Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Dicembre 1943 - Serie IV, vol. XXIII, nn. 3-4-5 (pagg. 73-84)

CARLO FELICE MANARA

IL PARALLELISMO DI LEVI-CIVITA

NEL PIANO IPERBOLICO

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886 fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918.

Il *Periodico* pubblica sopratutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il terzo, quarto e quinto numero (dicembre 1943) della ventitreesima annata consta di 64 pagine e contiene, oltre le Recensioni, Note bibliografiche e le Questioni, **i seguenti articoli:**

L. CONTE - *A proposito del metodo di Eulero per la risoluzione dell'equazione biquadratica.*

C. F. MANARA - *Il parallelismo di Levi-Civita nel piano iperbolico.*

A. GANDINI - *Una notevole applicazione del Teorema di Tolomeo.*

L. TENCA - *Progressioni aritmetiche contenute in una data progressione aritmetica.*

Abbonamento annuo: Italia L. 25 — - Estero L. 50 —.
Il *Periodico* si pubblica in CINQUE fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli.

Le annate complete 1921, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 e 42 dell'attuale serie del

PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita complessivamente al prezzo di L. 660.

Non si vendono separatamente le prime tre annate.

Le annate dal 1924 al 1940 costano L. 30 ciascuna.

Esistono fascicoli separati dei 17 volumi, a prezzi da convenirsi.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Dicembre 1943 - Serie IV. vol. XXIII. nn. 3-4-5 (pagg. 73-84)

§ 1. - Parallelismo di Levi-Civita. Concetto di connessione.

In questo articolo ci proponiamo di illustrare alcuni concetti fondamentali della Geometria Differenziale sul modello proiettivo del piano iperbolico. È noto che tale modello si ottiene prendendo come immagine del piano i punti interni ad una conica reale; costruzioni di carattere elementare ci permetteranno di verificare con molta facilità e rendere evidenti le proprietà delle superficie a curvatura costante negativa, fornendo di tali superficie una immagine che per semplicità è degna di stare accanto a quella elementarissima data dalla sfera per le superficie a curvatura costante positiva.

È noto che esiste tutto un insieme di proprietà di una superficie S (le cosiddette proprietà intrinseche) che si conoscono quando di S sia assegnato soltanto il quadrato ds^2 della distanza tra due punti infinitamente vicini, o, come suol dirsi, la metrica. Tali proprietà, per es. la lunghezza di un arco di curva tracciata su S, l'angolo di due tali curve, l'area di una figura ecc. si conservano quando S, pensata realizzata da un velo perfettamente flessibile ed inestendibile, sia sottoposta ad una qualunque flessione, senza duplicature nè lacerazioni; in altre parole tali proprietà sono comuni alla S ed a tutte le superficie applicabili su di essa.

Ora la conoscenza del ds^2 di una superficie S implica due cose: 1ª) la possibilità di istituire una geometria nell'intorno di ciascun punto P di S; 2ª) la possibilità di confrontare tra loro le geometrie dei diversi intorni. In altre parole, quando si immagini S realizzata da faccette infinitesime ottenute sostituendo, nei singoli punti, ad S il suo piano tangente, la conoscenza del ds^2 implica la conoscenza della geometria sulle singole faccette e della legge di raccordo o, come suol dirsi di connessione, delle varie faccette tra loro.

Ma poichè la conoscenza del ds^2 permette di misurare, nell'intorno di ogni punto P di S, lunghezze, angoli ed aree (cfr. BIANCHI: *Geometria Differenziale*, vol. I, §§ 44–45), occorrerà soltanto ulteriormente confrontare le varie direzioni che escono dai punti di S e stanno nei piani tangenti ad S stessa; cioè occorrerà realizzare una connessione o un trasporto delle direzioni. Tale trasporto si realizza mediante la legge di parallelismo vincolato di LEVI-CIVITA che permette di far corrispondere ad una direzione per un punto P_1 un'altra per un punto P_2 da dirsi sua parallela ed ecco come: si osservi anzitutto che una direzione tangente ad S in un suo punto P può ritenersi assegnata da un vettore per P giacente nel piano tangente ad S in P. Dati ora i due punti P_1 e P_2 si consideri una qualunque linea l che unisce P_1 con P_2 e la superficie sviluppabile Σ generata dai piani tangenti ad S nei punti di l; due vettori tangenti ad S in P_1 e P_2 saranno detti paralleli, rispetto alla linea l, quando risultino paralleli nel solito senso euclideo i vettori trasformati di essi che si ottengono sviluppando la Σ su di un piano. (LEVI-CIVITA: *Calcolo differenziale assoluto*, cap. V, § 10).

