Autori vari

Scritti in onore di Giovanni Melzi

a cura di
Carlo Felice Manara - Mario Faliva - Mario Marchi

ESTRATTO

VITA E PENSIERO
Pubblicazioni dell'Università Cattolica

Un sistema di assiomi per un continuo unidimensionale aperto

Carlo Felice Manara (*)

§1 - *Legenda*

1 - Nel seguito G indicherà un insieme che possiede almeno 4 elementi.

2 - Gli elementi di G saranno indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, alle quali potranno essere apposti uno o più apici a destra:

$$a, a', a'', b, b', b'', c \ldots x, y, z, u, \quad \&c \quad .$$

Gli elementi di G potranno nel seguito essere chiamati convenzionalmente anche "punti".

Le operazioni su elementi di G saranno indicate con lettere majuscole. L'identità sarà indicata con la lettera I.

Si scriverà il simbolo di un'operazione dopo il simbolo dell'elemento sul quale essa opera: così per esempio il simbolo:

$$xS(a)$$

indicherà quell'elemento di G in cui l'operazione $S(a)$ porta l'elemento x.

Per il prodotto (applicazione successiva) di operazioni su G vale ovviamente la proprietà associativa; inoltre si scriverà:

$$xS(a)S(b)$$

per indicare l'elemento:

$$[xS(a)]S(b) \quad .$$

3 - I quantificatori universale ed esisteziale saranno indicati premettendo i simboli "$\forall$" ed "$\exists$" rispettivamente alle lettere interessate; così per esempio:

$$\forall x P(x)$$

(*) Emerito dell'Università degli studi di Milano.

sarà letto: "per tutti gli x è vera $P(x)$" o anche, "a tutti gli x compete il predicato P". E per esempio:

$$\exists x P(x)$$

sarà letto: "esiste (almeno) un x per cui $P(x)$ è vera" o anche "il predicato P compete ad (almeno) un x".

4 - Il connettivo "et" di congiunzione tra due propsizioni sarà indicato scrivendo il simbolo "&" tra i simboli delle proposizioni stesse, come segue:

$$P \& Q \ .$$

5 - Il connettivo "vel" di alternativa tra due proposizioni verrà indicato interponendo il segno "$\vee$" tra i simboli delle proposizioni stesse, come segue:

$$P \vee Q \ .$$

6 - P e Q essendo due proposizioni, la formula:

$$P \Rightarrow Q$$

indicherà che dalla ipotesi P si deduce la Q.

7 - P e Q essendo due proposizioni, la formula:

$$P \Leftrightarrow Q$$

indicherà che dalla P si deduce la Q e viceversa, ossia che la validità di una delle proposizioni è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'altra.

8 - Il simbolo "$\neg$" scritto prima del simbolo di una proposizione indicherà la negazione della proposizione stessa; quindi:

$$\neg P$$

indica la proposizione che è falsa se P è vera, e che è vera se P è falsa.

9 - Il simbolo "=" posto tra i simboli di due elementi di F indicherà che questi ultimi coincidono, cioè che i due simboli sono nomi diversi di uno stesso elemento di G. Invece, se "=" è posto tra i simboli di due operazioni, indicherà la coincidenza

dei risultati delle operazioni stesse per ogni elemento di G. Quindi per esempio scrivendo:

$$S(a) = S(b)$$

si intenderà indicare la validità della proposizione:

$$x\{xS(a) = xS(b)\} \quad .$$

Se fra due enti (elementi di G oppure operazioni) non sussiste la relazione "$=$", si indicherà tale fatto col simbolo "$\neq$" scritto tra i simboli degli enti in parola; così per esempio la formula:

$$x \neq y$$

indicherà che gli elementi x ed y non coincidono.

§2

Gli assiomi che enunceremo hanno lo scopo di fornire la definizione implicita di certe operazioni sugli elementi di G.

Ax.1 - $\forall x[xS(x) = x]$.

L'operazione "$S(x)$", funzione del punto x, ha sempre x come punto unito.

Ax.2 - $\forall a, b\{(a \neq b) \Rightarrow \forall x[xS(a) \neq xS(b)]\}$.

Considerati due elementi qualunque a e b, se essi sono diversi, le operazioni $S(a)$ ed $S(b)$ hanno per ogni x risultati diversi.

Teorema 1. $\forall x, y\{(x \neq y) \Rightarrow [y \neq yS(x)]\}$.

L'elemento x è l'unico elemento unito per l'operazione $S(x)$.

