cfms3d31.pdf (2016-04-20)

A cento anni dalla nascita di Carlo Felice Manara

Per non dimenticare
SCHEDA IMSI/pnd n. 21
a cura di Gabriele Lucchini

testo accettato per pubblicazione ne

L'INSEGNAMENTO
DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

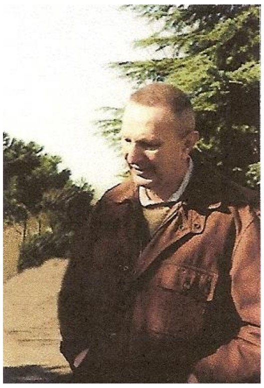
Un cordiale ringraziamento al Prof. Don Mario Ferrari,
Direttore responsabile della rivista,
per l'autorizzazione all'anticipazione

Complementi alla scheda sono in g260w03.htm da g260d14.htm

Per non dimenticare [1]

SCHEDA IMSI/pnd n. 21

A cento anni dalla nascita di Carlo Felice Manara



A cura di Gabriele Lucchini [2]

---

[1] La presentazione di “Per non dimenticare” è stata pubblicata nel numero del febbraio 2011 a premessa della scheda n. 1 dedicata a *Federigo Enriques*. Il testo e complementi alla presentazione sono reperibili nella pagina *internet* http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g260d.htm. Dati sulle schede sono in http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g260d14.htm.

Dal luglio 2012 gli articoli (anche arretrati) di “Per non dimenticare” sono liberamente consultabili dalla *home page* del sito *internet* del Centro Morin, all’indirizzo http://www.centromorin.it.

[2] In http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g260w03.htm sono indicati complementi. Le ultime correzioni a queste pagine sono del 2015-07-13.

Gabriele Lucchini

Attualità di Carlo Felice Manara:

L'attualità della produzione scientifica, della promozione culturale e dell'insegnamento umano di Carlo Felice Manara è adeguatamente documentata nella raccolta di suoi scritti nel sito *internet* "Carlo Felice Manara" a cura della famiglia [3] e in testi di conferenze e articoli in sua memoria [4], in gran parte ivi raccolti.

L'autorevolezza delle testimonianze e delle valutazioni consultabili in *internet* e i precedenti articoli su questa rivista [5] suggeriscono di limitarsi, qui, a segnalazioni, ovviamente con scelte soggettive; pare, però, opportuno aggiungere un piccolo complemento sulla importanza che Carlo Felice Manara attribuiva alla Storia, non soltanto della Matematica, sul suo punto di vista in proposito, su contributi che ha lasciato.

La segnalazione fondamentale è quella del predetto sito *internet* "Carlo Felice Manara" e dei testi che propone, in particolare di commemorazioni ufficiali [6]. Alcune altre indicazioni complementari sono nelle mie pagine *internet* [7]. Tra queste segnalo "Manara il matematico che amò studenti e famiglia", "addio" scritto da Franco Manzoni per il *Corriere della Sera* (2011-05-24, edizione per Milano), che propongo come testimonianza non matematica pubblicata su un importante quotidiano [8].

---

[3] Indicazioni sono più avanti nella pagina su sito.
[4] Non ne conosco un elenco, che sia il risultato di una ricerca sistematica.
[5] Sono elencati più avanti, nella sezione su Carlo Felice Manara, Centro Morin e rivista.
[6] Indicazioni sono nel *file* di complementi (v. nota 2).
[7] Sono raggiungibili con cfms0.htm in Google.
[8] Gli interessati possono trovare il testo (riproduzione e trascrizione) nella mia pagina cfms3d6.htm da cfms4d1a.htm raggiungibile con Google.

Il sito internet "Carlo Felice Manara"

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate ha già segnalato nel giugno del 2013 (p. 297 [9]) il sito "Carlo Felice Manara" realizzato dalla famiglia [10].

Nelle sezioni della testata [11] c'è stata una dolorosa aggiunta per la morte di Maria Angela (1946-2013, figlia di Margherita e Carlo Felice), con la eliminazione di "Amici" (che rimane, con altre indicazioni, nella mappa del sito); attualmente sono le seguenti sette: Home, Biografia, Docenza, Divulgazione, Innovazione didattica, Cultura e società, Margherita e Angela.

Nella *home page* sono utilizzabili accessi alla predetta "mappa del sito" e a "*news*".

Il sito è stato arricchito con riproduzioni e trascrizioni di scritti, anche inediti, di Carlo Felice Manara [12] e con saggi e contributi di vari autori ed è dotato di un motore di ricerca interno [13]; propongo questa disponibilità di testi come un invito alla lettura con scelte stimolate dalle indicazioni della "mappa del sito" [14].

[9] In quell'occasione furono segnalate anche le mie pagine *web* su Carlo Felice Manara (raggiungibili con cfms0.htm, v. nota 7).
[10] L'indirizzo URL è http://www.carlofelicemanara.it; il sito può essere raggiunto con motori di ricerca.
[11] Altre sezioni sono indicate soltanto nella "mappa del sito".
[12] Attualmente, non tutto il materiale delle mie pagine è stato utilizzato.
[13] Da "fossile digitale", confesso di avere qualche difficoltà nelle ricerche.
[14] Alcune indicazioni sono, anche, nelle pagine *internet* indicate in nota 7.

Carlo Felice Manara,
il Centro Morin, la rivista

I rapporti di Carlo Felice Manara con Candido Sitia, con il Centro Morin, con la rivista sono ricordati nel sito “Carlo Felice Manara” in una sezione dedicata a *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, della quale riporto l’intestazione e i due brani pertinenti.

