COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 332

CARLO FELICE MANARA

La simmetria

Estratto da "*Periodico di Matematiche*,,
(4) 45 (1967), pp. 277-287

MILANO
1967

321 — **M. L. Muratore** — Sopra una particolare forma delle equazioni di moto per sistemi anolonomi. *Atti Acc. Sc. di Torino.* (1966-67).

322 — **C. F. Manara** — Sull'impiego del metodo matematico in Economia. *Riv. Intern. Sc. Sociali.* (1967).

323 — **E. Bombieri** — Sulla seconda variazione della funzione di Koebe. *Boll. U.M.I.* (1967).

324 — **E. Udeschini Brinis** — Variational deduction of spinor field equations. *Meccanica.* (1967).

325 — **M. Pastori** — Apparent forces of analytical mechanics. *Meccanica.* (1967).

326 — **M. Pastori** — Su alcune forze a potenza nulla della Meccanica analitica. *Rend. Acc. Naz. Lincei.* (1967).

327 — **M. De Socio** — Considerazioni sull'influenza di uno strato di gas ionizzato non lineare nella propagazione di un campo elettromagnetico piano. *Rend. Acc. Naz. Lincei.* (1967).

328 — **V. Zambelli** — Operatori di tipo centrale su un reticolo completo. *Rend. Ist. Lomb.* (1967).

329 — **M. Galluzzi** — Il tema di matematica al concorso per i licei. *Period. di Matem.* (1967).
D. Arbizzani — Il tema assegnato alla prova scritta del concorso A VII. *Period. di Matem.* (1967).
R. Betti — Il tema della prova scritta del concorso A VI. *Period. di Matem.* (1967).

330 — **M. Cugiani** — Metodi Monte Carlo e sequenze di numeri a caso. *Period. di Matem.* (1967).

331 — **G. Melzi** — Il teorema di Brouwer nella moderna geometria del continuo. *Period. di Matem.* (1967).

332 — **C. F. Manara** — La simmetria. *Period. di Matem.* (1967).

333 — **M. Dedò** — Rudimenti di logica. *Period. di Matem.* (1967).

334 — **C. F. Manara** — Oscar Chisini. *Rend. Sem. Matem. e Fis. di Milano.* (1967).

335 — **M. Spoglianti** — Sulla scoperta delle frazioni continue. *Atti Acc. Scienze Torino* (1967-68).

336 — **M. Dedò** — Trattazione geometrica di un problema di Hadamard. *Period. di Matem.* (1968).

337 — **C. F. Manara** — Sulla introduzione di una funzione indice di utilità. *Period. di Matem.* (1968).

338 — **C. Marchionna Tibiletti** — Operatori $\{K\}$ - semplici normali su un reticolo completo e questioni d'immersione. *Period. di Matem.* (1968).

339 — **G. Melzi** — Su una formula integrale riguardante le varierà differenziabili immerse. *Period. di Matem.* (1968).

340 — **M. Pastori** — Tensori spontanei in Meccanica e in Elettrologia. *Period. di Matem.* (1968).

341 — **D. Roux** — Sul tipo delle funzioni intere. *Period. di Matem.* (1968).

342 — **P. Udeschini** — Aspetto geometrico dell'impostazione hamiltoniana della teoria della gravitazione. *Period. di Matem.* (1968).

343 — **M. D'Aprile** — La prova scritta agli esami di abilitazione CL. XIII. *Period. di Matem.* (1967).
M. Dedò — Il tema del concorso Tab. A VI. *Period. di Matem.* (1968).
M. Galuzzi — Il tema del concorso Tab. A VII. *Period. di Matem.* (1968).

344 — **M. Dedò** — Trigonometria sferica ed iperbolica. *Period. di Matem.* (1968).

345 — **G. Melzi** — I nodi nello spazio a tre e a quattro dimensioni. *Period. di Matem.* (1968).

346 — **G. Ricci** — Funzioni aritmetiche addittive e condizioni unilaterali. *Period. di Matem.* (1968).

347 — **M. P. Manara** — Sulla caratterizzazione dei reticoli di operatori di chiusura su un reticolo completo. *Rend. Ist. Lomb.* (1968).

348 — **L. Paganoni** — Sulla equivalenza di due famiglie di insiemi di fronte alla equidistribuzione *Rend. Ist. Lomb.* (1968).

349 — **E. Barazzetti** — Sulla rappresentazione dei due campi gravitazionale ed elettromagnetico nella teoria unitaria einsteiniana. *Rend. Ist. Lomb.* (1968).

350 — **P. Udeschini** — Hamiltonian formalism in Einsteinian gravitation: geometrical aspect. *Meccanica.* (1968).

351 — **P. Udeschini** — Sulla forma hamiltoniana della teoria einsteiniana della gravitazione. *Rend. Sem. Matem. e Fis. Milano.* (1968).

