di Milano

Sunto. Si presenta sotto il profilo storico e critico, una analisi sulla genesi psicologica delle conoscenze geometriche e sul significato fisico che ad esse può attribuirsi quando se ne approfondiscano i rapporti con le altre scienze che si occupano della realtà concreta, della materia, della energia e dei loro movimenti.

********************

**1. La questione "che cosa è lo spazio" non ha cessato di sollevare discussioni tra i filosofi fino dall'antichità.**

Così suona la frase iniziale dell'articolo di **F.ENRIQUES** intitolato "Spazio e tempo davanti alla critica moderna" ed inserito nel Vol.II (Art.12) dell'opera Questioni riguardanti le matematiche elementari (Cfr.**(5)**,ii)(°).

---

(°)I numeri **in grassetto** posti tra parentesi rotonde rimandano alla bibliografia posta alla fine del presente articolo.

Siamo convinti che la frase dell'illustre matematico e filosofo risponda pienamente a verità e quindi non ci illudiamo di esporre delle cose molto importanti, in un argomento che ha occupato le menti dei più grandi filosofi dell'umanità.

Tuttavia riteniamo che qualche chiarimento non sia del tutto inutile in proposito, soprattutto in presenza del fatto che l'argomento (che ha -come si è detto- affaticato le menti più alte dei pensatori) non cessa di interessare anche oggi i ricercatori, e soprattutto i fisici ed i filosofi della scienza.

Molti di questi infatti vogliono meditare sul significato e sull'essenza delle teorie che essi costruiscono incessantemente allo scopo di conoscere sempre meglio l'universo che ci circonda.

Anticipando in parte le conclusioni dello studio che intendiamo esporre brevemente, diremo che per parte nostra pensiamo che sia, forse, non troppo opportuno parlare di "spazio", quasi che questo termine designasse un ente ben determinato. Naturalmente non intendiamo qui aprire una discussione filosofica, nè contrastare ad un'abitudine di espressione che si è diffusa anche nella letteratura scientifica. Tuttavia crediamo che a nostro parere- allo stato della critica sui fondamenti delle matematiche, il termine "spazio" potrebbe risultare equivoco; per esempio, pensiamo che sia poco opportuno ed anche fuorviante parlare di "proprietà dello spazio", quando si sa bene che la critica geometrica del secolo XIX ha tolto a questa ed a simili espressioni ogni significato scientifico.

Per esempio, il solo fatto che in geometria si parli di "spazio affine", oppure di "spazio proiettivo", oppure di "spazio euclideo", indica che il termine ha un significato che è sostanzialmente convenzionale e che ogni definizione che se ne volesse dare ha il significato che **B. PASCAL** ha così chiaramente spiegato. (Cfr. **(**12**)**, i)).

In particolare pensiamo di poter adottare la concezione moderna, secondo la quale le proprietà di uno "spazio" sono determinate dalle proposizioni primitive che si enunciano all'inizio di una teoria (postulati) e quindi non si accetta che esista uno "spazio" in sè, avente certe proprietà "evidenti", talmente evidenti che basta aprire gli occhi per vederle, ed altre "meno evidenti", che debbono essere dedotte con il ragionamento o con il calcolo.

2. Per poter esporre più chiaramente il nostro pensiero crediamo sia utile una breve rassegna sulla concezione classica della geometria e sulla crisi vissuta da questa scienza durante il secolo XIX. Invero nell'atteggiamento classico la geometria ci si presenta come una dottrina che enuncia delle proposizioni vere a proposito di certi oggetti: punti, rette, piani, figure e così via; tali proposizioni sono accettate come vere per due ragioni: o perchè sono considerati evidenti per sè, oppure perchè sono dimostrate in modo logicamente rigoroso a partire dalle prime, che sono chiamate "postulati".

La storia ha registrato discussioni, durate più di venti secoli, a proposito delle proposizioni enunciate da EUCLIDE senza dimostrazione, cioè di quelle che EUCLIDE enumera tra i postulati: in particolare fu oggetto di discussione il quinto postulato, quello che viene comunemente chiamato "della parallela," perchè equivale sostenzialmente alla affermazione della unicità della parallela condotta ad una retta da un punto fuori di essa.

I numerosi tentativi fatti per ricondurre questa proposizione nel numero dei teoremi, cioè per dimostrarla logicamente, potrebbero essere interpretati come altrettante prove del fatto che la proposizione stessa è stata per lunghissimo tempo considerata come vera obiettivamente, cioè come una proposizione che enuncia delle proprietà vere di certi enti effettivamente esistenti.

Sulla natura di questi enti non pare esistessero dubbi, anche se si discusse a lungo sul significato e sulla portata delle proposizioni che EUCLIDE enuncia su di loro; invero negli **Elementi** si trovano delle frasi iniziali, che EUCLIDE chiama "termini" ("oroi", in greco) e le prime due di esse sono:

**Il punto è ciò che non ha parte.,**
**La retta è la linea che giace ugualmente rispetto a tutti i suioi punti.**

Per più di venti secoli, glossatori e commentatori di EUCLIDE si sono sforzati di interpretare e di analizzare queste preposizioni (Cfr. **(7)** ); riteniamo di poter dire che la opinione della critica moderna è che tali frasi non siano delle definizioni nel senso critico del termine, ma piuttosto delle illustrazioni, dei chiarimenti, degli aiuti per i lettori o per gli ascoltatori a formarsi l'immagine e poi il concetto del punto, della retta e degli altri enti successivamente nominati. A conforto di questa tesi sta anche la osservazione che mai, nel seguito del trattato euclideo, nessuna proposizione viene fondata, nessuna dimostrazione viene condotta a fine con riferimento alle frasi che abbiamo riportato, nessun ragionamento viene concluso dicendo, per esempio:

........ e ciò è vero perchè il punto non ha parte.