Con Roberto Sitia, Carlo Felice si trovò in una forte consonanza di visione, professionale e umana, e in un’amicizia che durò fino alla morte di Roberto nel 2002, come testimoniano le brevi, commosse ***righe inedite*** *di CFM.*[15] *Dal 1983 alla sua morte CFM fece parte della commissione scientifica della Rivista; dal 1978 collaborò con continuità all’attività del Centro, attraverso relazioni ai seminari e ai corsi di aggiornamento, e con articoli per la Rivista .*[16]

[15] Le “righe”, intitolate “Ricordi di un amico fraterno” sono, là, raggiungibili con *link*, come l’elenco degli articoli e, da questo, le riproduzioni di tutti gli articoli pubblicati e di inediti. Si tratta – come i lettori di IMSI sanno – di Candido Sitia, Fratel Roberto delle Scuola Cristiane. [NdR – gl]

[16] Nel 1978 fu pubblicata una relazione negli atti di un convegno dell’Università Cattolica a Brescia; la collaborazione iniziò nel 1983. [NdR – gl]

L'elenco degli articoli *in IMSI mostra la continuità degli interessi che sono stati cari a CFM, ma anche l'apertura alla considerazione via via di nuovi problemi e prospettive diverse.* [17]

Nel sito del Centro Morin sono stati elencati, e resi consultabili con *password*, 28 titoli come Autore per la Rivista [18] e 3 (citati qui sotto) per presenza di "Manara" nel titolo e sono citati 20 testi fruibili nella e dalla Biblioteca [19].

Carlo Felice Manara, in relazione alla morte avvenuta il 4 maggio 2011, è stato ricordato da *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* con:

-- il breve ricordo del settembre 2011 (G. Lucchini, pp. 408-409);
-- "Carlo Felice Manara: il passato, il presente, il futuro" (G. Lucchini, gennaio 2012, pp. 59-71);
-- "Carlo Felice Manara: un grande amico" (C. Colombo Bozzolo, gennaio 2012, pp. 73-74);
-- il "ricordo a due anni dalla morte" con segnalazione di due riferimenti in *internet* (giugno 2013, p. 297 [20]).

Tra gli elenchi dei due siti ci sono differenze, delle quali pare opportuno avvertire pur senza elencarle.

[17] Non risultano articoli in *L'insegnamento della matematica*, prima serie della rivista. [NdR – gl]

[18] Quello in ricordo di Pietro Canetta è pubblicato in entrambe le serie; di un articolo sono citate separatamente le tre parti.

[19] La Biblioteca del Centro Morin ha un servizio prestiti per corrispondenza.

[20] Questo, che non è firmato, non è inserito nell'indice elettronico nel sito del Centro Morin.

Carlo Felice Manara,
Storia della Matematica e sapienza

Gabriele Lucchini

Di studi e scritti di Carlo Felice Manara sulla Storia della Matematica, anche in relazione a fondamenti ed epistemologia e nel quadro della Storia "generale" [21], sono stato testimone sia per collaborazioni e sia per numerose conversazioni, che mi hanno facilitato nel cogliere il senso del suo impegno in questo settore, che mi è parso un po' trascurato in commemorazioni e in riconoscimenti [22] e non pienamente valorizzato nella presentazione nel sito "Carlo Felice Manara", dove i "Contributi su storia, fondamenti ed epistemologia" (comprendenti "Bibliografia" e "Inediti") sono nella sezione "Divulgazione" [23], anche se, ovviamente, è molto importante che siano stati resi consultabili tutti i testi ivi citati [24].

In questo ordine di idee, ho ritenuto significativo mettere nel titolo la parola *sapienza*, che ritengo che evidenzi bene la posizione di Carlo Felice Manara nei confronti della Storia, anche se non mi risulta che fosse tra quelle da lui usate abitualmente.

[21] Carlo Felice Manara usa "*histoire générale*" nella sua relazione "La mathématique face à son histoire" (v. nota 32 e testo corrispondente).

[22] Mi riferisco alle Conferenze all'*Accademia di Modena*, alla Commemorazione all'*Istituto Lombardo* e a quella in *La matematica nella storia e nella cultura – Rivista della Unione Matematica Italiana*, alle motivazioni della laurea *honoris causa* all'Università Cattolica del Sacro Cuore e della nomina a *professore emerito* segnalate in g260w03.htm di nota 2.

[23] Confesso di trovare inadeguata la parola "divulgazione".

[24] Accennerò più avanti a omissioni in questa bibliografia.

Aggiungo di ritenere di essere debitore di questo uso di “sapienza” a Ennio De Giorgi – che è stato qualificato «*matematico di statura eccezionale*» con una «*vita ricca di messaggi*» [25] – , in particolare per lo scritto “Valore sapienziale della matematica” [26].

Ma prima di proporre spunti sul ruolo sapienziale della Storia negli studi e negli scritti di Carlo Felice Manara, mi pare doveroso dare un’idea della vastità e del tipo dei contributi da lui lasciati in proposito: ho già ricordato la disponibilità di dati e di testi nel sito a lui dedicato dalla famiglia e, in particolare, nei “Contributi su storia, fondamenti ed epistemologia”, e mi pare opportuno riportare la presentazione di questa sezione.