La definizione dipende essenzialmente dalla linea l scelta ad è quindi arbitraria in alto grado. Tale arbitrarietà cessa però immediatamente se si conviene che la linea l sia una geodetica di S. Come è noto le geodetiche sono le linee che realizzano il minimo cammino tra due punti abbastanza vicini sulla superficie e sono univocamente determinate dai punti stessi oppure dalla condizione di passare per un punto P e di essere ivi tangenti ad una direzione assegnata. Tali proprietà sono di carattere intrinseco e si dimostrano quindi dipendere dal solo ds^2 di S.

Se si sceglie quindi per linea congiungente P_1 e P_2 la geodetica g da essi determinata, la g sarà geodetica anche della sviluppabile Σ_g dei piani tangenti ad S lungo g stessa (LEVI-CIVITA: op. cit., cap. V, § 11) e quindi, quando Σ_g sia sviluppata in un piano, la g diventa geodetica del piano stesso, cioè una retta, ed i due vettori, diventando paralleli, vengono a formare angoli uguali con la retta che unisce i due punti P_1' e P_2', trasformati di P_1 e P_2 per lo sviluppo di Σ_g.

Deduciamo di qui un nuovo modo per definire il parallelismo di LEVI-CIVITA, in quanto due vettori in due punti P_1 e P_2 risultano paralleli quando formano angoli uguali con la geodetica g che unisce P_1 a P_2. Si deduce di qui in particolare che il trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA conserva gli angoli e che le geodetiche risultano linee autoparallele, così come le rette del piano. Per queste e per altre proprietà le geodetiche delle superficie o in generale degli spazii non lineari ad n dimensioni vengono a comportarsi come le rette degli spazii lineari, tanto che viene chiamata *Geometria proiettiva* di tali varietà la dottrina che studia le trasformazioni delle varietà stesse che conservano le geodetiche, così come le trasformazioni lineari degli spazii lineari conservano le rette. (Cfr. per es., E. BORTOLOTTI: *Spazii a connessione proiettiva*-Introduzione).

Un'analisi più approfondita permette di concludere che la proprietà fondamentale delle geodetiche, che dà loro l'importanza che hanno nella definizione di trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA, non è quella di render minimo il cammino tra due punti P_1 e P_2 abbastanza vicini, ma di essere univocamente determinata dal passaggio per essi.

Dal trasporto di una direzione da un punto P_1 ad un altro P_2 a distanza finita da esso si passa facilmente al trasporto tra due punti infinitamente vicini; poichè l'archetto infinitesimo che li unisce è univocamente determinato da essi (a meno, s'intende sempre, di infinitesimi di ordine superiore) il trasporto ha un senso ben determinato, senza che sia necessario scegliere una particolare linea per unire i due punti. Da quest'ultimo caso si risale poi facilmente al trasporto lungo una linea qualunque pensando effettuati gli infiniti trasporti lungo gli archetti elementari che la costituiscono.

§ II. - Curvatura delle superficie.

In un punto P di una superficie S esistono infinite sezioni normali, ottenute intersecando S coi piani del fascio che ha per sostegno la normale ad S in P. Tra le infinite sezioni normali in P ne esiste una di curvatura massima ed una di curvatura minima ed il prodotto di queste due curvatura dà una grandezza che vien chiamata curvatura totale o gaussiana di S in P; contrariamente a quanto potrebbe apparire dalla definizione che ne abbiamo data, essa è una proprietà intrinseca di S, cioè è conosciuta quando sia assegnato solamente il ds^2 di S.

