Madonna con il Bambino *particolare dal* Secondo Trittico di Valle Castellana. *Ascoli Piceno, Pinacoteca Civica.*

"Costruire" la geometria

Carlo Felice Manara.
Professore Emerito di Geometria,
Università degli Studi di Milano

di Carlo Felice Manara

Lo sviluppo delle geometrie non euclidee ha portato a considerare la geometria non come una scienza definita da certi oggetti immaginari (ad esempio, lo "spazio"), ma come una costruzione razionale che rende coerenti i nostri comportamenti relativi agli oggetti materiali che manipoliamo e ai fenomeni energetici che osserviamo. Nelle opere fondamentali di Peano e Hilbert i postulati di una teoria non sono imposti da un'esperienza inoppugnabile accettata per la sua pretesa evidenza, ma sono soltanto suggeriti dall'esperienza. Il contributo decisivo di Riemann e il concetto di "gruppo di trasformazioni" di Klein

Penso non sia esagerato osservare che l'evoluzione scientifica riguardante la geometria abbia avuto una influenza notevole (forse non abbastanza messa in evidenza finora) sulla evoluzione della scienza modernamente intesa, e non soltanto sulla matematica o su un ramo di essa.
È noto che tale vicenda ha avuto una fase critica acuta nel secolo XIX, periodo in cui sono nate le cosiddette "geometrie non euclidee" ed in cui è stata ottenuta la dimostrazione della loro coerenza logica e quindi della loro validità teorica. Pare giusto osservare che questo fatto ha esercitato un'influenza profonda su tutta la matematica successiva, e sull'immagine che questa scienza ha di se stessa.
Tuttavia, anche dopo questa conferma (della coerenza della geometria non euclidea) ancora oggi vi sono coloro i quali domandano quale sia la geometria "vera"; ed altri che polemizzano contro la impostazione epistemologica di qualche teoria fisica (come la relatività), con il pretesto che questa introduce la geometria non euclidea dello "spazio fisico"; nel quale, a loro parere, soltanto la geometria euclidea tradizionale dovrebbe essere valida.
Occorre quindi impiegare un certo spazio per riflettere sulle conseguenze che la crisi geometrica del secolo XIX ha provocato nel concetto di teoria fisico-matematica e quindi in particolare nel concetto di geometria.
Queste riflessioni sono anche aiutate dalle varie crisi della modellistica fisica, che sono avvenute e si sono succedute negli ultimi decenni.
A questo proposito vale la pena di fare qualche osservazione, per dissipare alcuni equivoci; soprattutto quelli indotti dalla espressione (qui sopra messa tra virgolette) di "geometria dello spazio fisico".

La "verità" delle teorie scientifiche: il caso della fisica

Come ho detto poco sopra, proprio la fisica di questo nostro secolo ha mostrato la caducità del significato tradizionalmente attribuito volgarmente ai modelli fisico-matematici della realtà fisica: basti pensare alla crisi del modello classico di Bohr- Rutherford, al dualismo onda-corpuscolo, ai vari "principi" della meccanica quantistica.
Senza voler entrare nel merito della validità di queste impostazioni, mi pare di poter dire che il loro numero e la loro varietà dimostrano chiaramente la convinzione, da parte degli scienziati, della conoscibilità della realtà materiale fisica e della validità degli strumenti logici e simbolico-formali offerti dalla matematica alla fatica degli scienziati della Natura; d'altra parte mi pare anche che venga confermata l'opinione di chi (tra gli altri Henry Poincaré) pensa che non si debba parlare di "verità" in assoluto di una teoria fisico-matematica, ma soltanto della sua "adeguatezza" a rappresentare certi aspetti della realtà materiale, a collegarli logicamente tra loro ed a prevedere (entro certi limiti) i risultati delle nostre osservazioni, dei nostri esperimenti ed in generale delle nostre manipolazioni della materia.