Queste difficoltà nella precisazione della natura degli enti di cui la geometria parla si accompagnarono alle difficoltà che riguardavano (come abbiamo già detto) le altre proposizioni iniziali del trattato euclideo. Si giunse alla idea di costruire una geometria "assoluta", cioè di costruire un sistema di proposizioni che fossero valide indipendentemente dalla validità o meno del postulato euclideo della parallela (Cfr. **(3)** ); si giunse a costruire delle dottrine in cui le proposizioni iniziali fossero sostanzialmente la negazione del postulato euclideo (Cfr.**(11)** ); si giunse a cercare di costruire la geometria su basi di partenza del tutto diverse da quelle che servirono da piedistallo per EUCLIDE (Cfr.**(13)** ).
Il passo definitivo, in questa direzione, fu compiuto quando si giunse alla dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non euclidee, cioè si giunse alla certezza che queste dottrine non contengono in sè delle contraddizioni, ma hanno lo stesso rango, lo stesso diritto di cittadinanza nell'ambito della matematica che compete alla geometria euclidea classica.
Non intendiamo insistere sull'argomento, ma ci limitiamo a concludere che il risultato della dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non euclidee fu tra l'altro l'abbandono del modo di pensare che portava a considerare la geometria come scienza di determinati concetti, del modo di pensare che portava a definire la geometria come scienza delle figure oppure dello spazio metrico oppure con altre frasi della stessa o di analoga natura. Invero, se esistesse un oggetto determinato studiato dalla geometria, questo non potrebbe essere conosciuto attraverso teorie tra loro contradditorie:

la sua esistenza dovrebbe portare di conseguenza la validità di una delle geometrie e la falsità delle altre. Invece si verifica il fatto, abbastanza paradossale, che, per esempio, nella procedura di **E.BELTRAMI** (Cfr.**(1)**), la geometria euclidea fornisce gli strumenti per costruire dei modelli che portano a constatare la validità di quella non euclidea; e, viceversa, nello spazio di **N. LOBATCHEWSKI** sulla orisfera vale la geometria euclidea (Cfr. **(6)** & **(26)**).

E' abbastanza comprensibile che una situazione di questo tipo possa portare inizialmente ad un certo gradi di perplessità; è anche abbastanza comprensibile che tale perplessità sia resa ancor più grave dalla immagine che tradizionalmente si aveva della geometria, scienza considerata come paradigma della chiarezza e della certezza, a tal punto che **B.SPINOZA** aveva intitolato una sua opera **Ethica ordine geometrico demonstrata,** quasi per dare, attraverso il richiamo alla geometria, l'immagine del rigore deduttivo e della chiarezza espositiva.

Al di là di ogni situazione psicologica di disagio e di perplessità, è abbastanza evidente che una situazione gnoseologica di questo genere ha portato con sè la necessità di rivedere la interpretazione ed il giudizio sul significato della geometria.

Quindi nell'atteggiamento attuale, la geometria non è più considerata, al modo classico, come una scienza che parla di certi oggetti e di certi contenuti, ma come un **sistema ipotetico-deduttivo,** una specie di puro gioco logico, le cui regole sono costituite dai postulati, cioè dalle proposizioni iniziali che si enunciano senza dimostrazione, e nel quale la validità delle proposizioni iniziali che si enunciano senza dimostrazione, e nel quale la validità delle proposizioni dimostrate (teoremi) consiste essenzialmente nel rigoroso rispetto delle leggi logiche che permettono di dedurle dalle proposizioni iniziali. Se ne può avere un'idea considerando, per esempio, l'inizio del classico trattato di **D.HILBERT** (Cfr.**(9)**):

**Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti; chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema ... chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema ... chiamiamo piano gli oggetti del terzo sistema.**

In un atteggiamento cosiffatto quindi non si cerca di determinare esplicitamente la natura degli oggetti indeterminati di cui si parla; tale natura viene definita implicitamente dal sistema di proposizioni iniziali che si enunciano.
Queste proposizioni danno pertanto quella che si chiama "definizione implicita" degli oggetti considerati; e non vi è alcuna ragione di perplessità nel fatto che oggetti a cui sono attribuiti nomi uguali abbiano diverse proprietà in diverse teorie; semplicemente essi sono degli oggetti diversi, perchè sono i sistemi di postulati che li definiscono e la uguaglianza dei nomi è da considerarsi del tutto accidentale.
Così come con un medesimo mazzo di carte si possono fare varî giochi, in ciascuno dei quali una medesima carta ha diversi valori; la uguaglianza dei nomi e degli aspetti esteriori è puramente accidentale, perchè la diversità delle regole di gioco fa sì che si tratti di carte essenzialmente diverse.

Appare abbastanza naturale che, in questo ordine di idee, l'osservazione del mondo esterno non impone più le proposizioni iniziali, da accettarsi perchè "evidenti" per se stesse, ma semplicemente suggerisce tali proposizioni, le quali possono essere scelte con una certa arbitrarietà, che rispetti tuttavia (anche in senso molto lato) la natura della scienza che si sta costruendo e la continuità della tradizione secolare di essa.

Va osservato tuttavia che, da un atteggiamento cosìffatto, che si presenta in teoria come semplice e rigoroso, nascono vari problemi, a differenti livelli epistemologici. Noi ci limiteremo qui ad accennare ad alcuni di questi problemi, più che altro per testimoniare della complessità delle questioni in parola; ci soffermeremo invece su altri, sui quali vogliamo qui concentrare un poco la nostra attenzione.

Vorremmo anche dire che, a nostro parere, i problemi del primo tipo sono ad un livello logico astratto; e tra essi vorremmo ricordare le questioni riguardanti la scelta dei sistemi iniziali di postulati della teoria che si costituisce in modo che sia garantita la loro compatibilità e non contraddittorietà.