Particolarmente interessanti dal nostro punto di vista sono le superficie a curvatura costante. Tra queste il piano e tutte le superficie su di esso applicabili (cilindro, cono, sviluppabili) costituiscono la classe di quelle a curvatura nulla, la sfera e le superficie su di essa applicabili costituiscono la classe di quelle a curvatura costante positiva, mentre la classe delle superficie a curvatura costante negativa è costituita dalla pseudosfera e superficie applicabili su di essa. Per le superficie a curvatura costante e non nulla si verifica il fatto che la somma degli angoli di un triangolo geodetico (cioè di un triangolo i cui lati sono archi di geodetica) non vale due retti, come avviene per le superficie della classe del piano, ma è maggiore o minore di due retti a seconda che la curvatura della superficie è positiva o negativa. Il fatto è già noto per la sfera; anzi la geometria elementare insegna di più che non solo ogni triangolo possiede un eccesso sferico, ma che tale eccesso è direttamente proporzionale all'area del triangolo stesso perchè a triangoli uguali corrispondono eccessi uguali, e ad un triangolo somma di due corrisponde un eccesso somma degli eccessi degli addendi. Si è infatti condotti a scrivere che l'eccesso sferico ε è una funzione f dell'area a soddisfacente all'equazione funzionale $f(a+a') = f(a) + f(a')$ e tale equazione, sotto opportune ipotesi relative alla f che si dimostrano soddisfatte nel caso in esame, ammette la sola soluzione $f(a) = ka$ con k costante.

Queste proprietà si verificano in generale per le superficie a curvatura costante: dato un triangolo geodetico e detta Ω la somma dei suoi angoli, il rapporto tra $\Omega - 2\pi$ e l'area uguaglia in valore assoluto e segno, la curvatura della superficie.

Per le superficie a curvatura costante non nulla si verifica un'altro fatto per noi interessante che le distingue dal piano: se è data una direzione in un punto P e, a partire da P la si trasporta per parallelismo lungo una linea chiusa, al ritorno in P non si ritrova più la direzione di partenza e l'angolo di cui la direzione con cui si arriva è ruotata rispetto a quella di partenza è proporzionale all'area del ciclo descritto, la costante di proporzionalità essendo la curvatura della superficie.

Quindi se il ciclo lungo il quale si effettua il trasporto è un triangolo od in generale un poligono geodetico, l'angolo di cui risulta ruotata la direzione di arrivo rispetto a quella di partenza uguaglia, in valore assoluto ed in segno, la differenza tra la somma degli angoli del poligono e la somma degli angoli del poligono piano avente lo stesso numero di lati.

Queste proprietà di Geometria differenziale delle superficie noi illustremo ora, con semplici costruzioni proiettive su un noto modello piano del piano della geometria iperbolica di Lobatschesky e Bolyai, che ci apparirà come possedente le proprietà di una superficie a curvatura costante negativa.

§ III. - Il modello proiettivo del piano iperbolico.

È noto (cfr. per. es. Fano: *Geometria non euclidea*; Klein: *Vorlesungen über Nicht-euclidischen Geometrie*) che il piano della geometria iperbolica può essere rappresentato dal seguente modello: si assuma nel piano proiettivo α una conica k reale che per semplicità supporremo tutta al finito, anzi addirittura un cerchio; si chiamino « punti » i punti di α interni alla conica k, « rette » le corde di k; l'insieme dei « punti » e delle « rette » costituirà il « piano ». Per i nostri enti « punti » e « rette » si verifica che due « punti » determinano una ed una sola « retta » loro congiungente, ed invece, data una « retta » r, ossia una corda MN di k (fig. 1) ed un « punto » P ad essa non appartenente, per P passano « rette secanti » e « rette non secanti », ossia corde di k come RS che intersecano MN in punti interni a k e corde come TU che la intersecano in punti esterni; « rette secanti e non secanti » sono separate dalle due « rette » PM e PN da dirsi « parallele » per P alla MN nei due versi opposti. Per evitare confusione col parallelismo di Levi-Civita definito sopra, riserveremo il nome