352 — **C. F. Manara** — Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci. *L'industria.* (1968).

353 — **C. Marchionna Tibiletti** — Operatori idempotenti nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo. *Ist. Naz. Alta Matem. Symposia Mathematica.* (1968).

354 — **M. Cugiani - A. Liverani - G. Regoliosi** — Processi di simmetrizzazione nelle applicazioni Monte Carlo al problema di Dirichlet. *Atti Sem. Matem. e Fis. Univ. di Modena.* (1968).

355 — **P. C. Nicola** — Equilibrio economico generale di tipo concorrenziale in condizioni dinamiche. *L'industria.* (1969).

COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 332

CARLO FELICE MANARA

La simmetria

Estratto da *"Periodico di Matematiche,,*
(4) **45** (1967), pp. 277-287

MILANO

1967

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre-Dicembre 1967 - Serie IV, vol. XLV
n. 4 5 (pagg. 277-287)

La simmetria

1. Nell'accingerci a trattare del soggetto della simmetria, conviene ricordare che questa parola ha un senso che spesso è considerato estremamente generico, perchè viene usata nei campi più disparati: l'arte (in particolare le arti figurative, ma anche l'Architettura), la scienza ed il linguaggio comune fanno spesso uso di questo termine; ci piace pensare che questa pluralità di usi possa bensì essere talvolta causa di confusione concettuale, ma abbia una ragione nella estrema generalità del concetto e nella fecondità delle sue applicazioni. Noi tratteremo qui soltanto di una parte delle applicazioni del concetto di simmetria alla Matematica in generale ed alla Geometria in particolare; per es. trascureremo qui di trattare della applicazione che del concetto di simmetria viene fatta alla stessa definizione dei concetti geometrici, sulla scorta di una opera di BACHMANN (1) che è diventata già classica, nonostante l'epoca relativamente recente in cui è comparsa. In questa opera, come è noto, il punto del piano viene definito in base alla circostanza che esso è centro di simmetria per il piano stesso, cioè in base ad una ben determinata trasformazione involutoria che muta il piano in sè e che è strettamente collegata con il punto; la retta viene definita in base alla circostanza che essa può essere considerata come asse di una simmetria speculare che muta il piano in se stesso, cioè è strettamente collegata con una seconda trasformazione involutoria del piano; quindi i rapporti tra punti e rette, tra punti fra loro o tra rette fra loro, vengono considerati dal punto di vista delle relazioni delle operazioni cui questi elementi geometrici sono collegati; viene quindi ottenuta una trattazione algebrica per così dire « diretta » degli enti geometrici, la quale realizza in certo senso un ideale di perfezione che è un progresso rispetto al formali-

---

(1) F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, 1959.

smo cartesiano del metodo delle coordinate. Non vogliamo proseguire ulteriormente in questa esposizione, che meriterebbe ben di più del semplice ricordo di sfuggita che ne abbiamo fatto qui.

Ritornando ad una trattazione che è più generica e che riguarda un campo più ampio, nei paragrafi che seguono daremo un breve cenno che riguarda la possibile definizione della simmetria, o meglio una possibile precisazione che può essere fatta di questo concetto, e trarremo le conseguenze che da questa presentazione derivano, con le relative applicazioni alla Matematica pura ed applicata. Ci sembra che questa nostra fatica non sia inutile, perchè, date le applicazioni sempre maggiori che dei concetti algebrici vengono fatte nell'insegnamento medio, può essere utile all'insegnante avere a disposizione un insieme di esempi sui quali appoggiare il discorso, oltre a qualche considerazione che lo aiuti a collegare tra loro degli argomenti che a prima vista possono essere considerati in certo modo disparati.

2. Come abbiamo già detto, il vocabolo « simmetria » è usato nei contesti più vari e con significati a volte disparati tra loro; il primo scopo sarà dunque quello di cercare di precisare in qualche modo il vocabolo, in modo da circoscrivere le sue applicazioni nei campi che vogliamo trattare, e precisamente quelli della Geometria in primo luogo, senza tuttavia precluderci degli accenni all'Algebra, alla Meccanica ed alla Fisica.

Uno dei modi che appare opportuno per circoscrivere il significato del vocabolo potrebbe essere il seguente:

« Si consideri un insieme $\mathfrak{J}$ ed un gruppo G di trasformazioni « di ogni elemento di $\mathfrak{J}$ su se stesso; un elemento di $\mathfrak{J}$ si può consi- « derare dotato di particolari qualità di *simmetria* se è mutato di sè « dalle trasformazioni di un gruppo più ampio di G ».