Dim. La dimostrazione segue da Ax.2, ponendo x al posto di a, y al posto di b e di x, e tenendo conto di Ax.1.

Corollario - $[\exists x\{xS(a) = xS(b)\}] \Rightarrow (a = b)$;

se esiste un punto x tale che si abbia $xS(a) = xS(b)$, allora i due punti a e b coincidono.

Dim. La proposizione è la contronominale di Ax.2, ed è quindi vera quando l'assioma sia accettato. QED.

Ax.3 - $\forall x, y\{xP(y)P(y) = x\}$;

ogni operazione $P(y)$ è involutoria.

Tenendo conto di quanto è stato detto nel N.9 del §1, l'Ax. può essere scritto nella forma:

$$\forall y\{P(y)P(y) = [P(y)]^2 = I\} \quad . \tag{1}$$

Ax.4 - $\forall x, y\exists z\{y = xS(z)\}$;

data una coppia qualunque di punti x, y esiste un punto z tale che si abbia:

$$y = xS(z) \quad . \tag{2}$$

Osservazione 1 - Se è $x = y$ si ha $z = x = y$, in forza di Ax.1. Inoltre dalla (1) e da (2) si ha:

$$x = yS(z) \quad . \tag{3}$$

Pertanto il punto z tale che sussistano le (2), (3) è funzione simmetrica della coppia di punti x, y.

Convenzione - Il punto z, funzione di x ed y, tale che valgano le (2) e (3), sarà indicato con il simbolo:

$$z = m(x, y) = m(y, x) \quad . \tag{4}$$

Le operazioni del tipo della $S(x)$ saranno chiamate nel seguito "simmetrie" su G, ed il punto m, simbolizzato dalla (4), sarà anche chiamato "centro" della simmetria $S(z)$, che compare nelle (2) e (3).
Indicheremo semplicemente con S l'insieme delle simmetrie su G. E' chiaro che esiste una bijezione tra gli insiemi G ed S.

Ax.5 - $\forall x, y, z \exists u \{S(x)S(y)S(z) = S(u)\}$.
Il prodotto di tre operazioni di S è ancora un'operazione di S.

§3

Indichiamo con T l'insieme delle operazioni su elementi di G, ciascuna delle quali è prodotto di due operazioni di S.

Teorema 2 - Un'operazione di T che abbia un elemento unito è l'identità.

Dim. Supponiamo che si abbia, per un elemento x di G:

(5) $$xS(a)S(b) = x \quad .$$

Operando a destra su entrambi i membri della (5) con $S(b)$ e tenendo conto di (1) si ottiene:

(6) $$xS(a) = xS(b) \quad ;$$

di qui, per il Corollario del Teorema 1 si ha:

(7) $$b = a \quad ;$$

e di qui, ancora per (1), si ha l'enunciato. QED

Osservazione 2 - Si ha ovviamente:

(8) $$\forall a, b\{[S(a)S(b)][S(b)S(a)]\} = I \quad .$$

Quindi ogni operazione dell'insieme T ha una inversa.

In forza di Ax.5 e della associatività del prodotto si conclude quindi che T è un gruppo.

Teorema 3 - Un'operazione del gruppo T è univocamente determinata dalla condizione di portare un elemento x in un dato elemento y.

Dim. Si abbia, per ipotesi:

(9) $$xS(a)S(b) = y \quad ; \quad xS(p)S(q) = y \quad ;$$

e di qui, per il Teorema 2:

(10) $$S(a)S(b)S(q)S(p) = I \quad ;$$

ne consegue che si ha:

(11) $$S(a)S(b) = S(p)S(q) \quad .$$

QED

Osservazione 3 - Dal Teorema precedente si ha che ogni operazione del gruppo può essere rappresentata in più modi come prodotto di due operazioni dell'insieme S.

Convenzione - Dati due elementi x, y, l'operazione di T che porta x in y verrà anche indicata con il simbolo "$T(x,y)$". Si avrà quindi:

(12) $$xT(x,y) = y \quad .$$

Teorema 4 - Il gruppo T è abeliano.

