Il significato preciso del termine « s. » usato dalla geometria, e quindi la natura precisa dell'oggetto di questa scienza (oggetto che chiameremo brevemente « s. geometrico »), non è facilmente determinabile; comunque non si può non rilevare che tale significato ha subito notevoli sviluppi nei secoli, in concomitanza con il progresso dell'intera scienza matematica. La crisi più profonda si è verificata nella seconda metà del sec. XIX, in conseguenza dell'assicurata indimostrabilità del postulato euclideo delle parallele. In ciò che segue si darà un breve cenno dell'evoluzione storica del concetto di s. geometrico e anche qualche idea delle concezioni che la geometria odierna ha dello s. e delle teorie che con tali concezioni sono collegate.

I. Lo spazio per la geometria classica. – Con l'espressione « geometria classica » intendiamo indicare la geometria quale si è sviluppata per opera della civiltà greca ed è stata trasmessa, anche attraverso la cultura araba, all'Europa medievale. Buona parte del contenuto di tali conoscenze geometriche costituisce il nerbo delle conoscenze geometriche dell'uomo di media cultura. La concezione dello s. che sta alla base di queste dottrine è, naturalmente, una concezione ingenua ed acritica : sappiamo bensì che le questioni sulla natura dello s. sono state dibattute dalla filosofia classica; resta tuttavia difficile determinare fino a qual punto tali questioni, dibattute in sede filosofica, abbiano influenzato lo sviluppo della geometria e le sue concezioni. P. es., i classici paradossi (« Achille e la tartaruga », ecc.) possono indicare che vi è stato in sede filosofica il tentativo di passare dall'idea dello s. indefinitamente divisibile, fornita dalla immaginazione che elabora i dati immediati del senso, ad una sua fondazione razionale o ad una sua critica radicale; il teorema di Pitagora può essere considerato anche come una risposta a questioni di questo tipo : infatti esso porta come conseguenza l'esistenza di coppie di grandezze incommensurabili, cioè di coppie di grandezze che non posseggono nessun sottomultiplo comune. Ne segue che non possono esistere « atomi » (per così dire) di s., e quindi che la indefinita divisibilità è condizione necessaria per la sussistenza di una dottrina geometrica dello s. che sia in continuità con i dati del senso. Tuttavia con Euclide (verso il 300 a. C.) ci è dato un trattato di geometria che è ammirevole per rigore di logica deduttiva, ma nel quale la struttura dello s. è accettata come un « dato » e, in tale qualità, presa come punto di partenza.

È noto che il trattato euclideo inizia con delle proposizioni che hanno l'aspetto di definizioni; p. es.: « Punto è ciò che non ha parti », « Linea (è) una lunghezza senza larghezza » ... « Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti »... Queste proposizioni ci lasciano insoddisfatti, talvolta per la loro oscurità (come per il caso della proposizione riguardante la retta), talaltra perché sembrano ricondurre un concetto geometrico (p. es. « linea ») ad altri che a prima vista appaiono del tutto chiari, ma che si rivelano vaghi e difficilmente precisabili ad una critica approfondita.

Si hanno poi nel trattato euclideo certe proposizioni primitive, che sono indicate alcune come « assiomi », altre come « postulati ». Molto si è discusso per indagare e precisare i fondamenti di tale distinzione; quasi certamente essa è dovuta al fatto che Euclide stesso riconosceva un diverso « contenuto di verità » nelle proposizioni delle diverse specie. È stato notato che gli assiomi hanno come contenuto delle verità di carattere generale (logico o metafisico): p. es.: «(Cose) uguali ad una stessa sono uguali tra loro ». Invece i postulati hanno un carattere più particolare ed un contenuto che riguarda più da vicino la geometria, perché sono affermazioni di proprietà geometriche o affermazioni della possibilità di effettuare certe operazioni geometriche; p. es.: «Si postula che una retta limitata possa essere prolungata indefinitamente ». È noto che tra i postulati di Euclide figura il famoso quinto, che afferma sostanzialmente l'unicità della retta parallela ad una retta data e passante per un punto arbitrario fuori di essa.