L'attenzione di Carlo Felice Manara per la Storia della matematica derivava, oltre che da suoi gusti personali, dalla sua formazione intellettuale e scientifica. Essa lo portava a vedere chiaramente la storia del pensiero matematico come capitolo fondamentale della storia del pensiero umano. Inoltre, CFM era convinto che la comprensione dello sviluppo storico del pensiero matematico potesse portare ad un arricchimento nella comprensione della matematica stessa, ed in alcuni casi alla consapevolezza dell'origine di alcune difficoltà di apprendimento per gli studenti che iniziano il cammino. Sotto tali aspetti sono da vedere i suoi numerosi contributi, non fatti da uno storico professionista, ma da uno studioso attento alle radici del pensiero. Suonano oggi quasi un progetto i primi titoli dell'elenco dei contributi che riguardano la storia della matematica e in particolare della geometria. Essi sono le due prolusioni del giovane professore ai corsi delle Università di Modena e poi di Pavia:La Geometria nell’ambito del pensiero matematico […], *Idee classiche ed idee moderne sulla geometria algebrica* […].

[25] Giovanni Prodi in “Ricordo di Ennio De Giorgi”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, n. 6 del 1996 (pp. 507-512); l’articolo è liberamente consultabile in *internet* dalla *home page* del Centro Morin.

[26] Una breve citazione è riportata più avanti. Fonti in *internet* sono segnalate nei complementi indicati in nota 2.

Verso la fine del suo lungo percorso di lavoro, nell'*intervento sul tema "La Matematica come promotrice di cultura", al settimo convegno storico-scientifico dal titolo : "Il pensiero scientifico nelle culture del mondo", Università di Ancona, 1 - 3 ottobre 1998, troviamo la seguente frase sintesi del suo pensiero maturo:*
" Mi accade spesso di immaginare la storia della matematica come un filo che scorre nel tempo dell'uomo, segnando la sua ricerca della certezza. "

In mezzo vi è un lungo cammino di ricerca, come si vede dai titoli dell' elenco, i quali testimoniano vari filoni di interesse costante nel tempo: lo sviluppo storico della matematica; i rapporti della storia della geometria con altri aspetti dello sviluppo della matematica; lo studio del contributo specifico di alcune figure di matematici, il cui stile di pensiero e di ricerca erano particolarmente vicini al suo stesso stile: fra di essi, Galileo, Pascal, Peano, Enriques. E vi sono altri interventi dedicati a figure per qualche motivo degne di attenzione: Volta, Veronese, Boscovich, Cardano, Pacioli ...[27]*.*

Faceva ancora parte della formazione intellettuale e scientifica di Carlo Felice Manara il profondo interesse per le problematiche epistemologiche, attinenti ai fondamenti della conoscenza matematica, al valore di verità del suo metodo, alle connessioni con gli altri aspetti della ragione e della conoscenza umana.

Quasi tutti i titoli dei contributi dal 1961 al 1990 si trovano elencati in "Bibliografia Italiana di Storia delle Matematiche 1961-1990", a cura di Francesco Barbieri e Luigi Pepe, estratto da Bollettino di Storia delle Matematiche, anno XII - numero 1 - giugno 1992.

[27] Mi pare opportuno rilevare l'omissione di David Hilbert, in particolare – ma non soltanto – per le ragioni, segnalate più avanti, che mi hanno portato alla scelta di proporre come lettura la prima parte della "Introduzione all'edizione italiana" dei suoi *Fondamenti della geometria.* [NdR – gl].

*Dalla Bibliografia completa di CFM scegliamo un **elenco** di titoli riguardanti la Storia della matematica, Fondamenti ed Epistemologia. Evandro Agazzi, nel suo intervento commemorativo, (Epistemologia, XXXIV (2011), (259-268), delinea molto bene i contributi di CFM riguardo all'epistemologia.*

La scelta, certamente in qualche modo arbitraria, non comprende gli interventi più direttamente riguardanti il tema "Scienza e Fede", che si trovano in un'altra sezione.

*Riportiamo inoltre alcuni contributi **inediti**.*

Facendo mio l'invito a leggere i titoli (che sono una sessantina, più una trentina per gli inediti) e aggiungendo quello a considerare attentamente quelli di evidente interesse storico, pur prendendo atto della dichiarazione sulla arbitrarietà della scelta, non posso non segnalare la presenza di omissioni, lasciando a ciascun lettore la valutazione dell'interresse che ha per le singole indicazioni [28] e avvertendo che alcune omissioni sono soltanto della "bibliografia locale" mentre altre sono, anche, della "bibliografia generale" [29].

Qui [30], mi limito a richiamare come esclusioni locali i *necrologi*, la recensione degli *Elementi di storia della matematica* di Nicolas Bourbaki, "Dimensioni formative e culturali della matematica" [31]; anche dalla bibliografia generale è escluso il sunto in italiano di "Mathématique face à son histoire" [32], riportato nei complementi segnalati in nota 2 per l'opportunità di mettere a disposizione nella nostra lingua il quadro di questa importante relazione nella versione pubblicata dalla rivista *Epistemologia*.

[28] Segnalo che la recensione del libro sulle geometrie non euclidee (attualmente senza *link*) è leggibile dalla "bibliografia generale".

[29] Ritengo, in una valutazione chiaramente soggettiva, che la rinuncia alla completezza andrebbe segnalata e motivata, in particolare per la dichiarazione di redazione di una bibliografia completa (v. sezione "Il lavoro scientifico").

[30] Per altre indicazioni rimando ai complementi indicati in nota 2.

[31] *Nuova secondaria*, gennaio 1989, pp. 55-58.

[32] Si noti che il titolo presenta "distrazioni sul francese", che paiono non attribuibili a Carlo Felice Manara. Il testo della relazione (in francese), tenuta nel 1987, è consultabile dalla "bibliografia generale".