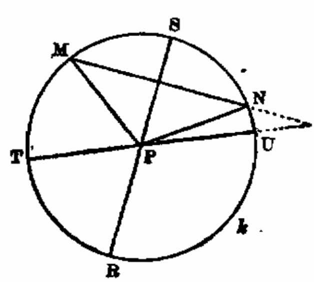

Fig. 1.

di « parallele » alle « rette » come PN e PM ultimamente definite, chiamando, secondo l'uso « equipollenti » due vettori ottenuti l'uno dall'altro per parallelismo di LEVI-CIVITA (che presto definiremo per il nostro « piano »), ed « equipollenza » la relazione che tra loro intercede.

Osserviamo ora che il nostro « piano » ammette un gruppo ∞^3 di trasformazioni in sè oloedricamente isomorfo col gruppo delle congruenze del piano euclideo, ed è il gruppo delle proiettività di α che mutano k in sè, gruppo che potremo d'ora in poi chiamare semplicemente dei « movimenti ».

Noi possediamo così un criterio per decidere quando due figure sono da dirsi « uguali » e questo criterio sarà ovviamente la possibilità di portarle a sovrapporsi mediante un « movimento ». Così per es. dato un segmento AB su una corda MN di k ed un secondo segmento $A'B'$ su una seconda corda $M'N'$ diremo $AB = A'B'$ se i due birapporti $(MNAB)$ ed $(M'N'A'B')$ sono uguali perchè questa è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza (almeno) di una proiettività trasformante k in sè e portante la quaterna $(MNAB)$ in $(M'N'A'B')$. Il ragionamento duale vale perfettamente per gli angoli formati da due coppie di « rette » ab e $a'b'$ in due « punti » P e P'; soltanto qui si avverta che essendo P e P' interni a k, non si possono più considerare le tangenti reali mandate a k da P e da P'; ma si potrà evidentemente sempre parlare di involuzione di rette coniugate rispetto a k per P e P', involuzione ellittica che notoriamente definisce la coppia di tangenti immaginarie coniugate a K.

Tra i « movimenti » del « piano » ricorderemo particolarmente i « ribaltamenti » attorno ad una « retta » r, o « simmetrie speculari di asse r ». Tali « ribaltamenti » sono realizzati mediante omologie armoniche mutanti k in sè e di asse r e quindi aventi come centro il polo R di r (fig. 2) e ci permetteranno di definire le « rette perpendicolari » ad r come le rette unite del ribaltamento di asse r; esse sono date quindi da tutte le rette per il polo R di r e sono tra loro non secanti. In conclusione « rette perpendicolari » sono realizzate da rette coniugate rispetto a k. Di più i ribaltamenti ci permettono di costruire facilmente il punto medio H di un segmento AB e la bisettrice h dell'angolo di due « rette » a b

per H, come le costruzioni della fig. 3 mostrano senza bisogno di commento.

Siamo ora in grado di assegnare le costruzioni che realizzano il trasporto per « equipollenza » nel nostro « piano »; infatti dati due « punti » P e P' esiste una linea che è univocamente determinata da essi ed è la « retta » che li congiunge. Si verifica facilmente che la « retta » è proprio la geodetica congiungente P con P', perchè realizza il minimo percorso tra i due punti, essendo minore di qualunque altra

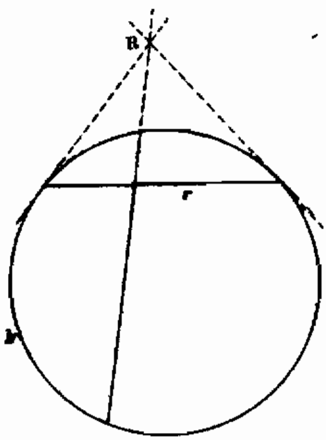

Fig. 2.