A proposito della scelta di un sistema di postulati, vorremmo ricordare, oltre all'opera fondamentale di **D. HILBERT** già citata, anche tutto il lavoro di **G. PEANO** e della sua scuola, così come l'opera di **F. ENRIQUES** e della scuola matematica che a lui faceva capo. Nel caso di **G. PEANO**, la ricerca della perfezione logica e della eleganza concettuale ha portato a far sì che le proposizioni iniziali della teoria geometrica siano addirittura scritte spesso con il simbolismo ideografico proprio degli studi di logica che da **G. PEANO** avevano avuto origine; per quanto riguarda la scuola di **F. ENRIQUES**, va ricordato l'insieme delle analisi storiche, le quali condussero questo grande matematico a sondare la genesi delle idee fondamentali e degli sviluppi della geometria, per meglio comprendere il significato di questa scienza, cogliendone le strutture di base in quello che si potrebbe chiamare lo stato nascente.

Per quanto riguarda infine la questione della coerenza e della non contraddittorietà di un sistema di postulati, dobbiamo limitarci a dire che la questione coinvolge, in modo più o meno diretto, tutto il campo dei fondamenti della matematica. Invero, appare chiaro che, quando si abbandoni la evidenza delle proprietà di un oggetto - supposto realmente esistente - come fondamento della validità delle proposizioni primitive, queste ultime diventano (come si è detto) delle regole di gioco, che possono essere diversamente interpretate ed ammettono diversi contenuti o - come suol dirsi - diversi modelli.

Il caso tipico è fornito dalla geometria proiettiva dello spazio reale tridimensionale, nella quale la legge di dualità permette di interpretare in due modi diversi ogni postulato e ogni proposizione che se ne deduce, ottenendo così delle proposizioni sempre valide.

L'atteggiamento adottato da **D. HILBERT** e da altri conduce a costruire dei contenuti dei postulati, dei modelli della teoria, mediante enti presi da altri capitoli della matematica; è chiaro che in questo atteggiamento il problema non viene risolto fino al fondo, ma semplicemente scaricato sugli altri capitoli della matematica con i quali vengono costruiti i modelli, capitoli ai quali viene demandato il compito di garantire o di assicurare i proprî fondamenti.

Non intendiamo approfondire qui i problemi logici che riguardano le questioni del primo tipo, perchè - ripetiamo - intendiamo dedicare la nostra attenzione ad un altro genere di questioni.

Per quanto riguarda invece i problemi del secondo tipo, vorremmo qui soffermarci sulle possibili ipotesi riguardanti la genesi psicologica dei concetti della geometria, il significato e la portata delle conoscenze geometriche, le quali nascono dalla conoscenza delle realtà materiali, ed infine sui rapporti di queste conoscenze con le altre scienze che si occupano della realtà materiale, in particolare con la fisica.

Dedicheremo il prossimo paragrafo alla esposizione degli studi sulla genesi psicologica dei concetti geometrici, per riservare i successivi alla analisi del significato fisico delle dottrine geometriche e del loro rapporto con le altre scienze che si occupano della realtà concreta, della materia, della energia e dei loro movimenti.

3. Abbiamo visto che nel secolo XIX la geometria ha vissuto una crisi di importanza fondamentale: crisi che ha costretto i matematici a cambiare radicalmente il proprio modo di giudicare questo ramo della scienza. Appare quindi anche naturale che nello stesso secolo abbiano avuto una grande fioritura gli studi dedicati alla analisi della genesi psicologica dei concetti della geometria. Anche su questo argomento sarebbe imprudente ed illusorio cercare di dare una esposizione completa della evoluzione del pensiero dei matematici e dei filosofi che se ne sono occupati; ci limiteremo quindi ad esporre i momenti e gli atteggiamenti che ci sembrano più significativi agli effetti della esposizione che vogliamo fare. A questo proposito ci sembra particolarmente interessante la posizione esposta da F. ENRIQUES nel trattare del "Problema psicologico

dell'acquisto delle nozioni spaziali" (Cfr.(5) ii).

Egli infatti distingue tra le nozioni concernenti la geometria proiettiva, che riguardano soltanto i concetti di punto, retta, piano e le relazioni di appartenenza, e quelle della geometria metrica (elementare, nel senso classico della parola), che coinvolgono anche nozioni di uguaglianza, di trasporto rigido e quindi di movimento.

La genesi psicologica delle nozioni di geometria proiettiva è quindi da far risalire alle sensazioni acquisite mediante gli organi della vista, mentre la genesi psicologica delle nozioni e dei concetti della geometria metrica è da far risalire a sensazioni di natura più complessa: tattili - muscolari, propriocezione e così via. Ed anche in questo secondo genere di sensazioni vi è luogo a distinguere tra quelle dovute al tatto speciale, che potrebbero dar luogo alle nozioni riguardanti la congruenza e quindi alla geometria metrica nel senso generale del termine, e quelle tattili-muscolari generali, che darebbero luogo alla categoria di nozioni riguardanti la teoria del continuo, la quale viene - dice F.ENRIQUES -

> ... edificata sui concetti primi generalissimi di linea, superficie, varietà a più dimensioni, e dà luogo ad una ricerca critica preliminare, indipendente dalla proiettiva e dalla metrica.

Lo stesso F.ENRIQUES riassunse la sua analisi nelle righe seguenti:

> I tre rami della geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.