Dim. Siano x, y, z tre elementi di G; sia u un elemento, esistente per Ax.4, tale che si abbia:

(13) $$xS(u) = y \quad ,$$

e sia w un elemento analogo, tale che si abbia:

(14) $$yS(w) = z \quad .$$

Tenuta presente l'Oss. 3, si ha:

(15) $$T(x,y) = S(u)S(y) \quad ; \quad T(y,z) = S(y)S(w) \quad ,$$

e quindi:

(16) $$T(x,y)T(y,z) = S(u)S(y)S(y)S(w) = S(u)S(w) \quad .$$

Ma per Ax.5 si ha:

(17) $$[S(y)S(w)S(u)][S(y)S(w)S(u)] = I \quad ;$$

e da questa si trae:

(18) $$S(u)S(w) = [S(y)S(w)][S(u)S(y)] = T(y,z)T(x,y) \quad .$$

Il confronto tra la (16) e la (18) dimostra il teorema. QED

§4

Sia $P(x, y)$ una funzione definita sull'insieme delle coppie ordinate x, y di elementi distinti di G, avente valore 1 oppure -1.

La funzione P è definita implicitamente dal seguente assioma:

Ax.6 Indicati con x, y, z degli elementi di G tutti distinti tra loro due a due, tali cioè che sia:

$$(19) \qquad (x \neq y)\&(y \neq z)\&(z \neq x)$$

si ha:

$$(i) \qquad P(x, y) \in \{1, -1\}$$

$$(ii) \qquad P(x, y) \cdot P(y, x) + 1 = 0$$

$$(iii) \qquad P(x, y) \cdot P(y, z) + P(y, z) \cdot P(z, x) + P(z, x) \cdot P(x, y) + 1 = 0 \quad .$$

Con le notazioni esposte nella Convenzione (4), si ha:

$$\textbf{Ax.7} \qquad \forall x, y\{P(x, m) \cdot P(y, m) + 1\} = 0 \; .$$

Convenzione - Data una qualunque coppia di elementi distinti di G, indicheremo con il simbolo "$Intv(x, y)$" l'insieme degli elementi di G definito dalla:

$$(20) \qquad Intv(x, y) = \{z | P(x, z) \cdot P(y, z) + 1 = 0\} \quad .$$

Osservazione 4 - In forza di Ax.7 l'insieme $Intv(x, y)$ non è vuoto.

Osservazione 5 - Da Ax.6 si trae che per la funzione $P(x, y)$ vale la relazione:

$$(21) \qquad P(x, y) + P(y, z) + P(z, x) + P(x, y) \cdot P(y, z) \cdot P(z, x) = 0 \quad .$$

Teorema 5 - Considerati due elementi distinti a, b, indichiamo qui provvisoriamente con u l'elemento $m(a, b)$. Sia cioè:

$$b = aS(u) \quad ; \quad a = S(u)$$

e quindi, per Ax.7,

$$P(a, u) \cdot P(b, u) + 1 = 0 \quad . \tag{22}$$

Si abbia poi un elemento x appartenente ad $Intv(a, b)$; sia cioè:

$$P(a, x) \cdot P(b, x) + 1 = 0 \quad . \tag{23}$$

In queste ipotesi una ed una sola delle seguenti proposizioni è valida:

$$x = u \quad ; \tag{24}$$

$$P(a, x) \cdot P(u, x) + 1 = 0 \quad ; \tag{25}$$

$$P(u, x) \cdot P(b, x) + 1 = 0 \quad . \tag{26}$$

Dim. Se la proposizione (24) è valida, chiaramente le (25) e (26) non lo sono, perchè, come abbiamo detto, la funzione P ha senso soltanto quando i suoi argomenti sono distinti. Supponiamo quindi che (24) non sia valida e lo sia (25). Tenendo conto di Ax.6 (ii), le ipotesi (22) e (23) possono essere scritte nella forma seguente:

$$P(a, u) \cdot P(u, b) = 1 \quad ; \tag{22a}$$

$$P(a, x) \cdot P(x, b) = 1 \quad . \tag{23a}$$

Analogamente la ipotesi (25) può essere formulata nella forma:

$$P(a, x) \cdot P(x, u) = 1 \quad . \tag{27}$$

Da (23a) e (27), moltiplicando membro a membro e tenendo conto di Ax.6 (i), si ottiene:

$$P(x, b) \cdot P(x, u) = 1 \quad ; \tag{28}$$

e questo risultato dimostra che (26) non può essere valida. QED

In modo analogo si dimostra che, se è vera la (26) non può esserlo la (25).

§5

Indichiamo con N l'insieme dei numeri naturali maggiori di zero, ponendo quindi:

$$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \quad , \tag{29}$$

e sia C una successione di simboli 0 oppure 1:

$$C = \{c(i)\} \quad ; \quad \forall i\{i \in N \Rightarrow (c(i) = 0) \lor (c(i) = 1)\} \quad . \tag{30}$$

Nel seguito indicheremo con C anche il vettore, i cui elementi sono quelli della successione (30), ponendo quindi:

$$C = [c(1), c(2), c(3), ..., c(n), ...] \quad . \tag{31}$$

Nel seguito un vettore cosiffatto sarà anche chiamato convenzionalmente "vettore binario".