Mi pare opportuno segnalare che nell'elenco sono presenti due libri dichiaratamente di Storia (*Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi* e *Momenti del pensiero matematico*, consultabili con *link*, come gli altri lavori citati nella bibliografia locale e negli inediti), capitoli di libri di Storia, relazioni a congressi e convegni, riflessioni, scritti relativi a conferenze, articoli di promozione culturale [33]: ovviamente, va tenuto presente che, anche indipendentemente dai titoli, i singoli testi sono redatti per destinatari non tutti dello stesso livello di competenze matematiche.

Alcuni degli aspetti di una visione sapienziale della Storia, e in particolare della Storia della Scienza con ampia attenzione alla Matematica e ai suoi contributi alla consapevolezza conoscitiva e formativa, sono indicati nella presentazione sopra riportata; altri sono suggeriti da titoli, che possono indurre alla consultazione. E non deve spaventare il fatto che, come ha scritto Ennio De Giorgi all'inizio del testo già citato:

Ognuno di noi conosce soltanto una parte piuttosto piccola della matematica e una parte ancora più piccola delle relazioni che intercorrono tra matematica, altre scienze ed altre forme del sapere. […] *La riflessione sui rapporti tra la matematica e la totalità del sapere, quella che gli antichi chiamavano sapienza, comprendendo in quest'ultimo termine le scienze, le arti, la giustizia e l'umanità, è un campo sconfinato* […].

Gli aspetti fondamentali del contributo di Carlo Felice Manara sul ruolo sapienziale della Storia stanno, a mio parere, proprio nelle riflessioni generali su conoscenza e consapevolezza e su quelle particolari relative alla Matematica e ad altre Scienze e ai loro apporti alla "sapienza", con l'aspetto particolare di farlo per trasmettere ad altri il senso degli approfondimenti storici anche, e almeno a volte soprattutto, in una prospettiva di servizio.

---

[33] Ovviamente, i dati sono ricavabili dalla bibliografia generale e dalla consultazione dei testi.

Le affermazioni sull'importanza del sapere storico potrebbero essere ritenute un fatto significativo in sé, anche se con una valutazione non da tutti condivisa, ma accanto a queste ci sono le trattazioni che mettono in evidenza la capacità di cogliere gli aspetti essenziali per individuare e fornire un quadro di riferimento, sia per argomenti matematici e per l'evoluzione della Matematica in aspetti relativi ai suoi fondamenti e al suo ruolo paradigmatico e sia per la costruzione di strumenti per le altre Scienze, senza dimenticare gli aspetti operativi e le dimensioni culturali e formative e gli approfondimenti metodologici e conoscitivi.

Da questo punto di vista è facile comprendere la difficoltà di dare una unica etichetta (Storia, Fondamenti, Epistemologia, Fede della presentazione sopra riportata) a singoli lavori che offrano un quadro sapienziale non specialistico in senso tecnico; ma mi pare facile, anche, comprendere l'importanza che ha – indipendentemente dall'essere o non essere credenti o interessati a riflessioni su "Scienza e Fede", che nel sito sono presentate a sé nella sezione "Cultura e società" [34] – pensare alla formazione dell'uomo, alle sue difficoltà di conoscere e di comprendere, per la vastità ricordata con la citazione di Ennio De Giorgi o per altre ragioni.

Come lettura propongo la prima parte della "Introduzione alla edizione italiana" di *Fondamenti della geometria* di David Hilbert (Feltrinelli, 1970 [35]), testo che ritengo particolarmente rappresentativo del modo di guardare e di trattare la Storia da parte di Carlo Felice Manara e della importanza di conoscenze storiche non soltanto per i matematici e per gli insegnanti d Matematica, ma anche per chi voglia avere una idea dell'evoluzione di questa disciplina.

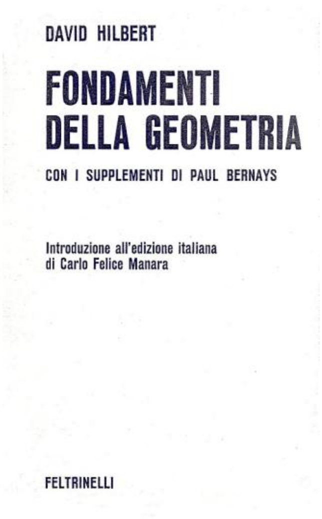
---

[34] Invito a leggere la presentazione anche per i collegamenti con il discorso storico. Per evitare eventuali dubbi su diversità di posizioni, segnalo che pure Ennio De Giorgi fu scienziato credente.

[35] Ritengo opportuno avvertire che la Introduzione alla edizione del 2009 è di Renato Betti (v. complementi indicati in nota 2). Dati sulla edizione originale sono riportati nei complementi indicati in nota 2.

Carlo Felice Manara
***Introduzione all’edizione italiana* di**
***Fondamenti della geometria* di David Hilbert**

(Milano, Feltrinelli, 1970 - traduzione di Pietro Canetta) [36]



I. La crisi della Geometria nel secolo XIX ed il problema dei fondamenti della Matematica

1. Si può pensare che sia un ripetere un luogo comune l’osservare che la Matematica durante il secolo XIX è passata attraverso una crisi che ha trasformato in modo radicale il suo assetto. Tuttavia appare necessario ricordare questa circostanza quando ci si accinge a prendere in esame un’opera come i G*rundlagen* di D. Hilbert, che è ormai entrata fra i classici della Matematica. È inoltre abbastanza facile osservare che nella crisi della Matematica, di cui abbiamo detto, la crisi della Geometria rappresenta un punto particolarmente delicato. Si potrebbe individuare infatti nella evoluzione della Geometria durante il secolo XIX una delle cause della “crisi dei fondamenti” di tutta la Matematica.