Il caso della geometria

In questa luce non pare quindi valido il pensiero di chi crede che esista una "geometria dello spazio fisico"; intendendo indicare, con questa espressione, una dottrina certa, assoluta ed immutabile, fondata su osservazioni ed esperienze che hanno per oggetto appunto tale spazio. Vorrei infatti osservare che esso non è, e non può essere, oggetto di osservazioni o manipolazioni sperimentali, le quali sono sempre operate soltanto su oggetti materiali o su fenomeni energetici (raggi di luce o irraggiamenti termici o altri).
In questo argomento penso che valga la pena di riflettere su ciò che ha scritto Gino Fano: "I concetti geometrici, benché acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un triangolo (astratto), né affermare che nello spazio fisico sia verificata una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e di grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto

in modo più o meno approssimato. La geometria euclidea ci dà questa rappresentazione con una approssimazione ampiamente sufficiente per tutte le esigenze della pratica; la geometria iperbolica, per valori grandissimi della lunghezza k, cioè della costante che dà la curvatura dello spazio iperbolico (almeno 1000000 di volte l'asse maggiore dell'orbita terrestre), ce ne dà un'altra, anche sufficiente; ma la prima è più semplice e perciò preferibile" (1935).
Questa posizione concorda con quella della neurofisiologia: riporto qui, a titolo di esempio, l'opinione espressa recentemente da Roberto Caminiti (KOS, 125, 1996, pp. 42-45): "È quindi quantomeno scontato che non siamo in grado di percepire lo spazio in quanto tale.(...) Si crede quindi che la nostra capacità di percepire lo spazio risieda nell'analisi delle sensazioni spaziali, quelle che esistono tra le varie parti del nostro corpo, tra questo e le cose e gli eventi con cui interagiamo".
Se si accetta questa impostazione, appare chiaro che il parlare della geometria come di "scienza dello spazio" conduce chiaramente a situazioni contraddittorie e quindi insostenibili, quando si voglia salvare una sufficiente coerenza razionale. La cosa era già stata rilevata in modo ironico da Giuseppe Peano, il quale scrive: "In quasi tutti i trattati moderni (Peano scrive nel 1884) si introduce per primo il concetto di 'spazio', dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile, eccetera, proprietà queste parimenti non definite. Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di geometria nella lingua d'Euclide e d'Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine 'spazio', nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati".
Eppure si direbbe che la ricerca e la difesa di una "geometria dello spazio fisico" sia ancora tra le preoccupazioni di molti, che non intendono staccarsi dai fantasmi che l'immaginazione costruisce a partire dall'esperienza sensibile. Oppure trovano soddisfacenti e dotate di senso delle frasi come "la geometria è la scienza dello spazio" oppure "...la scienza dell'estensione" oppure anche "...della quantità estesa".
Probabilmente la concezione abituale che si ha del concetto di "spazio" fa anche riferimento alle celebri frasi che si leggono nei *Principia* di Isaac Newton. In un celebre Scolio, dopo aver parlato del tempo, che egli qualifica come "assoluto, vero, matematico," e di cui dice che "scorre uniformemente", Newton passa a parlare dello spazio, nel modo seguente: "Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile".
Newton poi parla dello "spazio relativo", dicendo che "esso è una dimensione mobile, o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile". In seguito Newton parla del "luogo" e dice: "Il luogo è la parte dello spazio occupata dal corpo, e, a seconda dello spazio, può essere assoluto o relativo...".
Sarebbe interessante analizzare questi enunciati, e determinare come e fino a qual punto essi siano fondati sull'immaginazione, e sull'elaborazione fantastica dei dati forniti dai nostri sensi e dall'esperienza materiale. Mi limito per ora ad osservare che, anche assegnando alle parole qui scritte da Newton un significato che le veda come definizioni apodittiche del tempo e dello spazio, non incontriamo, almeno a questo punto iniziale, alcuna affermazione che riguardi la geometria, ed in particolare che assegni un valore assoluto alla geometria euclidea, tradizionale a quel tempo. Forse la via per uscire da questa situazione imbarazzante può essere cercata osservando quale sia la procedura con cui vengono costruiti quegli oggetti mentali che sono i contenuti delle proposizioni della geometria classica abituale; quella che è stata fatta entrare in crisi dalla invenzione delle geometrie non-euclidee.
È noto che il concetto di "punto" è oggetto della prima celebre proposizione degli "Elementi" di Euclide, la quale, secondo una classica traduzione (forse non completamente soddisfacente) suona: "Punto è ciò che non ha parti" (Frajese e Maccioni, 1970). Ho detto che la traduzione abituale della frase di Euclide non è forse completamente soddisfacente: infatti con il termine "punto" viene tradotto il termine greco "semeion", il quale ha anche significato di "segno". Si potrebbe forse dire che la traduzione abituale e tradizionale ha in qualche modo ispirato e giustificato le frasi che si incontrano spesso nella trattatistica, frasi con le quali gli autori invitano il lettore ad immaginare corpiccioli sempre più piccoli, allo scopo di giungere per conto proprio all'immagine del punto geometrico. Ma quando si immagina un corpicciolo, per quanto piccolo esso sia, appare naturale immaginare che esso abbia delle parti, mentre forse il termine "segno" potrebbe aiutare a superare questo ostacolo, perché mi pare di poter dire che tale termine per sua stessa natura individua qualche cosa di indivisibile, che non ha parti.
Ma non intendo proseguire qui in questa discussione terminologica, che rischia di non condurre mai a risultati precisi e definitivi; mi limito quindi a ricordare che Giuseppe Peano (1884), nel costruire degli assiomi per la geometria, scelse la frase: "Si può segnare un punto", evitando così di dare una esistenza ad una specie di ipostasi non necessaria.
Considerazioni analoghe si potrebbero formulare a proposito delle altre frasi, che si incontrano nell'opera di Euclide e che vennero spesso considerate come delle definizioni (nel senso logico del termine) delle figure elementari della geometria: per esempio la frase che parla della retta e che suona press'a poco: "Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa" (Frajese e Maccioni, 1970).
Queste ed altre frasi hanno provocato discussioni secolari; si direbbe che ancora oggi sono accettate da chi si ritiene soddisfatto da un certo verbalismo che non sempre ha riferimento preciso ad un contesto operativo. Anticipiamo qui che l'atteggiamento moderno è molto diverso; e questo cambiamento ci pare provocato in gran parte anche dalla crisi della geometria del secolo XIX; il che giustifica le riflessioni che stiamo facendo.
Ritorneremo in seguito a presentare la situazione dello "status" epistemologico della geometria, come è stato prodotto e provocato dagli ultimi secoli di critica sui fondamenti