Le discussioni attorno a quest'ultimo postulato sono durate, come è noto, circa venti secoli, iniziandosi con i primi commentatori dell'opera euclidea; tali discussioni ci danno un indizio abbastanza valido sul carattere che i postulati rivestivano per la geometria classica : infatti le critiche elevate al postulato euclideo delle parallele si basavano sulla circostanza che esso era considerato « poco evidente ». Non entriamo nel merito di tali critiche, né vogliamo qui cercare di sondare i loro fondamenti psicologici; ci basti rilevare che i postulati erano dunque concepiti come « verità evidenti », quasi delle osservazioni elementari che ogni uomo eseguisce sullo « s. » e che si accettano, così come non si può evitare di vedere la luce se si aprono gli occhi sani in pieno sole. Quindi, anche se fin dai primi commentatori di Euclide si tentò di dare una dimostrazione del postulato delle parallele (sostituendolo con altri « più evidenti » dai quali esso potesse venir dedotto come teorema), tuttavia nessun dubbio si ebbe che il contenuto del postulato stesso fosse una « proprietà dello s. » : una proprietà di un ente ben determinato, le cui caratteristiche non possono presentare nulla di dubbio o di oscuro. Questa concezione acritica fu ereditata dalla geometria del medioevo e del primo Rinascimento; essa è stata sovvertita dallo sviluppo storico della geometria in particolare e della matematica in generale.

II. La geometria analitica. – L'invenzione della geometria analitica, che viene comunemente attribuita a Descartes (si fa risalire la nascita di questa dottrina al 1637, anno della pubblicazione della *Géometrie*), gettò i primi germi di nuove idee, sulle quali si fondò, in parte almeno, l'evoluzione e la critica della concezione classica dello s. geometrico.

La geometria analitica nacque in origine come metodo : infatti con essa si riesce a tradurre le relazioni geometriche, riguardanti i punti dello s., in equazioni o diseguaglianze, cioè in relazioni tra i numeri che rappresentano i punti. Quindi i problemi di geometria diventano problemi di algebra o di analisi matematica, e per la loro risoluzione possono essere invocate tutte le risorse di queste due scienze. In tal modo però si apre anche la via per una evoluzione del concetto di s. geometrico, evoluzione che ha come prima occasione il fatto che le scienze invocate come ausiliarie della geometria hanno evidentemente una loro struttura, una loro logica ed un campo di oggetti diverso da quello della geometria. Si intravvede quindi subito come l'aver chiamato, attraverso il metodo della geometria analitica, altre scienze ad interferire nel campo della geometria abbia portato infine ad una modificazione delle concezioni basilari sull'oggetto stesso della geometria.

III. Le geometrie non euclidee. – È noto che la questione del postulato euclideo delle parallele ebbe una svolta decisiva per opera del gesuita Girolamo Saccheri (1667-1733), che cercò una dimostrazione per assurdo del postulato stesso. Egli costruì a tal fine un insieme di proposizioni basate sulla negazione del postulato euclideo, che è il primo esempio storico di geometria non euclidea. Altri sviluppi vennero nei secoli successivi (v. GEOMETRIA NON EUCLIDEA); da nessuno di tali sviluppi uscì l'assurdo (che il Saccheri cercava e che credette erroneamente di aver raggiunto). Si poteva tuttavia sempre dubitare che l'assurdo si nascondesse più in là del punto che era stato raggiunto nella catena di deduzioni, che cioè una dottrina geometrica, basata sulla negazione del postulato euclideo, non fosse intrinsecamente coerente. Tale dubbio, come è noto, venne dissipato nella seconda metà del sec. XIX, anche per mezzo di strumenti forniti dalla geometria analitica. Venne così inquadrata la geometria classica come un caso particolarissimo nell'ambito di una dottrina geometrica molto più generale, e venne così aperta la strada per una concezione del tutto nuova dei « postulati » della geometria e quindi dell'idea di s. geometrico.