---

[36] L’*Introduzione* è in tre parti, suddivise, rispettivamente, in 9, 4, 4 sezioni. La prima parte è alle pagine vii-xv; nella trascrizione sono inserite variazioni, accettate da Carlo Felice Manara, elencate in gld18b.htm; sono state rispettate altre scelte (là indicate); in particolare, “contradditorio”. La seconda e la terza, qui non riportate, sono consultabili in gld18a.htm e hanno i titoli: *II. Il programma hilbertiano e i fondamenti della Geometria* (pp. xv-xx), *III. La visione moderna della Geometria nell’ambito del pensiero matematico* (pp. xx-xxiii).

Per spiegare meglio che cosa intendiamo dire quando parliamo di crisi della Geometria, vorremmo osservare che dall'inizio del secolo XIX alla sua fine troviamo compiuto un cammino di pensiero che si può valutare come molto più importante del cammino percorso durante la evoluzione di tutti i secoli precedenti.

Per accennare soltanto alle tappe essenziali della evoluzione di cui stiamo parlando, potremo ricordare che la lettera di Gauss (a Bessel), nella quale egli diceva di essere in possesso di alcuni risultati di Geometria non-euclidea ma non di volerli pubblicare perché temeva "... gli strilli dei beoti", è del 1829; l'opera di G. Bolyai (pubblicata in appendice al libro del padre, W. Bolyai) è del 1832; l'opera di N.I. Lobacevskij è del 1829. La fondamentale memoria di B. Riemann, che impostava su basi del tutto nuove i fondamenti della Geometria, è del 1854 (e fu pubblicata dopo la sua morte nel 1868); infine la interpretazione che E. Beltrami dà della Geometria non-euclidea del piano su una superficie a curvatura costante è sostanzialmente del 1866, e le memorie di A. Cayley sulla interpretazione proiettiva della Geometria non-euclidea sono degli anni 1859 e seguenti. Come è noto, queste interpretazioni confermavano la non contraddittorietà della Geometria non-euclidea e quindi costringevano i matematici, anzi tutti gli uomini di scienza e di cultura, a guardare la Geometria sotto una luce del tutto nuova.

Per comprendere appieno ciò che vogliamo dire vale la pena di osservare che, fino alla crisi di cui parliamo, la Geometria era stata considerata in un certo senso come una scienza avente certi contenuti e certi oggetti. Essa esplicava il proprio rigore nell'enunciare come postulati (o assiomi che dir si vogliano) tutte le proposizioni che non dimostrava, e nel dimostrare rigorosamente in seguito tutte le altre proposizioni che enunciava sotto forma di teoremi. Tuttavia le proposizioni enunciate come "assiomi" erano considerate come "evidenti", e come prese dalla osservazione della realtà esistente di uno "spazio geometrico" che si pensava costituisse l'oggetto della Geometria.

La storia del famoso postulato che viene abitualmente chiamato "postulato delle parallele" di Euclide e dei tentativi della sua dimostrazione fa vedere che non esisteva il minimo dubbio sul fatto che esso enunciasse delle cose "vere".

Si pensava che la realtà osservata, con la sua esistenza, si assumesse --- per così dire --- la responsabilità di garantire della non contraddittorietà dei postulati e sulla possibile esistenza di contraddizione degli enunciati, anche di quelli pronunciati senza dimostrazione.

Inoltre l'insieme delle proposizioni da enunciare sotto forma di postulati era pensato in certo modo come determinato dalla realtà e dalla sua evidenza e quindi non soggetto a scelte.

Per dire il vero la storia mostra che, nei tentativi di dimostrazione del postulato euclideo delle parallele, vari autori avevano assunto certe proposizioni (in modo più o meno esplicito e cosciente) come "più evidenti" del postulato stesso ed avevano tentato di dimostrare quest'ultimo come teorema. Questo fatto tuttavia non aveva stimolato alcun ricercatore, prima del secolo XIX, ad avanzare il dubbio che la scelta degli assiomi potesse, in certa misura almeno, essere libera e non determinata dalla "evidenza" di una realtà osservata.

Questo dubbio non aveva forse mai neppure sfiorato i geometri che vissero prima del secolo XIX; invece dovette essere preso necessariamente in considerazione quando la costruzione delle Geometrie non-euclidee e la dimostrazione della loro perfetta compatibilità logica posero il problema di precisare quale fosse l'aggancio con la realtà che è tipico della Geometria e quindi quale fosse la stabilità del fondamento di "evidenza" sul quale si era pensato fino ad allora di fondare tale scienza. Non vogliamo addentrarci ora nella analisi delle dimostrazioni di compatibilità, ma ci limitiamo ad osservare che alcune di esse presentano un aspetto molto interessante che è dato dal fatto che esse sono basate sulla costruzione di "modelli" immersi in un ambiente euclideo. Di conseguenza si potrebbe dire che la stessa Geometria euclidea, quando sia supposta valida, fornisce gli strumenti per dimostrare che essa non è la sola Geometria che si può costruire.

2. È immediato osservare che la crisi della Geometria, di cui abbiamo detto sommariamente, non si limitava a questa scienza, ma tendeva a coinvolgere tutta la Matematica, perché poneva il problema di determinare che cosa fosse veramente l'oggetto di una teoria matematica e come questa dovesse essere considerata dal punto di vista epistemologico.

Invero quello che veniva a cadere, con la crisi della Geometria, era il concetto di un oggetto specifico di questa scienza, perché ovviamente se esiste un oggetto ben determinato e se è possibile fare una scienza di esso, questa deve risultare coerente; se invece è possibile costruire delle teorie diverse e contraddittorie di un medesimo "oggetto" allora è legittimo il dubbio che tale oggetto non abbia una esistenza, almeno nella accezione comune del termine.