della matematica. Ci interessa qui osservare che la posizione tradizionale, quale si evince dall'opera di Euclide e dalla interpretazione che ne è stata data per secoli, e che ha fondato la sua autorità ed anche certe mentalità, conservate ancora oggi, è quella di una dottrina che studia certi oggetti, e che ne rileva certe proprietà giudicate evidenti e dimostra le altre, che sono meno evidenti ed appariscenti. Ho già parlato delle pretese definizioni della geometria come "scienza dello spazio" o anche "scienza dell'estensione" o anche "scienza della quantità estesa" *et similia*.
Non interessa qui ritornare su queste frasi, ma soltanto osservare che esse rivelano un atteggiamento, ancora oggi diffuso; precisamente l'atteggiamento di chi vorrebbe presentare la geometria come una dottrina qualificata da certi oggetti, la cui menzione qualifica la dottrina stessa, entrando addirittura nella sua definizione; così come, per esempio, qualcuno potrebbe definire la biologia attraverso l'oggetto di studio, e quindi come "scienza dell'essere vivente". L'invenzione di dottrine diverse da quelle tradizionali, ed addirittura contraddittorie ad esse, ha messo ovviamente in crisi una concezione cosiffatta: soprattutto quando vari matematici del secolo scorso giunsero, per diverse vie, a dimostrare che tali dottrine non sono dei mostri logici, ma anzi posseggono una intrinseca coerenza che le mette logicamente alla pari con la geometria classica.
La difficoltà concettuale appare evidente, in questo ordine di idee: infatti se la geometria, secondo la concezione abituale, è qualificata dai suoi contenuti, dai suoi oggetti, da quel "qualche cosa" che essa studia, questi oggetti sarebbero il fondamento della sua coerenza intrinseca, e non potrebbero essere teorizzati da teorie contraddittorie. Così, quando si legge che in geometria euclidea vi è un'unica parallela ad una retta data per un punto dato, fuori di essa; e che in geometria iperbolica ve ne sono due, e che entrambe le geometrie sono valide, l'impressione di disagio è spontanea.