Come si è visto, l'analisi di **F.ENRIQUES** attribuisce la genesi dei concetti che portano alla geometria euclidea elementare classica al dominio delle sensazioni tattili - muscolari, invero la operazione del trasporto rigido dei corpi solidi è alla base del concetto di uguaglianza delle figure geometriche, così come spesso è anche oggi definita nelle trattazioni elementari; invero capita ancora oggi di leggere delle frasi come la seguente:

**Due figure si dicono uguali, quando portate a sovrapporsi, coincidono.**

Ovviamente delle frasi come questa, od altre equivalenti dal punto di vista logico, si fondano sul concetto, ritenuto evidente, di corpo rigido e sul concetto, pure evidente, del trasporto di un corpo senza che questo cambi. E' chiaro che quest'ultima clausola implica l'avere accertato che cosa significa "non cambiare", e ciò implica, a sua volta, la conoscenza del concetto di congruenza che la frase stessa pretenderebbe di definire. Il circolo vizioso che viene così ad instaurarsi deve quindi essere rotto in qualche modo; ciò è stato fatto con vari atteggiamenti, e qui ne ricorderemo soltanto due fondamentali.

Il primo, assunto, per esempio, da **D.HILBERT** nella sua opera citata (Cfr. **(9)**), conduce a definire in modo implicito, per postulati, la relazione di congruenza.

Il secondo conduce a precisare che cosa si intenda per "trasporto": questa seconda strada fu seguita da **H. HELMHOLTZ**, il quale espose le sue idee in alcune classiche memorie (Cfr.**(8)**).Le idee di H.HELMHOLTZ vennero ulteriormente sviluppate da **F.KLEIN**, il quale collegò la nozione di trasformazione geometrica con quella fornita dalla struttura algebrica di gruppo (Cfr. **(10)**). Le idee di **F.KLEIN** si rivelarono di estrema fecondità e - a nostro parere - influenzarono anche la impostazione che **A.EINSTEIN** diede alla teoria della relatività speciale e generale filtrando attraverso anche le ricerche di **G.RICCI CURBASTRO** e **T.LEVI CIVITA.**

Del resto si potrebbe dire che questa corrente di pensiero è in stretto collegamento con la strada che già era stata imboccata da **B.RIEMANN,** nella sua celebre memoria dianzi citata (Cfr. **(13)**). Cercando di esprimere in forma grossolana ed approssimativa le idee di **B.RIEMANN** e quelle che erano in germe nella sua esposizione, si potrebbe dire che in questo atteggiamento non si prende posizione sulla totalità dello spazio geometrico, o, meglio, si distinguono i problemi riguardanti la porzione di spazio costituita dai punti vicini ad un punto dato da quelli che riguardano l'intero spazio; nell'intorno di ogni punto dello spazio si danno le regole per misurare la distanza tra due punti (abbastanza vicini) e l'angolo tra due direzioni: queste "geometrie" delle varie porzioni di spazio vengono poi "collegate" mediante adeguate leggi di raccordo, che danno la effettiva struttura globale dell'insieme di tutti i punti che si considerano.

E' appena necessario osservare che questi studi e gli sviluppi di queste idee hanno un collegamento molto stretto con il problema che qui ci interessa in modo particolare, cioè il problema del significato e della portata degli sviluppi della geometria sulla conoscenza del mondo reale che ci circonda; problema che è stato spesso enunciato, in forma che - come abbiamo detto - rischia di essere fuorviante ed equivoca, come il **problema della geometria dello spazio fisico.**

In questo ordine di idee - a nostro parere - è difficile dare un senso al problema che porta a domandarsi quale sia la "geometria vera" dello spazio reale, cioè dell'insieme dei corpi materiali e dei fenomeni energetici che noi osserviamo e che cerchiamo di conoscere. A questo proposito pensiamo di poter condividere le idee che **G.FANO** esprime, a conclusione della sua esposizione sull'indirizzo elementare della geometria non euclidea (Cfr. **(6)**). Scrive **G.FANO:**

> **I concetti geometrici, benchè acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un triangolo (astratto), nè affermare che nello spazio fisico sia "verificata" una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato.**

Ci pare di intravvedere qui una critica alle idee esposte da C.F. GAUSS il quale aveva progettato una specie di "experimentum crucis" per decidere sulla validità o meno della geometria euclidea nello "spazio reale"; tale esperimento avrebbe dovuto essere realizzato con la misura degli angoli di un triangolo molto grande. **F.ENRIQUES**, già più volte citato, attribuisce (Cfr. **(5)ii**) a **C. F. GAUSS** il progetto di misurare gli angoli del triangolo avente come vertici **Brocken, Hohenhagen** ed **Inselberg** ed attribuisce a **N. LOBATCHEWSKI**, sulla scorta delle idee di **F. K. SCHWEIKART**, il progetto di servirsi di triangoli astronomici. Poichè misure siffatte si potrebbero eseguire soltanto con osservazioni ottiche, pare a noi che questi esperimenti non possano portare a risultati conclusivi per quanto riguarda la geometria; al massimo i loro risultati potrebbero essere enunciati dicendo, per esempio, che

**...il comportamento dei raggi luminosi può essere descritto, in forma più o meno approssimata, dall'una oppure dall'altra delle geometrie astratte che sono state costruite.**

Pensiamo che questa posizione concordi con quella espressa chiaramente da H. POINCARE', il quale ha affermato che:

nessuna esperienza ha come oggetto lo spazio o le relazioni dei corpi con lo spazio. Ma soltanto (la nostra esperienza) le relazioni dei corpi tra loro.

(Cfr. H. POINCARE', Science et Hypothèse - citato da F.ENRIQUES in Per la storia della logica, (5)iii))

Di conseguenza la domanda:

La geometria euclidea è vera?

per H. POINCARE' è priva di senso. Al massimo ci si può domandare quale sia la geometria più adeguata per descrivere le esperienze che noi eseguiamo sulla materia o sulla energia e sui loro spostamenti.

Del resto questa posizione era già stata presa da G. W. LEIBNITZ; invero, secondo le idee di questo filosofo,

... non vi è spazio assoluto reale, vale a dire che lo spazio non è qualche cosa di definito in sè, ma ha un senso relativo ai corpi, come "ordine delle coesistenze", così come il tempo è l'"ordine delle successioni." (citato da F.ENRIQUES, (5) ii)).