Convenzione - Diremo che il vettore (31) è "finito" se ha un numero finito di elementi uguali ad 1 (uno); quindi un vettore C sarà detto finito se vale la:

$$\exists n \forall i\{(i > n) \Rightarrow (c(i) \doteq 0)\} \quad . \tag{32}$$

Inoltre se tutti gli elementi del vettore C, da un certo punto in poi, sono uguali ad 1, converremo di identificarlo con il vettore finito C', che si ottiene facendo uguale ad 1 l'ultimo elemento diverso da 1. Quindi se si ha:

$$(c(n) = 0) \& [\forall i\{(i > n) \Rightarrow (c(i) = 1)\}] \quad , \tag{33}$$

porremo:

$$C = C' \tag{34}$$

essendo C' il vettore finito i cui elementi $[c(j)]'$ sono dati da:

$$\forall i\{[(i < n) \Rightarrow [[c(i)]' = c(i)]] \& [[c(n)]' = 1] \& [(i > n) \Rightarrow [[c(i)]' = 0]\} \quad . \tag{35}$$

Osservazione 6 - Indichiamo con $a(C)$ il numero reale definito da:

(36) $$a(C) = \Sigma[c(i)] \cdot 2^{(-i)} \qquad (i \in N) \ .$$

Si riconosce che il numero $a(C)$ dato dalla (36) è una "mantissa", cioè soddisfa alle limitazioni:

(37) $$0 \leq a(C) < 1 \ .$$

Si riconosce inoltre che le convenzioni adottate permettono di stabilire una biiezione tra i vettori C e le mantisse. Nel seguito diremo che un numero reale a, espresso nella forma (36), è una "mantissa binaria".
Fissiamo ora due punti $j(1), k(1) \in G$, e poniamo, per comodità:

(38) $$u(1) = m[j(1), k(1)] \ .$$

Mantenendo le convenzioni di linguaggio che sono state introdotte, stabiliremo ora una procedura che associa ad ogni punto $x \in Intv[j(1), k(1)]$ un vettore binario e quindi anche una mantissa binaria.
Ricordando il Teorema 5, si possono avere tre casi:

(39) $$x = u(1) \ ,$$

(40) $$x \in Intv[j(1), u(1)] \ ,$$

(41) $$x \in Intv|u(1), k(1)\} \ .$$

Nel caso (39) assoceremo ad x il vettore finito per il quale si ha:

(42) $$c(1) = 1 \ ; \ \forall i\{(i > 1) \Rightarrow (c(i) = 0)\} \ .$$

Nel caso (40) poniamo:

(43) $$c(1) = 0 \ ; \ j(2) = j(1) \ , \ k(2) = u(1) \ .$$

Nel caso (41) poniamo:

$$c(1) = 1 \quad ; \quad j(2) = u(1) \quad , \quad k(2) = k(1) \quad . \tag{44}$$

E poniamo anche, in ogni caso:

$$u(2) = m[j(2), k(2)] \quad . \tag{45}$$

In generale, per $i \in N$ e $i > 1$:

(46) se $x = u(i)$ porremo: $c(i) = 1$; $\forall p\{(p > i) \Rightarrow (c(p) = 0)\}$;

(47) se $x \in Intv[j(i), u(i)]$ porremo: $c(i) = 0$, $j(i+1) = j(i)$, $k(i+1) = u(i)$;

(48) se $x \in Intv[u(i), k(i)]$ porremo: $c(i) = 1$, $j(i+1) = u(i)$, $k(i+1) = k(i)$.

E porremo in ogni caso:

$$u(i+1) = m[j(i+1), k(i+1)] \quad . \tag{49}$$

Osservazione 7 - La procedura che abbiamo esposta, fissati che siano due elementi j, k di G, permette di associare ad ogni elemento $x \in Intv(j, k)$ un vettore binario; questo è finito nel caso in cui x coincida con uno dei punti $u(i)[i \in N]$.

Ax.8 - Ad ogni vettore binario C corrisponde un elemento dell'insieme $Intv(j, k)$.

Osservazione 8 - Questo assioma potrebbe essere chiamato "assioma di continuità"; esso associa ad ogni simbolo binario, finito o infinito (cioè ad ogni numero reale soddisfacente alle (37)), un elemento dell'insieme in parola.