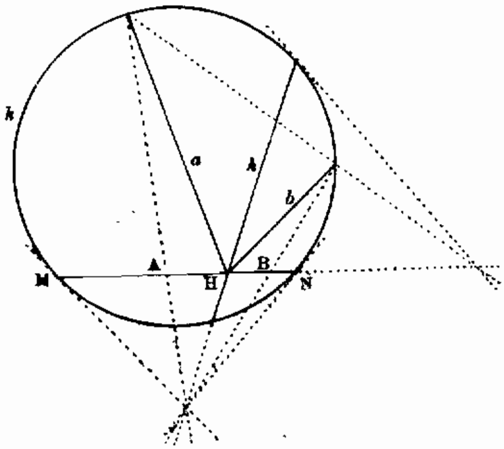

Fig. 3.

spezzata, e quindi di qualunque curva regolare, che abbia gli stessi estremi. Valgono infatti per il nostro « piano » tutti i teoremi indipendenti dal V postulato di EUCLIDE (unicità della parallela) ed in particolare quindi il teorema che afferma essere un lato di un triangolo minore della somma degli altri due, da cui segue immediatamente, come è noto, la proprietà di minimo posseduta dal segmento congiungente due punti. Diciamo MN i punti in cui la PP' interseca k ed O il polo di r rispetto a k (v. fig. 4); congiungiamo P con O e sia A una delle intersezioni di k con la PO (« perpendicolare » ad r in P); congiungiamo anche P' con O e delle due intersezioni di K con la $P'O$ diciamo A' quella che sta sul segmento determinato da MN su k che contiene A. Allora il nostro « movimento », che potremo chiamare una « traslazione » t in cui la « retta » PP' scorre su sè stessa, è dato dalla omografia subordinante su k la proiettività che porta M, N, A in M, N, A'. Tale proiettività si costruisce subito badando che MN è l'asse di collineazione. Sia PQ il segmento che si vuol trasportare e diciamo B l'intersezione di PQ con k che sta sul segmento $MAA'N$ di k stessa; allora AB' ed $A'B$ dovranno incontrarsi sull'asse di collineazione e quindi $P'B'$ ci fornirà la direzione del vettore trasformato. Per trovare Q' basterà congiungere

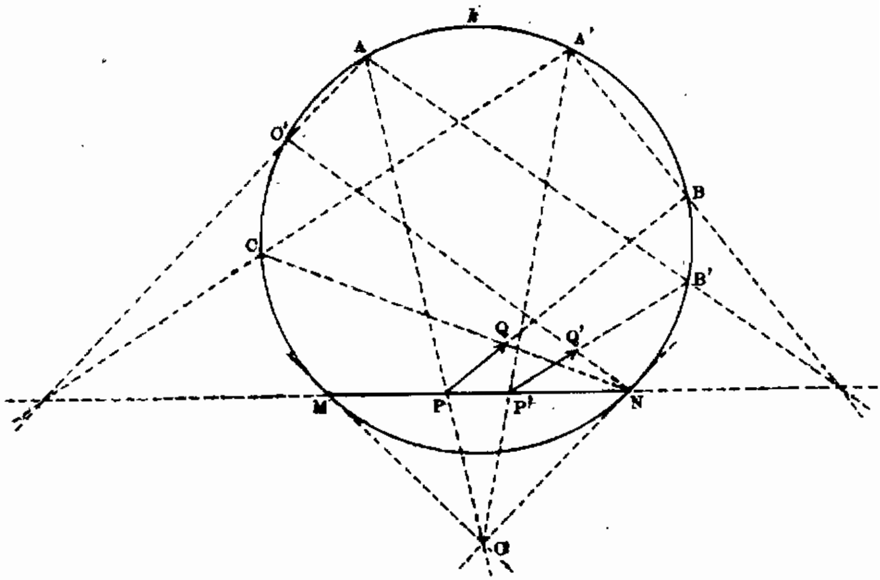

Fig. 1.

per es. Q con N e trovare il corrispondente del punto C intersezione di QN con K. Abbiamo avvertito esplicitamente che A' deve stare in quello dei due segmenti in cui k è divisa da MN in cui giace A. Se avessimo preso per A' l'altro punto in cui $P'O$ interseca k non avremmo ottenuto la « traslazione » t ma il prodotto di t per il « ribaltamento » di asse r, cioè avremmo ottenuto il « simmetrico » di $P'Q'$ rispetto ad r.