Infatti, prendendo le mosse dall'acquisita indimostrabilità del postulato euclideo della parallela, si giunse facilmente a dover ammettere una certa arbitrarietà nella scelta dei postulati della geometria. Ne consegue, allora, che questi non esprimono le proprietà per sé evidenti di un ente ben determinato, ma solo, al massimo, proposizioni che descrivono (entro determinati limiti di approssimazione) le proprietà degli oggetti esterni che ci circondano. La critica investì inoltre i concetti fondamentali (punto, linea, superficie....) della geometria, rilevando le imprecisioni e le oscurità di quelle che erano state prese come definizioni di essi. Si giunse così ad affermare, anzitutto, la necessità di stabilire chiaramente, per ogni trattazione, il complesso dei concetti primitivi (che si rinuncia a definire), e poi a rilevare un certo grado di arbitrarietà anche nella scelta di questi.

IV. GENERALIZZAZIONI DELLA CONCEZIONE CLASSICA DELLO SPAZIO GEOMETRICO. – Accanto alle profonde modificazioni provocate nel concetto di s. geometrico dalle geometrie non euclidee, vennero maturandosi anche le influenze più direttamente generate dai metodi della geometria analitica. Queste furono sostanzialmente provocate dall'osservazione delle modificazioni che subivano le rappresentazioni degli enti geometrici e le equazioni (traducenti problemi geometrici) al cambiare del sistema di riferimento. In altre parole, il metodo della geometria analitica conduceva necessariamente alla ricerca di una « verità geometrica » o di un « contenuto geometrico » sottostante alle diverse rappresentazioni, variabili con il variare delle convenzioni e dei sistemi.

Fondamentale per questo ordine di idee è il concetto di « gruppo di trasformazioni ». Per ben comprendere ciò che esporremo succintamente, occorre tener presente che, per la matematica moderna, la parola « gruppo » che entra nella frase ora citata ha un significato preciso e non è sostituibile con sinonimi, come nell'accezione comune. Precisamente l'espressione « gruppo di trasformazioni » significa « un insieme di trasformazioni tale che : *a*) all'insieme appartiene ogni trasformazione che sia il prodotto di due altre che gli appartengono; *b*) all'insieme appartiene anche l'inversa di ogni sua trasformazione ». P. es. i cambiamenti dei sistemi di riferimento danno un gruppo di trasformazioni. Questo concetto tuttavia è ampliabile in senso molto più generale e permette di indagare a fondo le proprietà dello s. geometrico. Ci sforzeremo di dare qui un cenno di tale ordine di idee, almeno nella sua struttura fondamentale.

Si è visto che i metodi della geometria analitica permettono di far corrispondere ad ogni punto dello s. una terna di numeri (le coordinate del punto) e viceversa. Tuttavia non si può asserire che basti un insieme di terne di numeri, suscettibili di variazione continua, per rappresentare uno s. geometrico che corrisponda alle esperienze comuni da noi eseguite sugli oggetti che ci circondano. Con il linguaggio matematico si suol dire che un insieme di terne di numeri costituisce soltanto uno « s. numerico »; per ottenere dallo « s. numerico » lo « s. geometrico » occorre (per così dire) « organizzare » lo s. numerico stesso; ciò si ottiene con lo stabilire un gruppo di trasformazioni che si conviene di poter eseguire sulle terne di numeri. Nasce allora una « geometria », cioè nasce e prende senso il problema di ricercare e determinare quelle proprietà dell'insieme di terne di numeri che rimangono invariate di fronte a tutte le trasformazioni del gruppo.

Non è possibile enumerare qui tutte le conseguenze delle idee fondamentali che abbiamo tratteggiate. Ricordiamo solo che esse riguardano due campi : l'uno di carattere strettamente teorico-matematico, l'altro di carattere filosofico e psicologico.

Nel campo teorico-matematico le considerazioni esposte qui sommariamente ebbero una grande fecondità, generando un'intera branca della geometria, e spingendo le loro conseguenze molto lontano, anche nelle scienze che studiano la natura, perché portarono all'impalcatura matematica della relatività einsteiniana.

L'inizio dell'ordine di idee a cui stiamo accennando si può far risalire ad una memoria di B. Riemann del 1854 (*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*). Sua caratteristica fondamentale è la generalizzazione massima del concetto di « gruppo di trasformazioni » e di « sistema di coordinate ». Infatti viene chiamato sistema di coordinate un qualunque sistema di convenzioni che permetta di far corrispondere ad ogni punto dello s. una terna di numeri, con la sola limitazione che a punti diversi corrispondano terne diverse e che a punti vicini corrispondano terne formate da numeri che differiscono di poco. Il gruppo di trasformazioni, poi, comprende tutti i possibili cambiamenti di cosiffatte convenzioni.