Particolare di San Sebastiano *dal* Secondo Trittico di Valle Castellana, *Ascoli Piceno, Pinacoteca Civica.*

Appare quindi urgente precisare quale sia la natura ed il significato di quelli che vengono considerati "oggetti" della geometria, e quale sia il significato e la portata dei termini che li evocano e delle proposizioni che parlano di loro. Ed appare particolarmente interessante il fatto che alcune classiche constatazioni della compatibilità logica delle geometrie non euclidee siano state ottenute costruendo dei "modelli" in ambiente euclideo. In altre parole si potrebbe dire che la stessa geometria euclidea ha fornito gli strumenti per garantire la coerenza logica delle geometrie non euclidee. Cioè, parlando in forma pittoresca e paradossale, la stessa geometria euclidea può fornire gli strumenti che la distruggono; o, meglio, distruggono la sua immagine di scienza di valore unico ed assoluto.

Particolare da La Madonna di Poggio di Bretta, *Ascoli Piceno, Museo Diocesano.*

L'esperienza e l'elaborazione delle immagini

Forse la procedura per avviare a soluzione le contraddizioni rilevate e le conseguenti sensazioni di disagio può essere realizzata con due riflessioni distinte: la prima che contempla la costruzione degli oggetti della geometria ed il compito della elaborazione fantastica in questa operazione; la seconda che riguarda la definizione dei concetti della geometria.
Mi pare che l'esperienza comune insegni a dire che la geometria non parla direttamente degli oggetti sensibili (oggetti materiali o fenomeni di trasmissione di energia), ma che prenda in considerazione degli oggetti che già sono per così dire scarnificati, ridotti allo scheletro, resi trasparenti dalla elaborazione dovuta alla fantasia; tale penso che sia il significato di certe esortazioni di cui ho detto e che si leggono talvolta nei manuali, quando si dice al lettore di immaginarsi degli oggetti via via più piccoli (granelli di sabbia e così via) per poter giungere "al limite" a farsi una immagine di quell'oggetto che il trattatista finisce col chiamare "punto geometrico". Cose analoghe penso si possano dire in relazione alle frasi che invitano ad immaginare un filo teso sempre più sottile per farsi un'immagine del segmento rettilineo. Ciò forse per superare le difficoltà presentate dalla nota frase euclidea, secondo la quale la linea sarebbe "una lunghezza senza larghezza" (Frajese e Maccioni, 1970).
Su queste immagini si costruiscono i concetti, espressi dai termini linguistici e collegati dalle proposizioni e dalle deduzioni. Già Platone[1] aveva osservato che non le figure (nel senso di disegni), ma *i* concetti sono gli oggetti di cui parla il matematico . Ed a questo punto si incontra necessariamente la questione della definizione logica dei concetti; questione che, come si è detto, ha provocato una svolta cruciale nella concezione della matematica.