§ IV. - **Uguaglianza ed equivalenza.**

Prima di trattare dei criterii di uguaglianza dei triangoli, ricordiamo che se un punto P ed una retta p sono polo e polare rispetto a k, l'involuzione delle rette coniugate per P si ottiene proiettando l'involuzione dei punti coniugati su p e viceversa. In particolare le tangenti a k per P si otterranno proiettando i punti MN intersezioni di p con k. Detti AB due punti di p ed a, b le rette che li proiettano da P i birapporti $MNAB$ ed $(mnab)$ saranno uguali. Nel caso in cui P sia interno a k saranno immaginarii coniugati i punti MN come le tangenti mn, e la retta polare p di P sarà formata di punti esterni a k, cioè di punti per noi non reali, che chiameremo secondo l'uso punti « ideali ».

Ora se sono date due coppie di rette ab ed $a'b'$ per due punti P e P' e gli angoli ab ed $a'b'$ sono uguali, ogni movimento che porti ab su $a'b'$ porterà anche la polare di P su quella di P' ed i segmenti « ideali » AB ed AB' uno sull'altro, e viceversa.

Queste osservazioni ci serviranno subito per determinare i criterii di uguaglianza dei triangoli sul nostro « piano ». Come abbiamo già avvertito valgono su di esso tutte le proposizioni di geometria euclidea che non dipendano dal postulato V di EUCLIDE; in particolare valgono quindi i criterii di uguaglianza tra i triangoli della geometria elementare ed i teoremi che ne conseguono. Ma, analogamente a quanto succede per la sfera, vale anche un quarto criterio di uguaglianza che afferma l'uguaglianza di due triangoli di cui siano uguali gli angoli corrispondenti. Basta pensare che accanto ad ogni triangolo ABC esiste anche un trilatero polare « ideale » abc formato dalle polari dei « punti » ABC esterne a k e che, per l'osservazione che abbiamo fatta, il IV criterio sul triangolo ABC si riduce al III (uguaglianza dei lati corrispondenti) per il trilatero polare « ideale ». Deduciamo quindi la conseguenza importantissima che sul nostro « piano », analogamente a quanto succede sulla sfera, non esistono trasformazioni per similitudine, in quanto due triangoli (e quindi anche due poligoni qualunque) che hanno angoli uguali sono sempre sovrapponibili. Siamo di qui portati a pensare che esista uno stretto legame tra gli angoli di un poligono e la sua area, legame che vedremo immediatamente più davvicino.

Anzitutto definiamo, anche sul nostro « piano », « equivalenti » due figure che siano scomponibili nello stesso numero di parti a due a due uguali. Consideriamo ora un triangolo ABC; fissato sul « piano » un senso positivo di rotazione, per es.: il solito senso antiorario, al triangolo ABC potremo attribuire un segno, a seconda che il perimetro, percorso nell'ordine scritto ABC risulti sul « piano » percorso in senso concorde o discorde a quello fissato come positivo. Mandando la « perpendicolare » AH da A al lato opposto (v. fig. 5) otteniamo due triangoli ABH ed AHC tali che ABC è la loro somma; i due triangoli sono rettangoli in H e potremo limitarci a studiarne uno, per es., ABH.

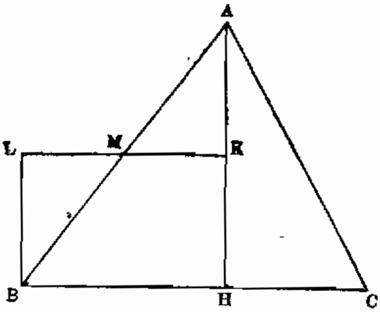

Fig. 5.