Si introducono poi delle convenzioni per stabilire una « geometria nell'infinitesimo », cioè per « organizzare » le terne di numeri che differiscono di poco da una terna data. Ciò si fa abitualmente introducendo una espressione (forma differenziale quadratica definita positiva) formata con i differenziali delle coordinate, e che si conviene di assumere come esprimente la distanza tra due punti infinitamente vicini, e pertanto invariante di fronte ad un qualunque cambiamento di coordinate. Si ottiene così un insieme di proprietà che sono pure invarianti rispetto ad un qualunque cambiamento di sistema di coordinate, e che pertanto possono essere chiamate proprietà geometriche dell'intorno di un punto. Una volta stabilita una geometria dell'infinitesimo, si passa poi alla « connessione », cioè si passa a dar senso a proprietà geometriche di tutte le terne di numeri, stabilendo delle leggi di confronto tra le geometrie degli intorni di punti diversi. P. es., data una direzione in un punto A ed una seconda direzione in un secondo punto B, si danno delle leggi e delle operazioni per stabilire se tali direzioni possano essere considerate identiche oppure quale sia il loro divario angolare.

Nella cosiddetta « geometria riemanniana » la legge di confronto tra due direzioni in due punti diversi è dedotta dalla sola conoscenza della forma differenziale che dà la distanza di due punti infinitamente vicini; la geometria riemanniana appare quindi come la più naturale generalizzazione all'intero s. dei procedimenti stabiliti come validi in una piccola porzione di esso. Tuttavia la legge di connessione tra le geometrie dei varî intorni dei punti non è necessariamente legata alla legge che organizza la geometria nell'intorno di un singolo punto; si danno pertanto delle geometrie per le quali le due leggi sono del tutto indipendenti. Esse si presentano, quindi, in questo senso come generalizzazioni della geometria riemanniana.

Ma le conseguenze delle nuove impostazioni della geometria non sono soltanto di carattere strettamente teorico-matematico. Si può anche dire che sono state illuminate, così, tanto la genesi psicologica dei concetti geometrici, quanto la loro portata. Infatti le esperienze sui corpi esterni e sulla loro forma e sulle loro dimensioni, che portano ai concetti geometrici primitivi, possono venir classificate in vari gruppi; e qui la parola « gruppo » viene a prendere un significato che, se non è precisamente quello della matematica, è però legato ad esso da una strettissima analogia. Recenti ricerche di psicologia e pedagogia hanno portato ad analizzare i procedimenti coi quali si formano nella mente infantile i concetti geometrici, per astrazione da classi di esperienze diverse e per constatazione di « invarianza » di fronte a varie operazioni: cambiamenti di posto, maneggiamenti vari, ecc....

L'evoluzione che abbiamo brevemente tratteggiato e le analisi derivate da parte dei matematici e dei logici hanno portato alla concezione attuale della geometria e quindi dello s., suo oggetto. Tale concezione è caratterizzata dall'accentuarsi di una duplicità di aspetto per la geometria. Si ha un primo aspetto di questa come scienza puramente astratta ed ipotetico-deduttiva. Scienza che si potrebbe assimilare ad un puro gioco logico, fatto su concetti astratti e convenzionali : il contenuto di tali concetti, le leggi fondamentali e le relazioni iniziali tra di essi non possono essere dei « dati », ma vengono scelti liberamente, con la sola condizione della non contraddittorietà. La giustificazione del nome di geometria, dato a tali sistemi di idee e di deduzioni, si fonda su analogie (talvolta giudicate dal profano molto deboli e lontane) e sul fatto che tali ricerche sono in continuità storica con quelle che una volta venivano classificate nel campo della geometria. Inoltre i concetti e le loro relazioni sono, almeno in parte, suggeriti (non imposti) dalle esperienze spaziali, di modo che l'immaginazione spaziale può avere una larga parte nello sviluppo di una tale scienza, se pure con libere divagazioni ed ardite creazioni.