Come si vede, la precisazione che abbiamo data sopra è ispirata in qualche modo alle applicazioni geometriche del concetto di simmetria, ma potrebbe essere estesa anche ad altri campi, diversi da quello della Geometria. Si pensi per es. come insieme $\mathfrak{J}$ quello di tutti i triangoli di un piano; ovviamente se consideriamo la Geometria del piano rispetto al gruppo metrico, e quindi consideriamo il piano come un piano euclideo, un triangolo dell'insieme ammette come gruppo G di trasformazioni su se stesso quello formato *almeno* dall'identità; vi sono effettivamente dei triangoli per i quali il gruppo G è formato soltanto dall'identità. Tuttavia si suole considerare il triangolo isoscele come dotato di una particolare simmetria perchè esso ammette anche una trasformazione involutoria (e precisamente la simmetria assiale rispetto alla mediana relativa al lato che viene abitualmente chiamato « base »); ed il triangolo equilatero viene abitualmente considerato come dotato di una simmetria maggiore ancora di quella del triangolo semplicemente isoscele, perchè esso ammette addirittura un gruppo di sei movimenti, isomorfo come è noto al gruppo totale delle sostituzioni di tre elementi, che lo trasforma in sè.

Non stiamo qui ad analizzare le possibili relazioni che intercedono tra l'esistenza di questi gruppi che abbiamo nominati e l'uso che viene fatto, in arte, di figure dotate di particolari simmetrie ai fini della decorazione; ci basti avere accennato a questo fatto, per la trattazione del quale rimandiamo ai libri che si occupano dell'argomento [2].

In altro campo, si pensi ad una funzione razionale intera di n variabili

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \tag{1}$$

come è noto esistono delle funzioni del tipo della (1) tali che i valori da esse assunti sono in numero di $n!$, tanti quante sono le sostituzioni che si possono eseguire sulle n variabili della funzione. Inoltre il gruppo S di tutte le sostituzioni che vengono operate sulle variabili è isomorfo a quello delle sostituzioni che vengono di conseguenza operate sui valori della funzione z.

In altre parole si potrebbe dire che, considerato come insieme $\mathfrak{J}$ quello delle funzioni razionali intere di n variabili, esistono delle funzioni di $\mathfrak{J}$ tali che il loro valore viene lasciato invariato soltanto dalla identità del gruppo delle sostituzioni sulle n variabili indipendenti. In questo ordine di idee, appare naturale considerare come dotate di una maggiore « simmetria » quelle funzioni aventi valori tali che vengono lasciati invariati da un gruppo di sostituzioni delle variabili il quale è più ampio del gruppo costituito dalla sola identità ed è ovviamente un sottogruppo del gruppo totale.

In particolare, come è noto, nell'Algebra classica vengono chiatemate « funzioni simmetriche » quelle che rimangono invariate per *tutte* le sostituzioni del gruppo totale. Sono noti i legami tra la teoria dei gruppi e la teoria delle equazioni, legami che appunto mettono

---

(2) Si veda per es. il trattato di A. SPEISER, *Gruppentheorie*, oppure il libro stimolante di H. WEYL, *La simmetria*, (tradotto in italiano da Giliola Lopez, Milano 1962).

in luce quei rapporti tra campi disparati di cui abbiamo parlato poco fa.

Questa visione del concetto di « simmetria » può guidare anche alla comprensione dell'interesse che è stato dedicato in varie epoche della ricerca matematica ai cosiddetti « punti notevoli » del triangolo. A ben guardare, la definizione più generale di « punto notevole » può essere data appunto a partire dal concetto di « funzione simmetrica »: invero ognuno dei « punti notevoli » che vengono così chiamati nelle trattazioni elementari classiche ammette una definizione a partire dagli elementi del triangolo, tale che ne fa una particolare funzione simmetrica di questi, nel senso che un « punto notevole » rimane invariato quando si operi sugli elementi del triangolo una qualunque permutazione del gruppo totale.

Le considerazioni che abbiamo esposte sono estendibili anche alla Fisica, oltre che alla Matematica. A questo proposito ricordiamo qui il classico « principio di simmetria », che riguarda la Fisica classica e che è stato enunciato da P. CURIE (3).

Egli dice che la simmetria caratteristica di un fenomeno fisico è la massima compatibile con l'esistenza del fenomeno stesso. Pertanto un fenomeno può sussistere soltanto in un ambiente che abbia la simmetria caratteristica del fenomeno oppure quella di un suo sottogruppo.

In altre parole certi elementi di simmetria possono coesistere con un fenomeno, ma non sono necessari: ciò che è necessario è che *manchino* certi elementi di simmetria; in forma suggestiva, per quanto non pienamente rigorosa, si potrebbe dire che *è la dissimmetria che crea i fenomeni.*

Qui, ovviamente, il concetto di « simmetria » si riferisce non soltanto alla simmetria puramente geometrica, ma anche alla simmetria fisica: occorre cioè che lo spazio fisico (materia, forze, ecc.) sia simmetrico, cioè mutato in sè da un gruppo che è più ampio del gruppo costituito dalla sola identità.

