UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Servizio formazione permanente

Corso residenziale su:

Dimostrazione e verifica nell'ambito dell'insegnamento della matematica

Centro di cultura dell'Università Cattolica
Passo della Mendola (Trento)
19 – 25 luglio 1986

***La Scuola di Atene*, Raffaello Sanzio (1483-1520), 1510, cartone preparatorio, carboncino e biacca, 285×804 cm**

Milano, Pinacoteca Ambrosiana, 2019

Carlo Felice Manara

Osservazioni sul concetto di definizione.

1 – *Premesse sulla definizione*. Nell'eseguire i ragionamenti che conducono a deduzioni e quindi a conclusioni, acquista una particolare importanza un'operazione che conduce a precisare il significato dei termini che si impiegano nelle operazioni logiche, operazione che viene spesso chiamata *definizione dei termini* o anche, ovviamente, dei concetti che tali termini designano.

Si può osservare che un'operazione cosiffatta è di importanza fondamentale per la scienza, la quale richiede in ogni caso che gli oggetti da lei studiati siano designati con la massima precisione possibile, compatibilmente con le circostanze concrete con le quali essa opera. D'altra parte è facile osservare che il linguaggio comune non serve soltanto per comunicare dei concetti, ma anche delle emozioni, degli stati d'animo; pertanto è facile osservare che il significato di un termine, quando utilizzato nel linguaggio comune, è determinato quasi sempre dal contesto in cui il termine è inserito.

Per esempio la parola "*aspetto*" può essere la prima persona singolare del presente del verbo aspettare oppure può significare una qualità di una persona; e soltanto il contesto in cui la parola è inserita può permettere di distinguere far questi due significati. Da questo esempio e da innumerevoli altri che si potrebbero costruire, si comprende facilmente l'utilità (per non dire la necessità) di precisare il significato di un termine, quando si voglia usarlo in un ragionamento rigoroso.

La precisazione del significato di un termine viene fatta di solito con un discorso che viene chiamato *definizione* del termine stesso. Nella grande maggioranza delle lingue attualmente parlate esistono dei libri, chiamati dizionari, i quali dovrebbero avere come scopo quello di precisare il significato delle parole della lingua alla quale essi si riferiscono. Tuttavia ben raramente ciò avviene, e i dizionari di una lingua quasi sempre, in corrispondenza ad ogni termine, si limitano a elencare dei sinonimi, che ovviamente non spiegano il significato del termine stesso, ma presentano tale significato in altra forma e con diverse parole. Questa situazione è stata spesso messa in evidenza, come per esempio da L. LONGANESI (cfr. LONGANESI, LEO – La sua Signora, Milano, 1973), che presenta come un fenomeno di "moto perpetuo" la consultazione di un dizionario che porta le indicazioni seguenti:

SEDIA: vedi SEGGIOLA

SEGGIOLA: vedi SEDIA

Dal punto di vista della logica, il comportamento dell'autore del dizionario considerato da Longanesi si è reso colpevole di un errore che è stato classificato da tempo sotto il nome di *circolo vizioso*. Naturalmente una situazione paradossale come quella descritta sarebbe stata evitata se l'estensore del dizionario in questione avesse scritto per esempio: SEDIA: mobile utilizzato per sedersi.

Tuttavia si può osservare immediatamente che la proposizione scritta sopra ha significato soltanto se il lettore o l'ascoltatore conosce i significati che, nel contesto della frase, prendono i termini ivi utilizzati. In altre parole, una proposizione che voglia essere la definizione di un termine deve usare soltanto altri termini il cui significato si presume già noto al lettore o all'ascoltatore. È chiaro tuttavia che con questo procedimento non si può continuare indefinitamente: occorre partire da certi termini il cui significato si presume noto, oppure il cui significato viene precisato con operazioni diverse da quelle considerate finora, cioè diverse dall'enunciazione di altre proposizioni.