4. Il lettore si sarà accorto che noi condividiamo le tesi di H POINCARE' e di G. W. LEIBNITZ esposte fin qui; pensiamo infatti che solo così si ottenga il rispetto pieno dell'esperienza e del significato di una teoria fisico-matematica della realtà.

Invero, sempre secondo il pensiero di H. POINCARE', si può dire in generale di una teoria cosiffatta ciò che è stato detto della geometria:

non ha senso domandarsi se sia vera o falsa, ma soltanto se sia adeguata per descrivere in modo soddisfacente le nostre esperienze in un determinato momento della storia ed entro determinati limiti di approssimazione.

Pensiamo invero che da questo punto di vista, cioè nell'ambito di una sistemazione razionale e metodica delle nostre esperienze sui corpi rigidi, la geometria si presenti come il primo capitolo della fisica, cioè come il primo passo sul cammino della descrizione razionale e della deduzione rigorosa di quelle proprietà che ci interessano, sotto un certo punto di vista e per determinati fini.

Crediamo che si adatti al caso della teoria fisico-matematica il paragone della carta topografica: infatti ci serviamo di un mezzo siffatto per studiare una parte ristretta della superficie terrestre, mentre siamo ben consci di commettere degli errori perchè, in forza di classici teoremi di geometria differenziale, sappiamo bene che non è possibile applicare il piano sulla superficie sferica senza lacerazioni o duplicazioni.

Tuttavia sappiamo anche bene che lo strumento è atto ai fini pratici ed anche teorici a cui lo si destina entro determinati limiti di approssimazione, che dipendono dal problema che si sta considerando.

Pertanto pensiamo che non vi sia nulla di contraddittorio nell'utilizzare diverse "geometrie", cioè diversi sistemi, per descrivere i fenomeni che riguardano la materia o l'energia, perchè siamo ben consci del fatto che nessuna di esse può pretendere di dire **tutta** la verità su certi fenomeni, ma che di volta in volta va scelta quella più adeguata per razionalizzare le relazioni spaziali dei corpi e degli stati di energia e per dedurre le conseguenze, prevedendo in modo coerente i risultati delle esperienze future.

Tutto ciò ci sembra perfettamente consono con quel "postulato di comprensibilità del reale" che **F. ENRIQUES** riconosce come fondamento essenziale per basare ogni tentativo di spiegazione scientifica della realtà (Cfr. **(5) iii)**).

Pensiamo che questo atteggiamento sia rigoroso e rispettoso della esperienza e del metodo scientifico rettamente inteso, ma ci rendiamo conto, tuttavia, che esso può presentare qualche difficoltà a chi sia solito attribuire agli enunciati della scienza un valore assoluto e definitivo, cioè a chi assuma di fronte alla scienza un atteggiamento che vorremmo chiamare euclideo - newtoniano.

Crediamo che si possa comprendere l'origine di un atteggiamento cosiffatto, ed anche il suo permanere nelle menti di molti, quando si tenga conto della importanza che ha la fantasia elaboratrice, creatrice e trasformatrice nella costruzione della nostra immagine del mondo.

Non intendiamo estendere la nostra analisi a tutto il pensiero scientifico, e vorremmo quindi limitarci ad analizzare il caso della geometria e della fisica.

A questo proposito pensiamo sia legittimo ritenere che, nella costruzione di queste scienze, sia utile, per non dire addirittura necessario, distinguere tre fasi della costruzione di una teoria: una prima fase che consiste nella percezione della realtà sensibile; la assoluta necessità di questa fase della cognizione umana viene codificata nel classico detto:

**Nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu.**

La seconda fase consiste nella elaborazione fantastica della immagine fornita dai sensi, elaborazione che fornisce all'intelletto il materiale per la costruzione intellettuale. Questa costituisce la terza fase, che si realizza nella concezione delle idee e nella loro espressione, verbale o simbolica.

Nel caso della geometria si potrebbe prendere in considerazione, per esempio, il concetto di punto e la sua nascita, identificando anzitutto la prima fase con la percezione di un corpicciolo molto piccolo. E' chiaro che questa espressione ha un significato essenzialmente soggettivo e relativo: perchè un granello di sabbia, per esempio, può essere considerato molto piccolo se rapportato ad un monumento e molto grande se introdotto nel delicatissimo meccanismo di un orologio di precisione. Nel secondo momento la fantasia elabora i dati della percezione, costruendo l'immagine di un oggetto sempre più piccolo, indefinitamente piccolo. Ovviamente questa elaborazione fantastica non è ancora la costruzione del concetto di punto, ma ne è un momento essenziale; la definizione del concetto di punto geometrico giunge a compimento quando si esprimono con mezzi linguistici, e non con immagini, i rapporti logici che il concetto determina e dai quali viene a sua volta determinato. In altre parole, la definizione del concetto di punto può venir considerata completa quando si enunciano delle frasi che riconducono il concetto stesso ad altri già conosciuti, oppure quando si dia un insieme di proposizioni primitive, le quali conducano alla definizione implicita del concetto stesso.

Riteniamo che un'analisi analoga possa essere svolta a proposito di ogni concetto di cui si serve la geometria; a questo proposito pensiamo sia di particolare interesse l'esempio offerto dal concetto di **continuo geometrico.** E' noto che tale concetto è molto complesso e che è stato definito e formulato rigorosamente in forma soddisfacente e chiarito sino in fondo soltanto dalle analisi del secolo XIX e del secolo XX. Riteniamo tuttavia di poter affermare che esso ha una radice sperimentale e ha la sua origine nelle sensazioni dei nostri sensi (vista e tatto), i quali, a causa delle loro limitazioni, non percepiscono la struttura granulare della materia, struttura che ci è presentata teoricamente e sperimentalmente dalla fisica moderna. La fantasia integra ed elabora queste sensazioni incomplete dei sensi facendo una extrapolazione che non contraddice, ma completa ed integra i dati sensibili. Si giunge così alla formulazione teorica rigorosa, la quale avviene (sui dati della fantasia che ha elaborato i dati sensibili) mediante strumenti concettuali e linguistici che utilizzano per la espressione dei concetti le parole del linguaggio comune oppure i simboli dell'analisi matematica.