Queste considerazioni di P. CURIE hanno una portata filosofica profonda, perchè si riallacciano sostanzialmente al « principio di ragion sufficiente » mediante il quale può essere inquadrata la nostra conoscenza del mondo che ci circonda; esse possono condurre all'enunciato classico, che fa distinzione tra « cause » ed « effetti » e quindi si

---

(3) P. CURIE, *Sur la Symétrie dans les phénomènes physiques*, Journal de Phisique 33 (1894) 341. Cfr. anche *Oeuvres* de P. CURIE, p. 118.

riferisce alla concezione classica intuitiva che cerca la « spiegazione » di un fenomeno attraverso il principio di causalità:

« Tutte le simmetrie che *mancano* in un effetto devono mancare « anche nella causa » (4).

Si ottiene così una condizione necessaria per l'esistenza di una spiegazione dei fenomeni fisici che è analoga al controllo dimensionale delle misure delle grandezze fisiche e permette di scartare a priori le « cause » che non soddisfano alle condizioni enunciate.

Abbiamo voluto esporre queste considerazioni della Fisica classica, che riannodano le ricerche di questa a certi concetti algebrici come quello dei gruppi di trasformazioni, per far vedere quanto della Matematica moderna, o almeno dei suoi concetti fondamentali passi necessariamente nella conoscenza che abbiamo del mondo esterno. Sarebbe troppo lungo, per quanto molto interessante, far vedere come l'Algebra domini la Fisica più moderna e come certi concetti gruppali, e di simmetria in particolare, servano a stabilire dei principi fondamentali della Fisica delle particelle e servano anche a dirigere gli esperimenti alla scoperta degli elementi fondamentali della materia.

3. Le considerazioni che abbiamo premesso, e che ci hanno portato a considerare vari aspetti e significati del concetto di « simmetria », possono anche chiarire il significato e l'importanza di alcune trattazioni della Geometria analitica classica. A titolo di esempio si pensi al problema delle cosiddette « forme canoniche » delle equazioni dei luoghi di punti dello spazio o del piano.

Per mettere il problema nella forma in cui l'abbiamo visto prima, consideriamo per es. una curva K e, come insieme, l'insieme dei riferimenti possibili del piano. Ovviamente potremo trovare una forma canonica della equazione della curva quando avremo trovato nell'insieme un riferimento particolare, tale che esista un gruppo G di trasformazioni che muta in sè tanto la curva K che il riferimento.

Per es. se K è una conica nel piano proiettivo, la scelta del riferimento proiettivo avente i vertici che formano un triangolo autopolare conduce a scrivere la equazione di K in coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3 nella forma

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0 \tag{1}$$

(4) Cfr. H. Ollivier, *Cours de Physique générale,* Paris 1927, Tome 1er (3a edizione).

e quindi a mettere in evidenza il gruppo delle trasformazioni che mutano in sè la curva K ed il riferimento: precisamente, indicate con σ_1, σ_2, σ_3 le trasformazioni del gruppo, esse sono date da:

$$\begin{cases} \sigma_1: & \rho x_1 = -x_1, & \rho x_2 = x_2, & \rho x_3 = x_3 \\ \sigma_2: & \rho x_1 = x_1, & \rho x_2 = -x_2, & \rho x_3 = x_3 \\ \sigma_3: & \rho x_1 = x_1, & \rho x_2 = x_2, & \rho x_3 = -x_3. \end{cases} \tag{2}$$

Le tre operazioni σ_1, σ_2, σ_3, insieme con la trasformazione identica, formano, come è noto, un gruppo a quattro elementi che viene chiamato « gruppo trirettangolo », e che è isomorfo al gruppo delle tre simmetrie dello spazio rispetto a tre assi concorrenti e mutuamente ortogonali.

Ovviamente, quando si vogliano conseguire degli altri scopi, appare opportuno scegliere un diverso riferimento nell'insieme $\mathfrak{I}$, in modo che siano messe in evidenza, in modo migliore, altre operazioni; tale per es. è il caso della conica K scritta nella forma canonica

$$ax_1^2 + bx_2x_3 = 0. \tag{3}$$

Analogamente ci si comporta quando per curva K si consideri una cubica piana. È possibile per es. scegliere la forma canonica ben nota

$$x_3x_2^2 = P_3(x_1, x_3) \tag{4}$$

essendo P_3 un polinomio omogeneo di terzo grado nelle variabili x_1 ed x_3.