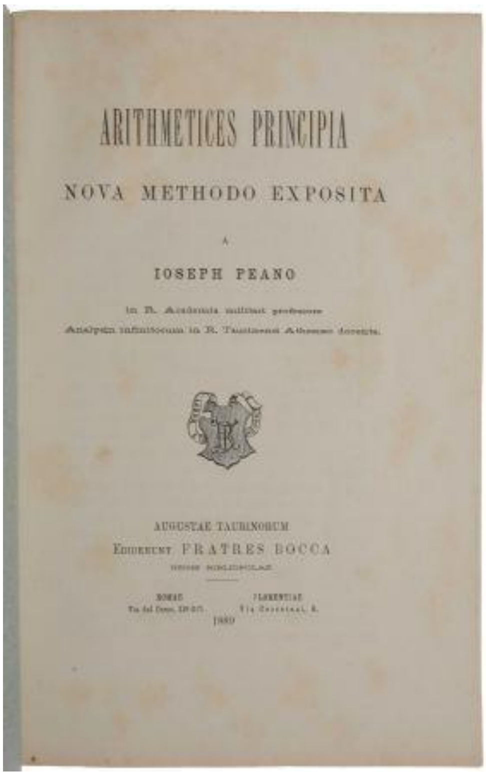
Pertanto, dal punto di vista della logica rigorosa, ogni dizionario dovrebbe iniziare con l'elenco di termini il cui significato si presume noto al lettore, e mediante i quali si spiega il significato di ogni altro termine contenuto nel dizionario. Questa situazione è stata presentata in termini molto chiari da B. PASCAL, grande matematico, filosofo, teologo del secolo XVII. Scrive infatti Pascal (in *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*): "…spingendo sempre più avanti la ricerca, si giunge necessariamente a certi termini primitivi che non possono essere definiti, a dei principi talmente chiari che non se ne trovano di più chiari, da poter utilizzare per la loro dimostrazione. Ci si convince quindi del fatto che la condizione umana, naturale e immutabile, non permette di trattare alcuna scienza in una forma assolutamente completa.”

2 – *Definizione ostensiva e definizione per postulati*. Le osservazioni precedenti ci convincono del fatto che esistono certi termini il cui significato deve essere acquisito con degli strumenti diversi dall’enunciazione di proposizioni verbali. A ben riflettere, tali sono i termini che costituiscono il fondamento di ogni lingua effettivamente parlata. Se osserviamo il bambino che inizia la propria vita di relazione, potremo convincerci del fatto che egli impara il significato delle parole con l’uso.

In particolare, immaginiamo uno straniero che venga nel nostro paese senza conoscere la nostra lingua, e della cui lingua non conosciamo nulla. Il solo procedimento che permetterebbe di far conoscere a questo soggetto il significato di certi termini della nostra lingua che indicano degli oggetti concreti è quello che veniva chiamato *definizione per additamentum*, oppure anche *definizione ostensiva*. Con questo procedimento il significato di una parola viene precisato al nostro interlocutore pronunciando la parola stessa e contemporaneamente indicando (ovvero additando) l’oggetto che ad essa corrisponde.

A ben guardare –come già osservato – è questo il procedimento con cui ogni soggetto umano impara la propria lingua materna: imitando coloro che parlano con lui, modificando il proprio comportamento linguistico, correggendo i propri errori. Questa procedura è valida ovviamente quando si tratti di termini linguistici che designano oggetti materialmente ostensibili.

Ovviamente la procedura non può essere adottata quando si tratti di precisare il significato di termini che indicano dei concetti astratti, i quali non possono essere concretamente designati con atti elementari. In questi casi, e in altri consimili, la precisazione del significato di un termine può essere fatta soltanto con un procedimento che viene designato come *definizione per postulati*, o anche *definizione d’uso*. È questa la procedura che occorre seguire quando si abbia a che fare con di concetti fondamentali; questi infatti potrebbero essere definiti soltanto facendo ricorso ad altri termini – per così dire – ancora più fondamentali. Ma ovviamente l’operazione non può essere proseguita all’infinito. Pertanto occorre scegliere dei punti di partenza, per poter precisare i concetti di cui si parla e stabilire le premesse di ogni deduzione successiva.


ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA

ROMAE FLORENTIAE

3 – *G. Peano e la definizione dell’Aritmetica per postulati*. È questa la procedura scelta da G. PEANO (Peano, Giuseppe – Arithmetices principia nova methodo exposita – Torino,1888) per esporre i fondamenti dell’aritmetica razionale. Infatti nell’opera di Peano, dedicata a chiarire il concetto di *numero naturale*, non si trova alcuna frase del tipo: “Il numero è…..”. Semplicemente Peano enuncia cinque proposizioni che parlano del numero naturale e di altri concetti collegati con questo. Queste proposizioni costituiscono la *definizione implicita* del concetto di numero naturale. Infatti tale concetto è da lui assunto come fondamentale ed elementare, in modo che non è possibile darne una definizione che faccia appello a concetti più fondamentali ed elementari di lui.