I concetti primitivi e le definizioni implicite

Sulla costruzione di una scienza perfettamente coerente in ogni sua parte, ed inconfutabile aveva già meditato Blaise Pascal, il quale affronta esplicitamente l'argomento nella sua opera dedicata allo spirito matematico. Qui il genio francese enuncia le condizioni necessarie perché un ragionamento sia inattaccabile: definire tutto, in modo che si possa sostituire la definizione ad ogni termine nominato; e per verificare la validità di un ragionamento, sostituire ad ogni termine la sua definizione. Ma Pascal osserva anche che non è possibile andare all'infinito con questa procedura: occorre arrestarsi a certi termini il cui significato è supposto noto ed è accettato. Da questa constatazione Pascal trae la conclusione che a noi uomini è impossibile raggiungere una scienza perfetta.
La conclusione alla quale è giunto Pascal è oggi adottata senza discussione dalla moderna teoria dei fondamenti della matematica: infatti oggi si accetta che la definizione dei termini fondamentali di una teoria può essere data con quella che viene chiamata "definizione implicita" oppure anche "definizione d'uso" o anche "definizione per postulati" o infine "definizione per assiomi".
Si potrebbe dire che in questo senso la strada è stata aperta da Peano, con la celebre memoria sui fondamenti dell'aritmetica che egli scrisse nel 1889. In questa memoria Peano non scrive alcuna frase che assomigli alla definizione del numero, per intenderci una frase come " Il numero è ...". Peano invece enuncia cinque proposizioni senza dimostrarle, proposizioni che ancora oggi sono correntemente citate e ricordate come "Assiomi di Peano".
Analogamente David Hilbert, nella sua classica opera sui fondamenti della geometria, non definisce il "quid rei" degli oggetti della geometria, ma incomincia parlando di questi:

per esempio la frase iniziale dell'opera suona: "Erklärung: Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten System nennen wir 'Punkte' und bezeichnen sie mit A, B, C ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir 'Geraden' eccetera" (1930).

Pare chiaro che in queste impostazioni i postulati (o assiomi che dir si voglia) di una teoria non sono considerati come imposti da una esperienza inoppugnabile, ed accettata in forza di una pretesa evidenza, ma sono soltanto suggeriti dalla esperienza.

Un'analisi di questo tipo appare necessaria anche in base ai dati della storia della matematica. Infatti questa insegna che, durante circa venti secoli, si sono succeduti molti tentativi di "dimostrazione" del celebre quinto postulato di Euclide; precisamente quello da cui si conclude, in sostanza, l'unicità della parallela ad una data retta da un punto fuori di essa. Dal che nasce il legittimo dubbio che, almeno con riferimento a questa proposizione, la forza di quella "immediata evidenza" di cui qualcuno parla non fosse considerata molto grande; o almeno non uguale a quella attribuita agli altri postulati enunciati pure da Euclide.

L'opera di Riemann

Nella questione dei fondamenti della geometria si verificò una svolta radicale a seguito dell'opera del matematico tedesco Christian Bernhard Riemann. Il pensiero di questo grande fu poi sviluppato anche da ricercatori di scuola italiana, tra i quali vorrei ricordare in modo particolare Tullio Levi Civita, al quale si deve per esempio il concetto di "parallelismo secondo Levi Civita"; concetto di quel "Calcolo differenziale assoluto" che fu lo strumento formale del quale Einstein si servì per formulare la teoria della Relatività generale. Un'idea molto rudimentale ed approssimata della impostazione del tutto nuova che Riemann diede dei fondamenti della geometria si potrebbe dare dicendo che in questo ordine di idee la geometria viene costruita anzitutto nelle vicinanze immediate di un punto; la geometria della regione immediatamente vicina ad un punto viene poi collegata con opportune regole a quelle delle regioni vicine ad altri punti. Di modo che queste leggi di connessione costruiscono la dottrina generale che riguarda ogni punto. Tali leggi di connessione permettono di costruire anche la geometria euclidea classica, come caso particolare; ma permettono di costruire anche ogni geometria che possa servire per rendere razionali e coerenti le nostre esperienze relative agli oggetti che noi manipoliamo ed ai fenomeni energetici che noi provochiamo o che osserviamo.