Per fare un altro esempio, possiamo pensare che la vista di un filo teso sia il fondamento su cui la fantasia elabora il concetto di retta indefinitamente prolungabile, la quale viene poi definita implicitamente in modo rigoroso mediante un sistema di assiomi o di postulati. In modo analogo possiamo pensare che la vista di uno specchio o di una superficie di lago calmo sia il punto di partenza sul quale si appoggerà la costruzione del concetto di piano. Ma il fatto che questa immagine sia estesa indefinitamente fuori della portata delle nostre attuali possibilità di osservazione è ovviamente frutto della fantasia e non è convalidato da alcuna esperienza concreta; anzi, se volessimo fare l'esperienza di procedere sempre nella stessa direzione lungo questo specchio d'acqua, troveremmo che esso non risponde affatto alla definizione di piano della geometria euclidea e soprattutto non risponde a quella immagine che la fantasia ci offre di questo ente.

Volendo cercare di riassumere, almeno sommariamente, quanto è stato detto fin qui, potremmo dire che gli oggetti di questa dottrina che abitualmente viene chiamata geometria non sono completamente frutto della fantasia, ma certo anche risultati dell'opera di questa nostra facoltà; pertanto lo spazio, questo ente immenso, oscuro e vuoto, che viene abitualmente immaginato, è costruito dalla fantasia sulla base di sensazioni più o meno univoche o precise e viene poi fatto oggetto di una dottrina deduttiva, quando le proprietà degli enti che si immaginano in esso contenuti sono formulati linguisticamente in modo preciso mediante postulati.

Queste considerazioni sono abbastanza semplici ed addirittura banali, ma mostrano tutta la loro importanza quando si voglia applicare la geometria che abbiamo costruito alla conoscenza degli oggetti della natura ed in particolare a quelli che vengono tradizionalmente considerati come gli oggetti della fisica, che è la più matematizzata tra le scienze della natura. Invero in questo caso nulla vieta che noi utilizziamo gli schemi teorici che ci sono forniti dall'una oppure dall'altra delle geometrie che l'uomo ha costruito per spiegare - nei limiti del possibile - le cose che noi osserviamo. Ma nessuno può pretendere che vi siano delle proprietà geometriche "intrinseche" dello spazio fisico, perchè ovviamente le proprietà che osserviamo e che deduciamo sono quelle degli enti che guardiamo, tocchiamo e misuriamo in qualche modo.

Del resto vale la pena di ricordare che l'intervento della fantasia nella costruzione dei concetti, e quindi della conoscenza umana, è dottrina che è stata formulata da tempo e non soltanto nei riguardi della geometria; per esempio, TOMMASO D'AQUINO (Cfr. **(15) iv)**) si pone la domanda se il nostro intelletto possa di fatto, nella condizione attuale della nostra vita, conoscere senza l'intervento della fantasia; e risponde che è impossibile, per il nostro intelletto, nella nostra attuale condizione, comprendere alcunchè senza riferirsi alle immagini fornite dalla fantasia (**... nisi convertendo se ad phantasmata**). E lo stesso TOMMASO D'AQUINO ritorna ripetutamente sullo stesso argomento ribadendo lo stesso pensiero e confermando il suo atteggiamento (Cfr. **(15) v)**).

Pertanto la esperienza è fonte e radice di una operazione di "astrazione" che viene compiuta dalla fantasia con un lavoro di extrapolazione e di eliminazione, di oblio e di astrazione (nel senso etimologico del termine) che conduce quegli oggetti dei quali poi parleranno le proposizioni iniziali (postulati) ed i teoremi della geometria propriamente detta.

5. Ciò che è stato detto finora a proposito della geometria può essere esteso - a nostro parere senza notevoli difficoltà - anche al campo della fisica. Vorremmo anzi dire che in questo campo i problemi che vengono abitualmente formulati come "problemi della geometria dello spazio fisico" assumono un aspetto esteriormente diverso, ma sostanzialmente non molto dissimile, presentandosi come problemi della oggettività della conoscenza fornita dalla meccanica in particolare e dalla fisica in generale.

Invero ci pare di poter dire che, nel campo delle scienze sperimentali e ai fini della conoscenza del mondo fornita dalla scienza fisico-matematica, sembra ovvio che la ricerca della obiettività (fondata esigenza, basata su un sano realismo, necessario, anche se non espresso, per ogni costruzione scientifica) viene tradotta nella ricerca della intersoggettività; in altre parole, si vuole che le descrizioni del mondo che vengono date da due diversi osservatori siano coerenti. E con questo termine indichiamo la esigenza che le relazioni e le leggi del mondo espresse da uno degli osservatori siano controllabili anche dall'altro, con modalità stabilite ed indipendenti dai fenomeni osservati e dagli osservatori.