Analoga posizione è presa da D. HILBERT nella sua famosa opera sui fondamenti della Geometria (Hilbert, David – Grundlagen der Geometrie – Leipzig, 1912), dove non si trovano delle proposizioni del tipo: “Il punto è…”, oppure “La retta è…”.

Ugo Nespolo, Account, 1988, acrilico su tavola

Semplicemente si comincia a parlare di punti, di rette e di piani con proposizioni che *collegano* tali concetti. Pertanto, in questo atteggiamento, le proposizioni iniziali di una teoria costituiscono le *definizioni implicite* (o *definizioni d'uso*)dei concetti di cui parla la teoria stessa.

A ben guardare, ci si trova in una situazione analoga quando si cerca di spiegare ad un'altra persona un gioco con le carte: ovviamente, i nomi delle carte non costituiscono la definizione delle carte stesse in un determinato gioco; tale definizione è costituita dalle regole con le quali, nel gioco considerato, si manovra con le carte. Di modo che nessuno trova strano il fatto che una certa carta, per esempio il Re, in un certo gioco abbia un determinato comportamento ed in un altro gioco un comportamento e un valore del tutto diversi. Semplicemente si tratta di carte diverse, perché le regole dei due giochi sono diverse, e sono le regole – come abbiamo detto – che danno la definizione delle singole carte.

Le proposizioni con le quali si inizia una determinata teoria vengono chiamate con diversi nomi, a seconda dei vari atteggiamenti degli Autori, dei loro gusti e delle abitudini. G. Peano le chiama *Proposizioni primitive*; altri Autori le chiamano *Assiomi* (beninteso di quella teoria). Nelle trattazioni classiche ci usava il nome di *Postulati*; questo termine, che viene dal latino, traduce esattamente il termine greco usato da EUCLIDE per le proposizioni geometriche enunciate all'inizio del suo celebre trattato, intitolato ELEMENTI. Il termine stesso indica chiaramente che, enunciando queste proposizioni, il trattatista non intende *imporre* ai lettori di accettarle, ma semplicemente *richiede* che esse siano accettate.

Oggi è diffusa l'abitudine di chiamare *Assiomi* le proposizioni inziali di una teoria. Tale abitudine non è forse molto opportuna, perché il termine assioma, nel linguaggio comune e nell'uso di certi sistemi filosofici, viene spesso utilizzato per indicare una proposizione che è accettata per la sua evidenza. Era forse anche questo, almeno parzialmente, il senso in cui le proposizioni iniziali della Geometria sono state considerate durante i secoli precedenti il nostro. Precisamente, in questo atteggiamento si pensava che le proposizioni inziali della Geometria fossero imposte dall'evidenza di una realtà fuori di noi.

Ma oggi, dopo una lunga evoluzione critica, ci si rende conto del fatto che le proposizioni inziali di una teoria possono essere scelte con una certa libertà; esse non vengono dimostrate (beninteso in quella teoria) perché sono iniziali, e quindi la loro validità non può essere ricondotta a quella di proposizioni che le precedano (ripetiamo, all'interno di quella teoria). Ma nulla vieta che in un'altra teoria le stesse proposizioni possano venir dimostrate, purché beninteso prima di esse sino state enunciate altre proposizioni sufficienti per l'operazione di deduzione.

4 – *Termini primitivi di una teoria*. Abbiamo parlato finora del problema della definizione del significato dei *termini fondamentali* di una data teoria. Tali termini vengono anche chiamati *primitivi* e, come visto, la loro definizione può essere data soltanto in forma implicita, mediante postulati (o assiomi che dir si vogliano). Anche per i termini primitivi si possono ripetere le considerazioni che abbiamo presentato sopra per le proposizioni primitive; in particolare si osserva che il fatto che un determinato termine sia primitivo non è una qualità intrinseca del termine stesso, ma dipende dalla teoria nella quale il termine stesso è inserito. Nulla vieta che un determinato termine, che risulta essere primitivo in una determinata teoria, possa poi essere definito in forza di altri in un'altra teoria.