Come è noto, nella forma canonica (4) per la equazione della cubica si ha un flesso nel punto di coordinate omogenee (0, 1, 0), avendosi ivi come tangente di flesso la retta di equazione $x_3 = 0$. Nella forma canonica (4) viene messa in evidenza la esistenza di un'omologia armonica avente il centro nel flesso e trasformante in sè la cubica K. Tale omologia armonica ha ovviamente l'equazione

$$\rho x_1 = x_1, \quad \rho x_2 = -x_2, \quad \rho x_3 = x_3. \tag{5}$$

Quando si vogliano mettere in particolare evidenza tutte le trasformazioni che mutano in sè la cubica K si può porre, come è noto, l'equazione della K stessa nella forma

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1x_2x_3 = 0. \tag{6}$$

Si vede allora che il gruppo delle omografie piane che mutano in sè la K è dato da (almeno) 18 trasformazioni proiettive, gruppo che può diventare più ampio quando il parametro λ che compare nella (6) abbia particolari valori.

In questi casi, come si è visto, il concetto di simmetria geometrica viene elegantemente collegato a quello di simmetria nel senso che abbiamo investigato in precedenza con riferimento alle funzioni simmetriche razionali di più variabili.

Il legame appare più stretto quando si pensi che il procedimento logico seguito fin qui può essere invertito: invero abbiamo finora considerato le forme canoniche delle equazioni di certe curve (coniche e cubiche piane) come conseguenti alle proprietà di simmetria, supposte note, delle curve stesse; viceversa è noto che è possibile porsi il problema di ricercare la forma canonica della equazione che sia la più « semplice » possibile e di qui dedurre la esistenza di certe trasformazioni della curva in sè. Abbiamo messo tra virgolette l'aggettivo « semplice » riferito alla forma analitica della equazione di una curva perchè ovviamente non esistono dei criteri assoluti e generalmente validi per giudicare di una « semplicità » cosiffatta; si tratta di una questione di carattere soggettivo e di un giudizio che coinvolge tanto gli scopi che si hanno in mente che la formazione culturale e l'esperienza del ricercatore.

Rimane tuttavia un atteggiamento comune, che è quello del ricercare la « simmetria » tanto nei calcoli che nelle formule, in modo che la particolare « eleganza », appellantesi ad un senso generico di estetica matematica, richiami l'esistenza di un certo gruppo di trasformazioni che muta in sè la figura. E qui abbiamo messo tra virgolette il termine « eleganza » perchè a proposito di essa si possono fare le considerazioni analoghe a quelle che sono state fatte prima a proposito della « semplicità ».

4. Non vogliamo lasciare cadere il discorso, che abbiamo iniziato nel precedente §, senza fare qualche cenno al valore formativo che possono avere considerazioni del genere di quelle che abbiamo svolte per la educazione matematica dei giovani. È noto invero che, nella maggior parte dei casi, l'insieme dei metodi della Geometria analitica, insegnato ai giovani nei corsi universitari o anche nelle classi delle scuole medie superiori, consegna loro un armamentario di formule e di metodi che molto spesso li fa inciampare invece di aiutarli nella soluzione: le formule vengono applicate senza precauzioni, e la prevalenza del simbolo analitico sulla « cosa » simbolizzata fa sì che la soluzione, quando arriva, sia mascherata, non sia vista, oppure si giunga addirittura ad una pseudosoluzione. Per es. quando la « cosa » da simbolizzare sia un problema di Geometria, i metodi della Geometria analitica portano a trasformare tale problema in uno di Algebra o di Analisi matematica; i metodi di queste dottrine portano poi alla soluzione del problema di Algebra oppure di Analisi, ma la rispondenza delle soluzioni ottenute con il « contenuto » geometrico va verificata con una analisi del procedimento, la quale viene di solito chiamata « discussione » e rappresenta spesso per molti giovani la parte più difficile del lavoro. Notiamo tuttavia che troppo spesso i giovani trascurano la opportunità di fare dei controlli sui procedimenti analitici, oppure si gettano nei calcoli dando ad essi quella che essi considerano la « massima generalità » e che invece si riduce ad essere la massima complicazione.

Le ragioni di questo comportamento, che spesso conduce fuori strada oppure a risultati analitici non « leggibili » in termini geometrici, sta spesso nella mancata osservazione delle simmetrie che sono possedute dai dati del problema geometrico e che devono ovviamente sussistere anche nei risultati. Queste simmetrie dovrebbero guidare nella scelta del riferimento (di volta in volta proiettivo, affine oppure metrico cartesiano) in modo che le simmetrie dei dati e dei risultati siano messe in evidenza attraverso la particolare semplicità delle formule e l'esistenza, facilmente controllabile, di simmetrie nelle funzioni che compaiono nello sviluppo dei calcoli.

A questo proposito si potrebbe forse enunciare un principio, che è analogo a quello enunciato da P. Curie, ponendo i dati del problema al posto della « causa » e i risultati del problema al posto degli « effetti ». Si otterrà quindi un enunciato che se non ha la validità generale che possiede quello di P. Curie per la fisica classica può essere tuttavia molto utile nella trattazione e nella soluzione dei problemi geometrici, e di grande aiuto nella discussione.