Un secondo aspetto è quello della geometria come scienza dello « s. reale », quello, per intenderci, in cui viviamo ed eseguiamo le esperienze della vita comune e gli esperimenti delle scienze della natura. Anche in questo campo si potrebbe dire che vi è una certa arbitrarietà nella scelta delle teorie da applicare, e che nessuna geometria si può dimostrare esser la « geometria naturale » di tale s. Infatti noi esperimentiamo su corpi reali estesi, e, fra questi, nessuno realizza pienamente uno fra i concetti di quella geometria ideale o astratta cui si riferisce l'aspetto sopra descritto come primo. Invero il verificare se un dato corpo (non una «porzione di s.», sulla quale è evidentemente impossibile eseguire esperimenti) realizza o meno un concetto della geometria ideale richiede un'esperienza concreta, la quale non può mai essere eseguita con precisione assoluta; rimane sempre una indeterminazione, una radicale incertezza di misura che non può mai essere ridotta a zero : tale eventualità è esclusa in base alle conoscenze che la scienza attuale ha sulla struttura della materia. Pertanto resta a concludere che i corpi estesi che ci circondano non determinano univocamente una geometria dello « s. reale », ma che invece le loro proprietà possono rientrare in più di uno fra gli schemi teorici costruiti dalla geometria astratta. Lo stesso si può dire quindi di un eventuale «s. reale», che fosse immaginato come supporto delle proprietà di estensione dei corpi che noi sperimentiamo.

V. Ulteriori generalizzazioni del concetto di spazio. – La geometria non-euclidea e la geometria analitica diedero lo spunto ad ulteriori generalizzazioni del concetto di s. geometrico; tali generalizzazioni si possono considerare di carattere formale, basate sull'analogia più che su esperienze eseguite con oggetti del mondo esterno; esse hanno tuttavia molta importanza per la matematica, la quale a sua volta fornisce oggi la struttura concettuale fondamentale per molte altre scienze. Pertanto esporremo qui brevemente anche qualcuno tra i più importanti aspetti delle generalizzazioni del concetto di s. geometrico che trovano cittadinanza nella moderna matematica.

Una prima generalizzazione riguarda il numero delle dimensioni. Ammettendo che questo possa essere maggiore di tre, si ottengono i cosiddetti « iperspazi » oppure le « varietà » ad n dimensioni. La nomenclatura non è del tutto uniforme; tuttavia possiamo dire che abitualmente si riserva il nome di iperspazio ad un ente che è la generalizzazione dell'ordinario s. nel quale si ritiene valida la geometria euclidea. Si definisce « punto » dell'iperspazio un gruppo di n numeri; le trasformazioni che si ritengono ammissibili sono date da formule che risultano immediate generalizzazioni di quelle valide per tre coordinate : la distanza tra due punti e l'angolo di due rette si definiscono mediante espressioni che pure generalizzano formalmente quelle valide per tre dimensioni e risultano invarianti per i cambiamenti di coordinate ammessi.

Un ulteriore passo viene compiuto quando si ritengono ammissibili delle trasformazioni di coordinate più generali, analoghe a quelle che nello s. tridimensionale danno le trasformazioni della geometria proiettiva. Perde allora senso il concetto di distanza tra due punti e angolo tra due rette, ma risultano valide certe altre proprietà più generali, le quali inoltre sono formulate mediante espressioni che conservano senso anche se i numeri che vi figurano son complessi. Si ottiene così la geometria proiettiva degli iperspazi (complessi), la quale a sua volta costituisce un capitolo della geometria algebrica. Si suole invece dare il nome di « varietà » ad n dimensioni ad un insieme di gruppi di n numeri, che si organizza assegnando una « geometria nell'infinitesimo », col fissare una forma differenziale quadratica atta a dare la distanza di due punti infinitamente vicini, e assegnando una « connessione » che permetta di confrontare o collegare le varie « geometrie » degli intorni dei singoli punti.