Tuttavia appare chiaro che – come visto – non è possibile definire in forma esplicita, e con le procedure che vedremo subito, ogni termine di una teoria. In una trattazione rigorosa, occorrerebbe iniziare con un elenco dei termini che vengono considerati come primitivi e che pertanto vengono definiti implicitamente mediante gli assiomi della teoria che si sta costruendo. In una teoria rigorosamente costruita ogni altro termine impiegato dovrebbe essere definito esplicitamente, con una procedura la cui analisi è stata fatta da secoli, e della quale daremo qualche cenno qui di seguito. A tal fine osserviamo che, nella pratica abituale della scienza, ma anche del buon senso, la definizione di un concetto viene data assegnando una successione di insiemi, ciascuno contenuto nel precedente. Ricordiamo per esempio che la Zoologia dà una classificazione degli animali secondo una successione di insiemi che hanno i nomi classici: TIPO, CLASSE, ORDINE, FAMIGLIA, GENERE, SPECIE.

La procedura ricalca quella seguita dalla logica ed è abbastanza analoga. Precisamente, nella visione classica, si chiama *definizione di un termine* un discorso che precisa il significato del termine stesso, assegnando una classe alla quale appartiene l'ente designato dal termine stesso, mediante due insiemi contenuti l'uno nell'altro. Richiamiamo per esempio ciò che abbiamo detto sopra, nel paragrafo 1, parlando della sedia. Ivi abbiamo proposto per il termine "sedia" la seguente definizione: "mobile destinato ad essere usato per sedersi". Ovviamente questo discorso, se deve essere utilizzato per chiarire il significato del termine "sedia" a chi per avventura non lo conoscesse, presuppone che siano noti i termini utilizzati, per esempio, in particolare, i termini "mobile", "utilizzato", "sedersi". Questa osservazione, del tutto banale, è stata codificata in una regola di logica, regola che vuole che la definizione di un termine debba essere più chiara del termine stesso. Rispettando tale regola si eviterebbero gli equivoci che si incontrano frequentemente nella trattatistica matematica.

Uno di tali equivoci, molto frequente, riguarda per esempio il concetto di *insieme*, in relazione al quale molti Autori, non particolarmente rigorosi, presentano come definizione la celebre frase di G. CANTOR: "Insieme è una collezione di elementi presentati come un tutto unico." Ovviamente, per poter considerare questa frase come una definizione esplicita del termine *insieme*, occorre accettare il termine *collezione* come noto, o fondamentale. Pertanto occorrerebbe includere tale termine tra quelli che si definiscono implicitamente, con postulati.

5 – *Sui concetti predicabili*. Ciò che abbiamo detto sopra parlando della Zoologia potrebbe essere ripetuto anche per le altre scienze. La logica classica ha analizzato i concetti generali che possono essere attribuiti come *predicati* a certi soggetti, permettendo così le definizioni degli enti che si considerano. Tali concetti generali sono chiamati anche *predicabili*; essi sono stati elencati nel modo seguente: GENERE, SPECIE, DIFFERENZA, PROPRIO, ACCIDENTE.

I concetti di *genere* e *specie* corrispondono ad insiemi, ciascuno contenuto nel precedente; si suole anche parlare in particolare di *genere remoto* e di *genere prossimo*. Con il termine *specie* poi si indica un insieme in ogni caso contenuto nel genere prossimo.

Con il termine *differenza* si indica *un concetto che costituisce la specie nell'interno del genere*. Così per esempio, con riferimento ad enti della Geometria, si potrebbe pensare di definire il triangolo come una

Leon Battista Alberti – Firenze – Tempietto del Santo Sepolcro Cappella Rucellai

figura costituita da tre punti A, B, C non allineati, dai punti dei segmenti che hanno a coppie i tre punti suddetti come estremi, e dai punti di segmenti aventi per estremi, in tutti i modi possibili, due qualisivogliano dei punti sopra determinati. In questa definizione il *genere* è quello delle figure, la differenza è data dalla frase che specifica il triangolo come specie, nel genere delle figure.

Il concetto predicabile "*proprio*" indica una proprietà che consegue dalla definizione dell'ente che si considera, ma non ne costituisce la definizione. Così, per esempio, nel caso del triangolo prima considerato, si potrebbe dire che è proprio del triangolo il fatto di essere una figura piana, perché si dimostra che il piano dei tre punti A, B, C contiene ogni altro punto del triangolo, così come l'abbiamo definito. Ma ovviamente anche altre figure hanno questa proprietà, che non è sufficiente per costituire concettualmente la specie "triangolo" nel genere "figure".

Infine l'*accidente* indica una proprietà che non consegue dalla stessa natura dell'ente che si intende definire; così è per esempio il fatto che i lati di un triangolo stiano fra loro come i numeri $6, 7, 8$.