Cerchiamo di calcolare la somma degli angoli di quest'ultimo; dal punto medio M di AB mandiamo la « perpendicolare » MK ad AH e da B la « perpendicolare » BL ad MK. I due triangoli AMK e BLM sono rettangoli in L e K e si dimostrano facilmente uguali per un noto criterio relativo ai triangoli rettangoli. Quindi il quadrangolo $BHKL$ rettangolo in HKL risulta « equivalente » al triangolo ABH e la somma dei suoi angoli risulta data da quella di ABH più i due retti che nascono in K ed L.

Cerchiamo allora la somma degli angoli di $BHKL$; una semplice ispezione della fig. 6 mostra che tale somma non può valere 4 retti perchè l'angolo in B non può risultare retto, dato che BL, passando per il polo di LK non può passare per quello di BH. L'angolo in B è quindi minore di un retto, la differenza essendo rappresentata dall'angolo $B'\widehat{BB''}$; quindi anche la somma degli angoli di ABH vale meno di due retti, la differenza tra due retti ed essa essendo ancora rappresentata dall'angolo $B'\widehat{BB''}$.

Ora si verifica immediatamente che l'angolo $B'BB'' = \delta$ è proprio l'angolo di cui risulta ruotato al ritorno un vettore che sia trasportato per « equipollenza » lungo il ciclo chiuso $BHKLB$. Infatti, poichè il trasporto per « equipollenza » deve conservare gli angoli, scegliamo il vettore BB' ortogonale a BH e trasportiamolo lungo $BHKLB$ (si osservi che in figura è tenuto conto della sola direzione dei vettori rappresentati);

esso andrà successivamente in HH' poi in KK', in LL' e infine riporterà in BB'' ruotato di δ rispetto a BB'.

Ora è chiaro che questi angoli δ di cui risultano ruotati i vettori trasportati per « equipollenza » lungo cicli chiusi, sono uguali per cicli uguali, e che l'angolo corrispondente al ciclo somma di due risulta essere la somma degli angoli che com-

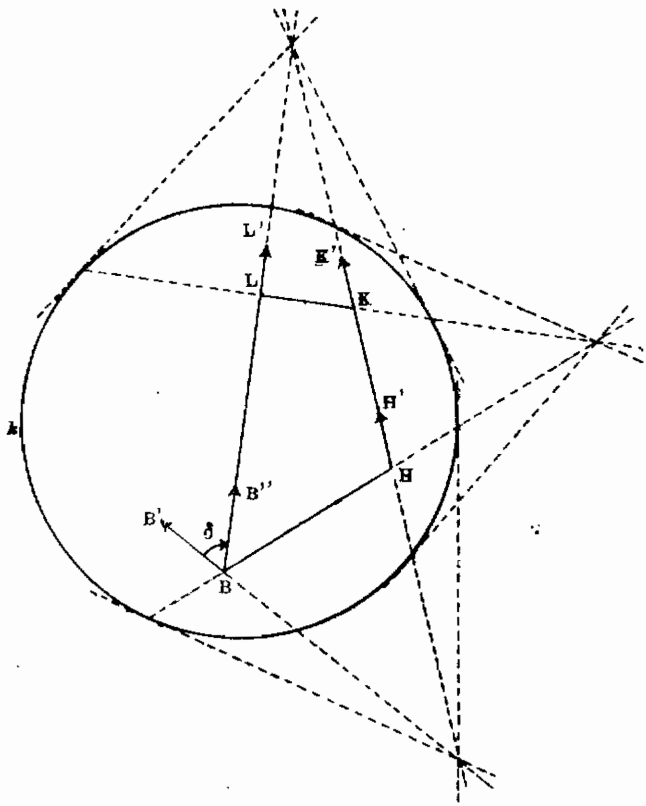

Fig. 6.