Ora, se si mette in dubbio l'esistenza di un oggetto della Geometria, viene a cadere di conseguenza la sicurezza che tale oggetto garantisca la incontradditorietà dei postulati che si assumono come iniziali per lo svolgimento della scienza; e viene anche a cadere la convinzione che l'insieme di postulati sia --- per così dire --- determinato dalla evidenza della osservazione.

La situazione di grave crisi nasceva quindi dal fatto che era assolutamente necessario assumere un nuovo atteggiamento nei riguardi della Geometria e che tale atteggiamento doveva necessariamente prendere le mosse dalla constatazione della impossibilità di mantenere la concezione classica.

Tutti questi fatti ponevano dei problemi logici che trascendevano i problemi singoli della Geometria per investire, come abbiamo detto, tutta la problematica logica della Matematica in generale.

3. Prima di presentare la situazione come era verso la fine del sec. XIX, va ricordato che nel corso di detto secolo erano spuntati dei nuovi rami sul vetusto tronco della Geometria classica. Ci limi-

tiamo a ricordare la Geometria proiettiva, la quale, sorta per opera di J.V. Poncelet e di G.K.C. v. Staudt, permise tra l'altro di impostare in maniera unitaria certi problemi che erano considerati nella Geometria euclidea come separati e distanti, e permise di dare alle trattazioni geometriche un carattere di grande eleganza e generalità. Nascevano poi anche altre "Geometrie" e questa nascita poneva il problema della ricerca dei fondamenti e della specificazione dell'oggetto di queste scienze; inoltre, veniva confermato il fatto che la Geometria euclidea non è la unica possibile trattazione razionale delle esperienze spaziali dell'uomo.

Vogliamo infine ricordare che un grande passo verso la analisi di questi problemi fu fatto da F. Klein con la famosa dissertazione (comunemente conosciuta come "Programma di Erlangen") nella quale egli utilizzava certe strutture algebriche relativamente recenti (la teoria dei gruppi, intesa come teoria dei gruppi di trasformazioni) per dare una visione unitaria delle varie Geometrie che stavano nascendo dalla fantasia e dal raziocinio dei matematici.

4. Per considerare più davvicino la nuova concezione della Geometria, quale essa appare dalla trattazione dei *Grundlagen*, conviene forse fissare l'attenzione sui procedimenti che hanno permesso ai geometri di dimostrare la compatibilità logica delle Geometrie non-euclidee. Abbiamo infatti detto sopra che la Geometria euclidea può fornire dei modelli per garantire la compatibilità delle Geometrie non-euclidee

Avvertiamo che il termine "modello" vien preso qui nella accezione abituale, quale ci è fornita dal linguaggio comune; tuttavia anche senza aver precisato il termine in modo rigoroso, la nozione di "modello" richiede che si sia stabilito, in modo più o meno esplicito e preciso, il concetto di teoria come sistema puramente formale, e quindi in particolare richiede che si sia acquisito il concetto della Geometria come sistema ipotetico-deduttivo.

Infatti per giungere alla nozione di modello occorre concepire le proposizioni di una teoria come delle proposizioni del tutto "vuote" ed occorre considerare i nomi degli enti che si presentano come dei puri "segna-posti", destinati soltanto a distinguere un ente dall'altro e a chiarirne le proprietà attraverso quel procedimento che viene chiamato di "definizione implicita". In tal modo la teoria è passibile di applicazione a diversi oggetti concreti, senza specificarne alcuno.

In particolare per giungere alla dimostrazione della compatibilità delle Geometrie non-euclidee è stato necessario ricorrere a dei "modelli" nei quali le parole "punto", "retta", "piano" ed altre (insomma le parole abituali della Geometria) avessero significati diversi da quelli abituali e si riferissero ad altri oggetti, diversi da quelli che la abitudine plurisecolare aveva considerato come designati dalle parole stesse.

Ne è scaturita sostanzialmente la verifica di una coerenza formale di certe teorie che prima si adattavano male ad essere interpretate dalla immaginazione abituale.

Va tuttavia ricordato che questo procedimento (e quindi la implicita nozione di sistema puramente formale) era già stato elaborato in Geometria proiettiva, con quella che viene abitualmente indicata come "legge di dualità"; precisamente si era già osservato che le proposizioni della Geometria proiettiva conservano validità quando si scambino tra loro, mediante opportune leggi che non stiamo a ripetere qui, certe parole che costituiscono gli enunciati di teoremi e le loro dimostrazioni. In altri termini già la Geometria proiettiva aveva messo in evidenza il fatto che le parole con le quali si enuncia una teoria possono anche non designare univocamente oggetti determinati; pertanto era diventata ovvia la osservazione che altra era la questione della verità degli enunciati (intesa nella accezione comune di rispondenza alla realtà esistente fuori di noi) altra la nozione di coerenza logica della teoria in sé.