Si può osservare che gli enti della Matematica o della Geometria, che non siano stati scelti come fondamentali in una certa teoria, possono essere definiti nel modo che è stato precisato.

6 – *Definizione nominale.* Spesso si prende in considerazione un'operazione logica che consiste nell'assegnare un nome a un certo ente. Tale operazione viene anche chiamata *definizione nominale*.

Così per esempio invece di dire: "*Cerchio* è la figura piana costituita dai punti che hanno da un dato punto O una distanza non superiore ad un determinato segmento, detto *raggio*", si potrebbe anche dire: "Si *chiama cerchio* la figura piana ecc." In questo modo la frase ci si presenta come la definizione della parola cerchio, che verrebbe assunta convenzionalmente come sostitutiva della frase che la segue.

In questo ordine di idee, alcuni Autori hanno sostenuto che in Matematica si danno soltanto definizioni nominali. Scrive per esempio B. Pascal (in *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*): "In Geometria si accettano soltanto le definizioni che i logici chiamano nominali, cioè le imposizioni di certi nomi a certe cose che sono state perfettamente designate con termini già noti; ed io parlo soltanto di queste definizioni. Il loro scopo è quello di chiarire i discorsi, esprimendo con una sola parola ciò che si dovrebbe esprimere con vari termini; tuttavia in modo che il nome attribuito sia privo di ogni altro senso (se ne ha) per conservare soltanto quello che gli è stato assegnato. Ecco un esempio: se occorre distinguere fra i numeri interi quelli che sono divisibili per due senza resto da quelli che non lo sono, per evitare di dover ripetere in ogni caso questa condizione, si assegna a questi numeri un nome, e li si chiamano numeri pari."

Idee analoghe sono state espresse, circa due secoli dopo, da G. Peano. Questi osserva inoltre che le definizioni nominali sono spesso presentate sotto la forma seguente: (1) Simbolo nuovo $=$ espressione costituita da simboli noti.

Questa osservazione dovrebbe essere tenuta presente, per evitare equivoci. Consideriamo per esempio la procedura che si segue per definire il concetto di *radiante*: siano date due rette a, b di un piano, e si supponga che esse abbiano in comune un punto O; si tracci un arco di circonferenza con centro O e si indichino con A e B i punti di intersezione di tale circonferenza con le rette a e b rispettivamente; si supponga di saper misurare la lunghezza dell'arco di estremi A e B. In queste condizioni si può formulare la seguente definizione: $(2)\, rad\ (a, b)\ =$ lunghezza dell'arco $A,\ B$ divisa per la lunghezza del raggio r. Nel caso della (2) ci si trova ovviamente nelle condizioni analizzate da Peano, perché il simbolo $rad\ (a, b)$ non è mai stato incontrato prima. Pertanto la (2) non può esprimere la relazione di uguaglianza fra numeri noti, ma costituisce la definizione nominale del nuovo simbolo.

Occorre tuttavia osservare a questo proposito che il secondo membro della (2) fa menzione di un ente (il raggio della circonferenza tracciata con centro O) che non figura al primo membro. Pertanto occorre dimostrare che la definizione (2) è – come si dice – *ben posta*; e ciò si fa dimostrando che il numero che si ottiene dal rapporto menzionato al secondo membro della (2) non dipende dal raggio arbitrariamente scelto. Questa dimostrazione si fonda su noti teoremi di Geometria elementare ed è indispensabile se si vogliono evitare dei gravi errori. Infatti il teorema ricordato si fonda su concetti che fanno riferimento alla *similitudine* fra figure piane; di conseguenza la (2) risulterebbe priva di senso in una Geometria nella quale non si può costruire una teoria della similitudine, per esempio in una Geometria non euclidea.

Appunti dattiloscritti rieditati, ottobre 2019

NdR Si può vedere anche nel Sito www.carlofelicemanara.it :

La definizione. Richiami di logica elementare . L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, vol.11 – N.12, 1988, dicembre, pp. 1145-1167

L'eguaglianza in geometria 1. Nuova Secondaria 5 (gennaio 1988), pp. 65-67*;* *L'eguaglianza in geometria 2*. Nuova Secondaria 6 (febbraio 1988), pp. 71-74.

9905. *Didattica per concetti*. (Note di lavoro).

0002 (2000/01) *Pensiero e linguaggio*. (Note in margine al testo: Lev S. Vygotskij. Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche. Introduzione, traduzione e commento di Luciano Mecacci. Bari, (1992) Laterza, 426 pp.)