Il concetto di "gruppo di trasformazioni" e le idee di Klein

Nelle righe che precedono ho impiegato varie volte l'espressione "costruire la geometria". Questo atteggiamento è fondato sugli sviluppi che ho cercato di esporre nelle pagine precedenti, e che conduce a considerare la geometria non come una dottrina precisata da certi oggetti immaginari (in particolare lo "spazio" di cui abbiamo detto), ma come una dottrina che rende razionali e coerenti i nostri comportamenti nei riguardi degli oggetti materiali che manipoliamo e dei fenomeni energetici che osserviamo. Un episodio in certo modo sintomatico e cruciale, che segna quel cambiamento di punto di vista che sto presentando, è costituito dalla pubblicazione della celebre dissertazione programmatica che Felix Klein espose nel 1872 all'inizio dei suoi corsi presso l'Università di Erlangen; dissertazione che viene spesso richiamata con l'espressione "Programma di Erlangen".

Ivi il matematico tedesco stabilisce una specie di classificazione delle varie ricerche di geometria esistenti all'epoca; tale classificazione è ottenuta ricorrendo al concetto di "gruppo"; questo appartiene all'algebra e viene preso in considerazione da Klein sotto l'aspetto particolare di "gruppo di trasformazioni". Con l'impiego di questo concetto Klein giunge a precisare che gli oggetti di cui si occupa il geometra sono le proprietà invarianti delle figure di fronte alle trasformazioni di un certo gruppo; ciò in certo modo realizza l'operazione logica di astrazione e generalizzazione che fonda la conoscenza scientifica. In particolare quindi, per esempio, la geometria euclidea tradizionale è così caratterizzata dal gruppo dei movimenti rigidi e delle similitudini, così come la geometria proiettiva viene caratterizzata da un diverso gruppo di trasformazioni.

Sarebbe interessante cercare di valutare l'importanza che queste idee possono aver avuto per lo sviluppo di certe teorie fisiche, in particolare della relatività (speciale e generale); qui mi limito ad osservare che questa impostazione non costituisce in alcun modo la eventuale giustificazione di un totale relativismo e soggettivismo nella geometria, ed in generale nella scienza. Infatti tutti questi sviluppi non sopprimono il fatto fondamentale che l'esperienza sia il punto di partenza delle teorie geometriche, e sia anche il tribunale di ultima istanza che giudica della loro adeguatezza e capacità conoscitiva.

Pertanto queste teorie ci fanno fare un passo essenziale verso la conquista di una razionalità rigorosa e coerente, che è indipendente dai tranelli dell'immaginazione, pur non rinnegando in nulla la validità dei suoi apporti. ●

Note

1. "I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini..." Platone, *Repubblica*, (510 d,e).

Bibliografia

Caminiti R., "Lo spazio come costrutto mentale", in KOS, n. 125, (febbraio 1996): 42-45.

Fano G., 1935, *Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna.

Facciamo riferimento all'opera di Frajese A. e Maccioni L. (eds), 1970, *Gli elementi di Euclide*, Torino, Utet.

Hilbert D., 1930, *Grundlagen der Geometrie*, 7, Berlin, Auflage. Leipzig.

Klein C.F., 1872, *Vergleichende Betrachtungen Äber neuere geometrische Forschungen*.

Newton I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Pascal B., *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*.

Peano G., 1884, *Sui fondamenti della geometria*, Rivista di matematica, vol. IV.

Peano G., 1889, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Augusta Taurinorum.

Riemann C.B., *Ueber die Hypothese welche zu grunde der Geometrie liegen*.