Si potrebbe quindi dire che « Ogni dissimmetria che si ritrova nei risultati deve essere anche nei dati » ovvero in modo equivalente « Ogni simmetria che sussiste nei dati deve potersi riscontrare anche nei risultati » di un problema geometrico.

Pertanto la tecnica con la quale dovrebbe essere scelto il sistema di riferimento per la trattazione di un problema di Geometria e l'accortezza con la quale dovrebbero essere condotti i calcoli che portano alla soluzione del problema analitico che traduce il problema geometrico dovrebbero essere ispirate dalla costante preoccupazione che siano messe in evidenza con la maggior semplicità possibile le simmetrie che valgono per i dati del problema.

In questo campo ovviamente non si possono dare delle regole generali, perchè dovrebbe essere l'esperienza, il gusto e l'intuizione dell'operatore a guidare il procedimento; tuttavia non è forse molto lontano dal giusto il dire che gli sforzi degli insegnanti di Matematica dovrebbero essere rivolti, insieme all'insegnamento delle convenzioni della Geometria analitica e delle tecniche di calcolo, anche a far acquisire ai discenti questa esperienza e questo gusto di cui si parlava poco fa.

Per fissare il discorso ed a titolo di esempio, ricordiamo qui le trattazioni che vengono date classicamente di certi problemi, e che seguono le regole che abbiamo ricordato.

Vediamo anzitutto la trattazione che viene data di solito delle coniche, considerate nel piano della Geometria euclidea, mediante le convenzioni della Geometria analitica. Sia per es. il problema di studiare la ellisse, considerata come luogo dei punti P tali che, fissati due punti F_1 ed F_2 chiamati fuochi, la somma delle distanze

$$PF_1+PF_2$$

sia una costante, non dipendente dal particolare punto P del luogo.

Come è noto, si suole assumere il riferimento cartesiano ortogonale in modo che uno degli assi coordinati sia la congiungente dei due punti F_1 ed F_2 ed in modo che l'origine stia nel punto medio del segmento avente F_1 ed F_2 come estremi.

Così facendo, dopo qualche calcolo, sul quale non ci soffermiamo qui, si giunge a scrivere la equazione della curva nella forma canonica ben nota

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

forma nella quale le proprietà della curva sono messe bene in evidenza ed in particolare è messo in evidenza il gruppo trirettangolo di simmetrie che mutano la curva in sè, gruppo le cui trasformazioni, diverse dalla trasformazione identica, sono date da

$$\begin{cases} x'=-x, & y'=y \\ x'=x, & y'=-y \\ x'=-x, & y'=-y. \end{cases}$$

e questo è appunto il gruppo di simmetrie che muta in sè la coppia di punti F_1 e F_2 (e che ci ha suggerito la scelta del sistema di riferimento).

Come secondo esempio, sempre preso dalla Geometria elementare, consideriamo il problema di trovare le circonferenze che passano per un punto Q e sono tangenti a due rette r ed s.

Supponiamo anzitutto che le due rette r ed s siano concorrenti in un punto, che chiameremo O.

Per mettere in equazione il problema, conviene assumere un riferimento che rispetti tutte le simmetrie che sussistono nei dati; tralasciamo per il momento la condizione che abbiamo preannunciato, che le circonferenze cercate debbano passare per il punto Q. Ovviamente esiste un gruppo trirettangolo di simmetrie che mutano in sè la coppia di rette r ed s; due operazioni del gruppo hanno come assi le bisettrici della coppia; pertanto uno dei modi per mettere in evidenza tali simmetrie consiste nello scegliere come assi coordinati cartesiani ortogonali proprio le due bisettrici suddette.

Risulta del tutto evidente che le circonferenze che cerchiamo vanno cercate nell'insieme di quelle circonferenze che sono tangenti ad entrambe le rette r ed s; tale insieme è diviso in due sottoinsiemi: le circonferenze dell'uno e dell'altro hanno il loro centro sull'una oppure sull'altra delle due bisettrici dell'angolo delle due rette r ed s.

Possiamo sempre supporre che le due rette r ed s siano quindi rappresentate dalle equazioni

$$ax \pm by = 0. \tag{1}$$

Allora dei calcoli immediati danno che i sistemi delle circonferenze che hanno i centri sui due assi e sono tangenti alle due rette sono rappresentati dalle equazioni

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + y^2 = \alpha^2 a^2/(a^2+b^2) & (2) \\ x^2 + (y-\beta)^2 = \beta^2 b^2/(a^2+b^2) & (3) \end{cases}$$

essendo stati indicati con α e β rispettivamente i parametri rispetto ai quali viene descritto il sistema (2) ed il sistema (3).

Indichiamo ora con x_0 ed y_0 le coordinate del punto Q; la ricerca delle circonferenze che ci interessano si farà risolvendo le due equazioni che si ottengono, rispettivamente nelle incognite α e β dalle (2) e (3) imponendo che siano soddisfatte per $x = x_0$ ed $y = y_0$.