petono ai cicli addendi. Tanto basta per concludere che gli angoli δ si comportano come le aree dei cicli e che le aree di due poligoni risultano sempre confrontabili, in quanto lo sono due angoli δ. Applicando anche a questo caso un ragionamento già accennato al § 2, potremo dire che è costante il rapporto tra l'angolo δ relativo ad un ciclo e l'area σ del ciclo stesso, il rapporto risultando una costante essenzialmente negativa, giacchè abbiamo verificato essere $\delta < 0$. Ponendo quindi

$\delta/\sigma = -1/R^2$ potremo chiamare $\frac{-1}{R^2}$ la curvatura costante del nostro « piano » iperbolico. Anzi scegliendo opportunamente l'unità, potremo senz'altro assumere come misura delle aree stesse l'angolo δ mutato di segno.

Un esempio delle proprietà che conseguono da quanto abbiamo dimostrato, è il teorema affermante che nel « piano » l'area di un triangolo non può crescere oltre ogni limite, ma ammette un massimo, tutti i triangoli di area massima essendo tra loro uguali. Essi infatti sono evidentemente quelli aventi i tre vertici su k; ogni lato risultando allora « parallelo » agli altri due, gli angoli sono da ritenersi tutti e tre nulli e l'area assume il massimo valore misurato da due retti. L'uguaglianza di due tali triangoli si deduce poi immediatamente dalla esistenza ed unicità della proiettività che porta tre punti ABC di k in altri tre punti pure su k.

Abbiamo così raggiunto lo scopo che ci siamo proposti, di dare cioè in breve una illustrazione delle proprietà salienti del piano iperbolico come superficie a curvatura costante negativa, mostrando in pari tempo un semplice modello di metodi e di enti che hanno tanta importanza nelle teorie di geometria differenziale.

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE

Collezione promossa
dall' Istituto Nazionale per la storia delle scienze

N. 1. *Gli elementi d'* Euclide *e la critica antica e moderna.* Volume I, libri I-IV, col concorso di diversi collaboratori editi da F. Enriques . . . . L. 25 —

N. 2. Heiberg: *Matematiche, scienze naturali e medicina nell'antichità classica.* Traduzione di Gino Castelnuovo, con note di F. Enriques . . . . L. 12,50

N. 3. I. Newton: *I principi di filosofia naturale - Teoria della gravitazione.* Traduzione e note su lo sviluppo dei concetti della Meccanica per cura di F. Enriques ed U. Forti . . L. 16 —

N. 4. E. Rufini: *Il « Metodo » d'Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antica Grecia* . . . . L. 22 —

N. 5. R. Dedekind: *Essenza e significato dei numeri. - Continuità e numeri irrazionali.* Traduzione e note storico-critiche di O. Zariski . . . . L. 22 —

N. 6. A. C. Clairaut: *Teoria della forma della terra dedotta dai principi dell'idrostatica.* Traduzione e note di M. Lombardini, seguite da una nota di F. Enriques: *Il problema della forma della terra nell'antica Grecia* . . . . L. 30 —

N. 7. *L'Algebra,* opera di Rafael Bombelli da Bologna. Libri IV e V comprendenti « La Parte Geometrica », inedita, tratta dal manoscritto B. 1569, della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna. Pubblicata a cura di Ettore Bortolotti. L. 40 —

N. 8. *Gli Elementi d'* Euclide *e la critica antica e moderna.* Vol II, libri V-IX, col concorso di diversi collaboratori, editi da F. Enriques . . . . L. 50 —

N. 9. U. Forti: *Introduzione storica alla lettura del « Dialogo sui massimi sistemi » di* Galileo Galilei . . . . . L. 25 —

N. 10. *Gli Elementi d'* Euclide *e la critica antica e moderna.* Vol. III, libro X, col concorso di diversi collaboratori, editi da F. Enriques . . . . L. 30 —

N. 11. *Gli elementi di* Euclide *e la critica antica e moderna.* Vol. IV, libri XI-XIII, col concorso di diversi collaboratori, editi da F. Enriques . . . . L. 30 —