Questi sistemi di geometria, o altri analoghi, hanno avuto grandissimo sviluppo nella matematica, anche per le conseguenze da essi portate nel campo delle scienze della natura. È noto infatti che A. Einstein si servì delle formulazioni della geometria riemanniana a 4 dimensioni per erigere in sistema la sua teoria della relatività generale; nello stesso ordine di idee egli stesso ed altri scienziati hanno ricercato una teoria unitaria, una teoria cioè che desse ragione di tutti i fenomeni (macroscopici) dell'universo: tanto i fenomeni di gravitazione che quelli elettromagnetici.

Per ben capire la connessione tra le idee dell'Einstein e queste geometrie, occorre ricordare che per l'Einstein è postulato fondamentale che non esistano riferimenti privilegiati per la descrizione matematica dell'universo, e che quindi le leggi fisiche debbano essere espresse in modo tale che la loro formulazione matematica sia sempre la stessa per qualunque riferimento. Una tale esigenza è perfettamente analoga a quella ricerca della «verità geometrica» cui accennavamo dianzi; ricerca cioè delle proprietà geometriche come proprietà invarianti di fronte alle trasformazioni di un gruppo. Nasce di qui quella «geometrizzazione della fisica», che ha formato uno degli aspetti più sconcertanti delle teorie einsteiniane, ed è spesso male interpretata da chi non ha familiarità con gli strumenti matematici usati e con le correnti di idee dalle quali, più o meno consapevolmente, ha tratto origine la relatività.

Per completezza ricorderemo infine che anche altri campi della matematica usano il linguaggio geometrico, per applicarlo ai loro oggetti, dare maggiore suggestione agli enunciati e forse anche favorire con l'immaginazione spaziale la fantasia creatrice. Si hanno così, p. es., i cosiddetti «s. funzionali» dell'analisi matematica: s. ad infinite dimensioni, atti a rappresentare funzioni (nel senso dell'analisi) aventi determinate proprietà.

L'estensione del linguaggio geometrico a tali enti potrebbe sembrare eccessivamente ardita, se non vi fossero giustificazioni, fondate su proprietà degli enti rappresentati che sono in stretta analogia con quelle dei punti dello s. geometrico. Ricordiamo, p. es., le proprietà che ha nello s. la distanza tra due punti: si ha che: *a*) la distanza tra due punti è sempre positiva, ed è nulla soltanto se i due punti coincidono; *b*) detti A e B due punti, la distanza di A da B è uguale alla distanza di B da A; *c*) detti A, B, C tre punti, la distanza di A da C non è maggiore della somma delle distanze di A da B più quella di B da C. Orbene, si sono costruiti degli insiemi di enti matematici tali che, ad ogni coppia di enti dell'insieme, si riesce ad aggregare un numero avente le proprietà *a*), *b*), *c*) sopra enumerate. Viene naturale chiamare tale numero «distanza» tra i due enti, e l'insieme degli enti uno «s. metrico».

Sulla via delle generalizzazioni, come quella di cui abbiamo dato ora esempio, i matematici si sono spinti molto lontano; i risultati ottenuti hanno un interesse grandissimo, ma che riguarda da vicino soltanto gli specialisti.

BIBL.: Per le trattazioni riguardanti insieme l'aspetto filosofico e didattico del modo in cui il problema dello s. in geometria è posto dalla matematica moderna: *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte da F. ENRIQUES, Bologna 1923; *Enciclopedia di matematiche elementari*, a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI, Milano 1930. Per le trattazioni riguardanti l'aspetto logico e matematico del problema v. la bibl. alla voce MATEMATICA. Si aggiungono qui le opere più strettamente aderenti al tema: D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed., Lipsia 1930; F. GONSETH, *La géometrie et le problème de l'espace*, 6 voll., Neuchâtel 1952-55. Per quanto riguarda infine le estensioni del concetto di s., si rimanda ai trattati specialistici, tra i quali: E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed., Messina 1923; L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ed., Bologna 1923; L. P. EINSENHART, *Non Riemannian Geometry*, Nuova York 1927; O. VEBLEN, *Analysis Situs*, ivi 1931; G. FANO, *Geometria non euclidea*, Bologna 1935; P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*, Berlino 1935; L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton 1949.

C. F. Manara