Lasciamo al Lettore esperto di insegnamento il compito di moltiplicare gli esempi e di adattare le considerazioni che abbiamo accennate poco sopra alla sua problematica particolare. Potrebbe per es. essere abbastanza educativo qualche volta l'espediente di svolgere due diverse trattazioni di un medesimo problema, una che soddisfi alle raccomandazioni che abbiamo fatte e l'altra eseguita secondo la tecnica diffusa spesso tra gli studenti, che porta alla scelta arbitraria del riferimento; il confronto tra le due trattazioni potrebbe portare a constatare quante siano le proprietà che si « leggono » direttamente seguendo una delle trattazioni e che diventano « invisibili » per l'altra, ed anche quanti controlli facilissimi siano resi possibili dall'una e siano resi praticamente ineseguibili dall'altra. Ma non vogliamo insistere sull'argomento, bastandoci l'accenno, fatto in modo molto modesto, alle affinità tra campi disparati della scienza intese come elemento educativo alla formazione scientifica.

C. F. MANARA

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy 1968

290 — **E. Udeschini Brinis** — Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).

291 — **G. Melzi** — Proprietà metriche locali di varietà differenziabili immerse in uno spazio euclideo e caratterizzazione integrale delle ipersfere. *Rend. Ist. Lomb.* (1965).

292 — **M. Marchi** — Cubiche di incidenza delle reciprocità quadratiche. *Rend. Ist. Lomb.* (1965).

293 — **M. D'Aprile** — Proprietà locali delle curve di S^n in Geometria differenziale simile. *Rend. Ist. Lomb.* (1965).

294 — **H. Davenport** — Quelques problèmes d'approximation diophantienne. *Rend. Sem. Matem. e Fis. Milano* (1965).

295 — **W. K. Hayman** — Il diametro transfinito e gli insiemi di misura armonica nulla. *Rend. Sem. Matem. e Fis. di Milano* (1965).

296 — **C. F. Manara** — Linguaggio comune e logica simbolica. Alcune osservazioni. *Period. di Matem.* (1965).

297 — **C. F. Manara** — Sulla introduzione del concetto di ordinamento di un insieme. *Period. di Matem.* (1965).

298 — **M. Dedò** — La prova scritta di matematica agli esami di maturità scientifica. *Period. di Matem.* (1965).

299 — **F. Graiff** — Sull'energia negli Universi chiusi. Nota I, II. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1966).

300 — **V. Zambelli** — Gli elementi di periodo infinito di un gruppo e le serie centrali. *Boll. U.M.I.* (1966).

301 — **G. Melzi** — Caratterizzazione integrale delle ipersfere in uno spazio Riemanniano a curvatura costante. *Rend. Ist. Lomb.* (1966).

302 — **G. Melzi** — Formule integrali relative a varietà differenziabili chiuse negli spazi euclidei. *Rend. Ist. Lomb.* (1966).

303 — **G. Melzi** — Applicazioni e conseguenze di alcune formule integrali relative a varietà differenziabili immerse. *Rend. Ist. Lomb.* (1966).

304 — **M. De Socio** — Ancora sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato non lineare. *Rend. Ist. Lomb.* (1966).

305 — **C. F. Manara** — Sul problema delle formule ben formate. *Period. di Matem.* (1966).

306 — **M. Dedò** — Divagazioni sul concetto di grandezza. *Period. di Matem.* (1966).

307 — **M. G. Bresciani** — Il tema di matematica assegnato all'esame di abilitazione. *Period. di Matem.* (1966).

M. Spoglianti — Il tema del concorso A VII. *Period. di Matem.* (1966).

S. Paganoni Marzegalli — Il tema del concorso A VI. *Period. di Matem.* (1966).

308 — **G. Melzi** — Una caratterizzazione del toro mediante integrali. *Riv. Mat. Univ. Parma.* (1965).

309 — **C. Marchionna Tibiletti** — Su alcuni operatori di chiusura di un reticolo completo ed in particolare del reticolo dei sottogruppi di un gruppo. *Rend. Sem. Matem. Univ. e Politec. di Torino.* (1965-66).

310 — **E. Udeschini Brinis** — Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana. Nota I, II. *Rend. Acc. Naz. Lincei.* (1966).

311 — **M. Pastori** — Visioni geometriche in meccanica analitica. *Rend. Sem. Matem. e Fis. di Milano.* (1966).

312 — **C. F. Manara - P. C. Nicola** — Sui poliedri convessi. *Atti e Memorie Acc. Naz. Sc., Let. e Arti di Modena.* (1966).

313 — **M. Cugiani - A. Liverani** — Un nuovo metodo per la generazione di numeri pseudo-casuali. *Atti Sem. Matem. e Fis. Univ. Modena.* (1966).