5. In conseguenza della crisi logica ed epistemologica che abbiamo cercato di presentare brevemente, la Geometria viene oggi considerata in modo essenzialmente diverso da quello in cui era

concepita secondo la impostazione classica, cioè viene concepita come sistema ipotetico-deduttivo. Secondo questa concezione le proposizioni iniziali (gli “assiomi”) non vengono più enunciate con la pretesa che siano assolutamente apodittiche e accettate in forza della loro evidenza; perché tale “evidenza” sarebbe fornita dalla osservazione delle proprietà fondamentali di un certo ipotetico oggetto per es. “lo spazio geometrico” che non può esistere (almeno come lo si pensava secondo le concezioni classiche), perché ammetterebbe delle teorie contraddittorie. Quindi gli assiomi sono enunciati semplicemente come “ipotesi” che servono a fondare la trattazione successiva. La scelta di tali assiomi è, a rigore, arbitraria, salve certe condizioni di cui diremo subito. Di fatto tuttavia, se si vuole che la teoria che si costruisce possa ancora con qualche legittimità chiamarsi Geometria, cioè abbia una certa continuità storica con la teoria che durante i secoli è stata chiamata con questo nome, gli assiomi vengono suggeriti dalle esperienze che noi compiamo nello spazio e con gli enti estesi. Tuttavia è soprattutto importante che questi assiomi siano soltanto suggeriti dalla esperienza, non imposti dalla evidenza di questa come non refutabili.

6. Va tuttavia osservato che la concezione della Geometria come sistema ipotetico-deduttivo pone in essere il gravissimo problema di garantire la non contraddittorietà delle proposizioni iniziali (assiomi), assunte come ipotesi di ragionamento, sulle quali si basa tutta la trattazione successiva. La non esistenza infatti di una realtà oggettiva che imponga con la sua evidenza i contenuti delle proposizioni iniziali toglie la garanzia di coerenza interna di queste proposizioni; rimane quindi il dubbio fondamentale che queste proposizioni, anche se visibilmente non contengono contraddizioni palesi, siano però tali da dar luogo a contraddizioni quando se ne deducano delle conseguenze in numero adeguato.

È questa, per esempio, la posizione presa da G. Saccheri S.J. il quale, volendo dimostrare la validità del postulato euclideo della parallela, procedette per assurdo, supponendo valida la negazione del postulato stesso e procedendo poi alla deduzione di tante conseguenze quante a suo parere bastavano per giungere ad una conclusione che egli considerava come assurda. In altro campo, ma con lo stesso spirito, anche le dimostrazioni della compatibilità logica delle Geometrie non-euclidee sono state conseguite con la costruzione di “modelli” di tali Geometrie, come si è detto ripetutamente; in altre parole, si è escogitata, nell’universo della Matematica, una “realtà” che potesse “riempire” le teorie costruite e pertanto garantisse, con la sola ostensione del fatto, la compatibilità delle teorie stesse.

Si deve subito osservare che con questa operazione il problema viene soltanto spostato e che il procedimento non può essere ripetuto indefinitamente; si è quindi condotti ad un certo momento a domandarsi di garantire la validità di ogni ragionamento della Matematica e la fondatezza delle basi stesse di questa scienza.

7. Il nuovo modo di concepire la Geometria, come sistema ipotetico-deduttivo, conduce necessariamente con sé anche un nuovo modo di considerare la definizione degli oggetti della Geometria. A questo proposito può essere molto interessante il confronto tra le proposizioni con le quali iniziano gli *Elementi* di Euclide e i *Grundlagen* di D. Hilbert; questo confronto dà l’idea della distanza che intercede tra le due trattazioni ed i due modi di concepire la Geometria.

Come è noto, gli *Elementi* di Euclide iniziano con la famosa frase: “Il punto è ciò che non ha parte”. L’analisi del significato di questa frase ha dato luogo a discussioni che sono iniziate fino dall’epoca della Geometria greca; tuttavia molti sono stati coloro che hanno considerato questa frase come una definizione del punto, in linea con il canone classico che voleva che si definisse all’inizio di una teoria l’oggetto della teoria stessa.

La trattazione di D. Hilbert inizia con la ben nota “spiegazione” che dice: “Consideriamo tre sistemi di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema ... ecc.”.

È evidente che in questa impostazione si rinuncia del tutto a precisare la natura delle cose che si prendono in considerazione; o meglio ancora, si rinuncia a precisare tale natura all'inizio del discorso; essa viene precisata, ma non univocamente, dagli assiomi che vengono enunciati e non dai nomi che vengono dati alle cose né da un richiamo alla esperienza ed alla realtà esteriore.

A ben guardare questo atteggiamento si tiene anche quando si inventa un gioco, per es. un gioco di carte; invero in questo caso la "vera natura" delle carte viene precisata dalle regole di gioco, più che dalle figure stampate sulle carte stesse: è evidente infatti che la carta segnata Q è diversa a seconda che si giochi per es. a bridge piuttosto che a poker; la sua "vera" natura è precisata dalle regole del gioco che si vuole giocare; la sua definizione quindi è data *implicitamente* dalla enunciazione delle regole del gioco e non da una frase che ne precisi la natura "per genus et differentiam" come volevano le regole della logica classica.

In questo ordine di idee quindi quell'ente chiamato "retta" dalla Geometria euclidea non è lo stesso ente chiamato con lo stesso nome dalla Geometria non-euclidea e ciò per la semplice ragione che gli assiomi dell'una sono diversi dagli assiomi dell'altra Geometria; e sono precisamente gli assiomi che ci dànno le "regole del gioco" con questi "enti" che chiamiamo con i nomi della Geometria classica. Tali assiomi dànno la definizione implicita degli enti che trattiamo, così come le regole del gioco di carte dànno di volta in volta la definizione implicita delle carte che si usano nel gioco.

8. A questo punto si presenta spontaneamente il problema del valore di conoscenza che può avere una teoria la quale --- come la Geometria nell'aspetto secondo cui la presentiamo qui --- si pone come "gioco" logico, alla stregua di un divertimento fatto con le carte o con gli scacchi.