Riteniamo tuttavia di poter dire che è difficile stabilire in assoluto, una volta per tutte, a quale livello si debba situare questa controllabilità sperimentale delle esperienze dell'uno degli osservatori da parte dell'altro. Per la meccanica di **I. NEWTON** e per tutte le osservazioni della natura che si ispirano a quella, la controllabilità si situava al livello della singola misura di lunghezza e di intervallo di tempo. In altre parole, secondo questo atteggiamento, le misure di lunghezza di segmenti e di intervalli di tempo fatte da un osservatore devono poter essere ritrovate assolutamente uguali da un altro osservatore qualsivoglia (che beninteso utilizzi le stesse unità di misura). A questo proposito, vorremmo rifarci all'esempio che è fornito dalla geometria analitica e dalle sue formule; è chiaro che le coordinate di un punto dello spazio dipendono essenzialmente dal riferimento che si sceglie e che due osservatori diversi possono benissimo attribuire al medesimo punto due insiemi diversi di coordinate; ma entrambi gli osservatori posseggono delle formule che permettono di passare da una terna di coordinate all'altra, una volta che sia conosciuta la posizione di un riferimento rispetto al'altro. Ovviamente gli osservatori non pretendono di attribuire un significato assoluto alle coordinate che essi danno ai punti, ma soltanto a certe funzioni delle coordinate stesse, che rimangono numericamente invariate rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni. In altre parole, in questo caso la intersoggettività viene realizzata con dei mezzi analitici più complicati di quanto non sia la pura coincidenza delle misure; ma la obiettività, intesa come ricerca di determinati invarianti, viene lo stesso ottenuta, anche se con mezzi più scomodi e complessi.

Pertanto, anche nel caso della meccanica, non troviamo nulla di strano nel fatto che si possa superare la concezione newtoniana per giungere ad una controllabilità che richieda procedimenti più complessi, soprattutto quando si tenga conto del fatto che il confronto delle descrizioni dell'universo fatte da due diversi osservatori implica lo scambio di informazioni e quindi l'invio di segnali, che hanno velocità infinita. Queste circostanze possono far variare il nostro modo di rappresentare matematicamente le leggi con le quali i fenomeni avvengono nello spazio e nel tempo, ma non presentano nulla di incoerente con la esperienza e quindi di contrario alla ragione.

A questo proposito vorremmo ribadire qui che noi preferiremmo, invece di parlare di "spazio" e di "tempo", si parlasse di "coordinate spaziali" e di "coordinate temporali", perchè effettivamente queste sono gli strumenti che noi adottiamo per descrivere i fenomeni che osserviamo e che studiamo. Tuttavia è un fatto che tali fenomeni sono da noi proiettati con la fantasia in un vuoto indeterminato e senza riferimento che noi chiamiamo abitualmente "spazio" e in una durata indefinita che noi chiamiamo abitualmente "tempo". Ma questa visione fantastica,per quanto comoda e suggestiva, non ha nulla di necessario e soprattutto non ha diritto di imporsi perentoriamente alla nostra ragione quando la necessità della analisi delle nostre esperienze ci costringe ad un esame più approfondito e più rigoroso.

Noi pensiamo infatti che nulla ci autorizzi a pretendere che le coordinate spaziali e temporali che noi attribuiamo, in un certo riferimento, a certi eventi fisici che avvengono sotto i nostri occhi debbano avere gli stessi valori per tutti gli osservatori.

Ricordiamo anche, a questo proposito, la definizione classica del tempo:

**Tempus est numerus motus secundum prius et posterius.**

che potrebbe essere tradotta in termini moderni dicendo che il tempo è la misura del cambiamento (**motus**) secondo una direzione privilegiata (che considera il prima ed il dopo). Tale definizione quindi non implica affatto quella durata infinita ed immaginaria nella quale la nostra fantasia si compiace di proiettare i fenomeni, estendendola indefinitamente nel prima e nel poi. Invero, secondo questa concezione, dove non vi è cambiamento, dove non vi è **motus** alcuno, non ha senso parlare di tempo. E vorremmo ricordare anche qui che il problema non è nuovo e che l'atteggiamento preso da noi non ha nulla di originale; a titolo di esempio ci riferiamo a ciò che dice **TOMMASO D'AQUINO** nella analisi che egli fa del modo di essere delle Intelligenze separate: a tale proposito egli afferma che per loro il tempo viene misurato in maniera diversa che per noi, perchè il loro modo di cambiare è diverso da quello che si verifica per noi, immersi come siamo nella necessaria evoluzione della parte materiale del nostro essere (Cfr. **(15) i)**). Pertanto - ripetiamo - le coordinate temporali che ogni soggetto intelligente (osservatore) attribuisce ad un determinato evento non hanno nessuna necessità di essere assolutamente uguali per tutti gli esseri intelligenti che osservano lo stesso evento. Ribadiamo invece che la sola cosa importante è che ogni osservatore dia una descrizione coerente dei fatti, e che si possano avere delle leggi di passaggio che permettono la traduzione della descrizione di un osservatore a quella di un altro quale si voglia.

Pertanto in questo ordine di idee la intersoggettività costituisce una condizione sufficiente per la obiettività, perchè le leggi sono scritte in modo che sia possibile la ricerca di "invarianti", cioè di quelle proprietà che possono essere considerate come veramente "obiettive", secondo la accezione abituale ed acritica di questo termine.

Pare a noi che questo nostro atteggiamento non possa non soddisfare lo scienziato e soprattutto il fisico, il quale non avrebbe alcun interesse a parlare di cose che non possono in alcun modo cadere sotto la nostra esperienza, ma è invece interessato alla descrizione coerente della realtà sulla quale egli esperimenta, senza che sia obbligato ad immaginare un riferimento assoluto, valido per tutti, o una coordinata temporale assoluta, che sia valida e legittima per tutti: un riferimento al quale tutti sono tenuti a riferirsi, ma che nessuno può raggiungere con esperimenti eseguibili concretamente (e non - ripetiamo - soltanto immaginati). Capita di leggere, per esempio, che nei primi nanosecondi della sua esistenza il nostro universo avesse la sua materia tutta concentrata in un volume che, a seconda degli espositori, viene confrontato con quello di un pallone da calcio o di una palla da tennis; e non possiamo non pensare che una descrizione cosiffatta sia frutto della fantasia piuttosto che di una razionale analisi delle parole e delle formule.