314 — **A. Liverani** — Considerazioni comparative di metodi per la generazione di sequenze di numeri "pseudo-casuali". *Atti Sem. Matem. e Fis. Univ. Modena.* (1966).

315 — **C. F. Manara** — La matematica nel pensiero galileiano. *Nel quarto centenario della nascita di Galileo Galilei.* (1966).

316 — **M. Dedò** — Invito alla matematica ricreativa. *Cultura e Scuola.* (1966).

317 — **M. Dedò - C. F. Manara** — Federigo Enriques. *Period. di Matem.* (1966).

318 — **L. Lunelli - L. Potenza Zauli** — Errori numerici nella risoluzione di sistemi lineari mediante metodi diretti. *Riv. Schede Perforate e Calcolo Elettronico.* (1966).

319 — **A. Marini - M. Lunelli - L. Potenza Zauli - M. Baroni Marcelletti - F. Fabiani - V. Galassi** — PRETAB, un linguaggio per elaborazioni su tabelle. *Atti IX Convegno Automazione e Strumentazione, Milano.* (1966).

320 — **M. Lunelli - M. Baroni Marcelletti** — Derivazione e semplificazione mediante elaboratori. *Atti IX Convegno Automazione e Strumentazione, Milano.* (1966).

(segue a pag. 2 della copertina)

263 — **F. Graiff** — Sull'uso di coordinate armoniche in relatività generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

264 — **G. Ricci** — Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

265 — **L. Cupello** — Sulle costanti delle condizioni di Hölder in forma integrale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

266 — **N. M. Ferlan** — Sul minimo modulo delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

267 — **F. Skof** — Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

268 — **E. Bombieri** — Sul problema di Bieberbach per le funzioni univalenti. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

269 — **M. Dedò** -- Sistemi di cerchi. *Period. di Matem.* (1963).

270 — **D. Roux** — Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. II. - Ordine ρ diverso dal reciproco di un intero naturale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

271 — **D. Roux** — Sul divario fra l'ordine e l'ordine inferiore delle funzioni intere. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

272 — **L. Cupello** — Sulla condizione di Hölder in forma integrale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

273 — **G. Ricci** — Il pensiero matematico, impronta latente nel mondo d'oggi. *Atti del VII Congresso Unione Matem. Ital., Genova* (1963).

274 — **G. Melzi** — Varietà topologiche plurifibrate e varietà differenziabili tre volte rigate. Note I, II. *Rend. Ist. Lomb.* (1964).

275 — **F. Skof** — Effetto dell'attenuazione delle condizioni tauberiane per le serie di potenze. *Ann. di Matem. pura ed appl.* (1964).

276 — **N. M. Ferlan** — Sull'andamento del minimo modulo delle funzioni analitiche. *Boll. U.M.I.* (1964).

277 — **V. Zambelli** — Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente. *Boll. U.M.I.* (1964).

278 — **C. F. Manara** — Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria. *Period. di Matem.* (1964).

279 — **C. F. Manara** — Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale. *Period. di Matem.* (1965).

280 — **C. Cercignani** — Sugli integrali impropri nel senso di Hadamard e su alcuni operatori ad essi collegati. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).

281 — **E. Bombieri** -- On the large sieve. *Ed. Tamburini, Milano* (1965).

281 bis — **E. Bombieri** — On the large sieve. *Mathematika* (1965).

282 — **M. Dedò** — Questioni diofantee in problemi di geometria elementare. *Period. di Matem.* (1965).

283 — **M. Dedò** — Esami di abilitazione e concorsi a cattedre. *Period. di Matem.* (1965).

284 — **M. Marchi** — Il tema di matematica assegnato agli esami di abilitazione. (Cl. XIII). *Period. di Matem.* (1964).
M. D'Aprile — Il tema di matematica assegnato all'esame di abilitazione. *Period. di Matem.* (1965).
P. G. Giudici — La prova scritta del concorso per i Licei. *Period. di Matem.* (1965).

285 — **Albertoni - Lunelli - Maggioni** — Metodi iterativi variazionali per i problemi ellittici nella teoria dei reattori nucleari. *Atti Sem. Matem. e Fis. dell'Univ. di Modena* (1965).

286 — **F. Skof - L. Tanzi Cattabianchi** — Variazioni di segno condizionate e presenza di un punto singolare su un arco. *Riv. Mat. Univ. Parma* (1964).

287 -- **M. Pastori** — Sull'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio per sistemi continui. *Atti del Simposio Intern. sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matem., Cagliari-Sassari* (1964).

288 — **E. Bombieri** — On functions which are regular and univalent in a half-plane. *Proc. London Math. Soc.* (1965).

289 — **F. Graiff** — Sui superpotenziali nella teoria della Relatività Generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).

(*segue a pag. 3 della copertina*)

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITÀ, VIA C. SALDINI 50, MILANO (ITALIA)

ACHILLEA - MILANO