A questo proposito va detto che, accanto a un aspetto di "gioco" o di sistema ipotetico-deduttivo di cui abbiamo parlato, la Geometria ha anche l'aspetto di teoria scientifica per la conoscenza della realtà fisica; in questo senso abbiamo detto poco sopra che gli assiomi si accettano come assiomi geometrici in quanto suggeriti dalle osservazioni che noi facciamo sull'universo che ci circonda.

Tuttavia non si accettano tali assiomi come imposti dalla realtà con una sua "evidenza", né si pretende con le proposizioni enunciate di esaurire tutta la possibile conoscenza della realtà fisica. In questo ordine di idee quindi la Geometria si presenta come "Primo capitolo della Fisica", secondo una arguta definizione. Ma sotto questo secondo aspetto, pur avendo un indubbio valore conoscitivo, essa è sottoposta a tutte le limitazioni che hanno le teorie fisiche: in particolare e in primo luogo i suoi concetti sono tali da rendere la realtà soltanto in misura necessariamente approssimata.

Per fare un esempio e per fissare le idee possiamo ricordare che, come è chiaro anche dalla etimologia della parola "Geometria", questa dottrina può servire per descrivere e per inquadrare logicamente le nostre esperienze che riguardano per es. la figura della Terra. Ma in questo campo avviene per es. che nell'ordine di approssimazione di qualche km quadrato e per i fini della Topografia, la superficie terrestre venga descritta mediante lo schema astratto della figura geometrica che viene chiamata "piano" mentre è ben noto che la superficie della Terra non è applicabile sul piano. Eppure nessuno trae scandalo dal fatto che si usino delle "carte topografiche"; queste sono ovviamente errate, nel senso che non rendono *tutta* la realtà che vogliono rappresentare (nella fattispecie una parte della superficie terrestre) ma sono sufficientemente approssimate per l'uso che se ne vuole fare, perché gli errori che si commettono sono ampiamente trascurabili.

9. Ciò che abbiamo detto fin qui non vuole avere come conseguenza la estromissione della Geometria dal novero delle scienze, per relegarla definitivamente nel paese dei giochi e delle fantasticherie; il nostro discorso invece vuole dare alla Geometria il posto che le spetta, sottraendole quel falso carattere di certezza e chiarezza che alcuni ancora le attribuiscono.

Infatti la certezza conseguita “more geometrico” è semplicemente rigore di deduzione dalle proposizioni primitive, e non vuole in alcun modo essere certezza inconfutabile nei riguardi della realtà fisica.

Vogliamo infine osservare che la caratteristica della Geometria come sistema formale ipotetico-deduttivo ha dato la spinta alla analisi di tutte le implicazioni che derivano dalle possibili scelte di assiomi, scelte divenute consapevolmente arbitrarie, anche se sottoposte alla garanzia di incontradditorietà. Questa analisi ha portato alla costruzione di quelle che vengono chiamate le “Geometrie-non”.

Questi sistemi teorici, che in senso lato vengono chiamate “Geometrie”, sono stati costruiti negando qualcuna delle proposizioni iniziali della Geometria euclidea oppure della Geometria proiettiva classica. Abbiamo così le Geometrie non archimedee, le Geometrie non pascaliane, le Geometrie non desarguesiane, le Geometrie finite e così via.

Occorre rilevare che queste costruzioni non hanno affatto il carattere di puro “divertimento” logico che qualcuno potrebbe attribuire loro, in base ad una impressione superficiale ed ad una analisi affrettata.

Invero da una parte esse costituiscono uno degli aspetti della analisi logica della Geometria, mettendo in evidenza fino al fondo le conseguenze che si possono trarre dalla ammissione o dalla negazione di certe premesse e la equivalenza logica di alcuni enunciati che appaiono distanti tra loro. D’altra parte il loro studio ha costituito uno stimolo importante per mettere in evidenza quella stretta interdipendenza tra la Geometria (o meglio le varie Geometrie) e le strutture algebriche che è una delle basi della impostazione attuale della Matematica e che era stata intuita da F. Klein.

È questo un ulteriore esempio del fatto che la Geometria, anche se appare smembrata come dottrina (quando sia vista con i canoni euclidei), anche se appare a qualcuno destituita del suo trono di scienza inconfutabile e assolutamente certa (quando sia vista con i canoni di un ingenuo fisicismo geometrizzante) è tuttavia in grado di fornire preziose idee alle altre scienze.

Ritorneremo su questo argomento nella terza parte di questa presentazione; ci basti qui ricordare che la crisi della Geometria ha preceduto ed originato la crisi di una certa mentalità, che si potrebbe chiamare euclideo-newtoniana, la quale nutriva (in modo più o meno cosciente) la ingenua pretesa di rendere tutta la realtà con la massima precisione: oggi il fisico non pretende di dare valore assoluto alle sue teorie, ma le adotta in quanto adeguate a rendere certi aspetti della realtà e le riforma o le abbandona senza rimpianti quando gli appaiono inadeguate per rendere la massa dei risultati sperimentali.

Non si pretende più che la scienza si amplii crescendo soltanto di mole e conservando indefinitamente la propria struttura, così come non si pretende più che la Geometria sia semplicemente una deduzione indefinita da certi assiomi --- quelli di Euclide --- che si pongono come verità inconfutabili.

La evoluzione della scienza ci appare oggi come molto più plastica e molto più umile. E se anche questa sola fosse la lezione che la Geometria ha dato alla scienza, ciò basterebbe, a parere di chi scrive, per conferirle un ruolo la cui importanza non sarà mai sufficientemente valutata.

[seguono le parti II e III indicate i nota 36]