Invero vien fatto di pensare che, se si dice di poter misurare le dimensioni dell'universo nei primi nanosecondi della sua esistenza, ciò si fa immaginando un osservatore che sia fuori di questo universo e che possa trasportare dei regoli per la misura delle distanze. Pertanto si immagina l'universo stesso immerso in una specie di vuoto indistinto, che era forse lo spazio immaginato da **I. NEWTON**, e si immagina l'osservatore che possa eseguire le misure che danno senso a questo discorso; ma non si vede come possa un osservatore essere "fuori dell'universo", se questa espressione viene presa nel suo senso logico, cioè la si interpreta come "l'insieme di **tutte** le cose esistenti" (cioè anche dell'osservatore). Discorsi analoghi si potrebbero fare a proposito della misura del tempo in queste condizioni.

Ma non vogliamo prolungare ulteriormente la discussione, che ha assunto già una dimensione esagerata. Vorremmo concludere che la fantasia è sì un elemento indispensabile della conoscenza umana e nella costruzione delle teorie scientifiche, ma che non possiamo pretendere che essa detti delle regole alla logica e che si imponga alla ragione; quella ragione di cui **B. PASCAL** diceva (Cfr. **(12)** ii)):

> **La raison nous commande bien plus impérieusement qu'un maître; car en désobéissant à l'un on est malheureux, et en désobéissant à l'autre on est un sot.**

## BIBLIOGRAFIA


(1) - Beltrami Eugenio

**Saggio di interpretazione della geometria non euclidea,** Giornale di Mat. (1868)

(2) - Bonola Roberto

**La geometria non euclidea,** Bologna (1975)

(3) - Bolyai Giovanni

**Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclideis (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica,**

tradotto in francese con il titolo

**La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'EUCLIDE (que l'on ne pourra jamais établir a priori),** Paris (1896)

(4) - Coolidge Julian Lowell

**The elements of non euclidean geometry,** Oxford (1909)

(5) - Enriques Federigo

i) **Prinzipien der Geometrie,** Enzikl. der Math. Wiss., III AB 1, Lenzig (1907)

ii) Spazio e tempo davanti alla critica moderna in **Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da F. ENRIQUES,** Parte I, Art. XII, Bologna

iii) **Per la storia della logica,** Bologna (1936)

(6) - Fano Gino

**Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività,** Bologna (1935)

(7) - **Heath Thomas L.**

**The thirteen books of Euclid's Elements,** Cambridge (1926)

(8) - Helmholtz Hermann

i) **Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen**

ii) **Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie,** Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig (1883)

(9) - Hilbert David

**Grundlagen der Geometrie,**

tradotto in italiano con il titolo

**Fondamenti di geometria,** Milano (1970)

(10) - Klein Felix

i) **Vorlesungen über nicht-euclidische Geometrie,** Berlin ( 1928)

ii) **Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,** Gottingen (1872)
tradotto in italiano con il titolo
**Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti,** Annali di Mat. (1891)

(11) - Lobatchewski Nikolai Ivan
**Recherches géométriques sur la théorie des paralléles,** Paris (1900)

(12) - Pascal Blaise
i) **De l'ésprit géométrique et de l'art de persuader**
ii) **Pensées**

(13) - Riemann Bernhard
**Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen,** Gesammelte Math. Werke, Leipzig (1876)

(14) - Russel Bertrand
**An essay on the foundations of Geometry,**
tradotto in italiano con il titolo
**Fondamenti di geometria,** Roma (1975)

(15) - Tommaso d'Aquino

Summa theologica. Pars prima.

i) Q. X a. 5 ad $1^m$

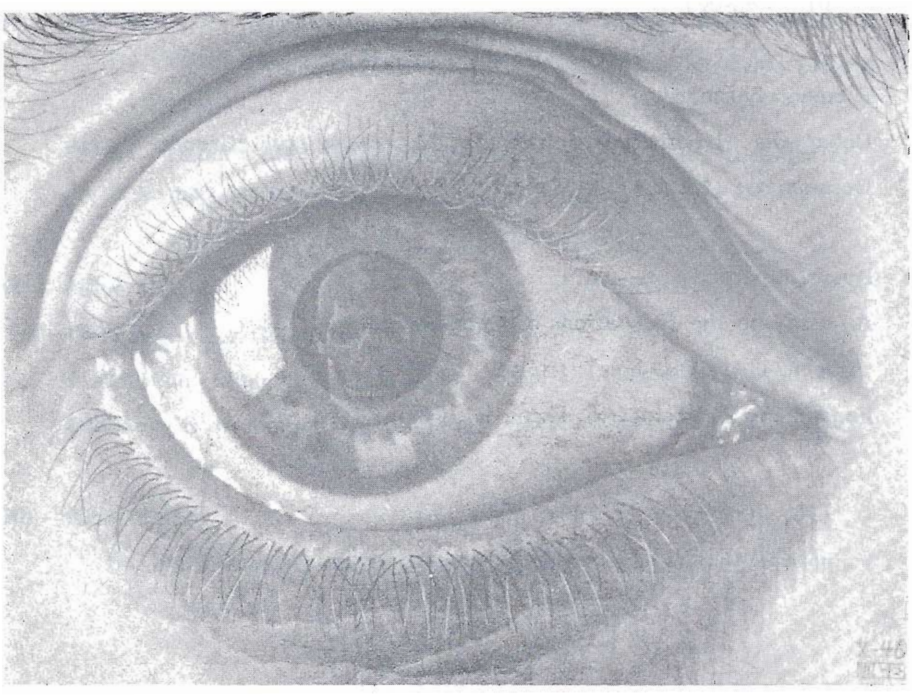
ii) Q. LIII a. 3 ad $3^m$ et a. 4 ad $2^m$

iii ) Q. LXI a. 2 ad $2^m$

iv ) Q. LXXXIV a.7 in c.

v ) Q. LXXXV a. I ad $5^m$ et a. 5 ad $2^m$

**********************************************************************



OCCHIO Riproduzione da M. C. ESCHER