§6

Sia ora un punto $x \in G$ che non appartiene all'insieme $Intv[j(1), k(1)]$. Si avrà quindi:

(50) $$P[j(1), k(1)] \cdot P[k(1), x] = 1 \text{ oppure } P[x, j(1)] \cdot P[j(1), k(1)] = 1 \quad .$$

Per quanto segue porremo:

(51) $$j(1) = a(0) \quad ; \quad k(1) = a(1) \quad ;$$

ed anche:

(52) $$a(2) = a(0)S[a(1)] \quad ,$$

ed in generale, per $i > 2$:

(53) $$a(i+1) = a(0)S[a(i)] \quad .$$

Porremo inoltre:

(54) $$a(-1) = a(1)S[a(0)] \quad ,$$

(55) $$a(-2) = a(1)S[a(-1)] \quad ,$$

ed in generale, per $i > 2$:

(56) $$a(-i-1) = a(1)S[a(-i)] \quad .$$

Ax.9 - Per ogni punto $x \in G$ esiste almeno un intero naturale n tale che sia:

(57) $$x \in Intv[a(0), a(n)] \text{ oppure } x \in Intv[a(-n), a(1)] \quad .$$

Osservazione 9 - Questo assioma potrebbe essere chiamato "assioma di Archimede": esso infatti afferma che non esistono punti di G che siano "inaccessibili" per la ripetizione opportuna delle operazioni S.

§6

Sia ora un punto $x \in G$ che non appartiene all'insieme $Intv[j(1), k(1)]$. Si avrà quindi:

(50) $$P[j(1), k(1)] \cdot P[k(1), x] = 1 \text{ oppure } P[x, j(1)] \cdot P[j(1), k(1)] = 1 \quad .$$

Per quanto segue porremo:

(51) $$j(1) = a(0) \quad ; \quad k(1) = a(1) \quad ;$$

ed anche:

(52) $$a(2) = a(0)S[a(1)] \quad ,$$

ed in generale, per $i > 2$:

(53) $$a(i+1) = a(0)S[a(i)] \quad .$$

Porremo inoltre:

(54) $$a(-1) = a(1)S[a(0)] \quad ,$$

(55) $$a(-2) = a(1)S[a(-1)] \quad ,$$

ed in generale, per $i > 2$:

(56) $$a(-i-1) = a(1)S[a(-i)] \quad .$$

Ax.9 - **Per ogni** punto $x \in G$ esiste almeno un intero naturale n tale che sia:

(57) $$x \in Intv[a(0), a(n)] \text{ oppure } x \in Intv[a(-n), a(1)] \quad .$$

Osservazione 9 - Questo assioma potrebbe essere chiamato "assioma di Archimede"; esso infatti afferma che non esistono punti di G che siano "inaccessibili" per la ripetizione opportuna delle operazioni S.

In forza di questo assioma è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra G ed il campo reale. Una procedura per ottenere tale corrispondenza può essere descritta nel modo seguente:
supponiamo che sia valida la prima delle relazioni (50) e quindi la prima della (57); e sia n il minimo numero naturale per il quale vale la prima delle (57). Possiamo applicare all'insieme $Intv[a(0), a(n)]$ la procedura descritta nel § precedente; pertanto, in relazione alla coppia ordinata di punti $a(0)$, $a(n)$ è possibile determinare un vettore binario:

$$D = [d(1), d(2), ..., d(n), ...] \quad , \tag{58}$$

che corrisponde al punto x; esiste quindi una mantissa binaria $a(D)$, data da:

$$a(D) = \Sigma[d(i)] \cdot [2^{(-i)}] \qquad i \in N \tag{59}$$

la quale rappresenta biunivocamente il punto x rispetto alla coppia nominata. Allora si può assumere come rappresentante del punto x, rispetto alla coppia $a(0)$, $a(1)$ il numero reale rappresentato in forma binaria da:

$$a(x) = [2^{(n-1)}] \cdot a(D) \quad . \tag{60}$$

Con procedura analoga si costruisce il numero reale $a(x)$ nel caso in cui valga la seconda delle relazioni (50).

§7

Consideriamo la coppia $a(0)$, $a(1)$, e sia, secondo la (38):

(61) $$u(1) = m[a(0), a(1)] \quad .$$

A norma della Oss. 3, la operazione $T[a(0), a(1)]$ può essere rappresentata in due modi diversi; precisamente si ha:

(62) $$T[a(0), a(1)] = S[a(0)]S[u(1)] = S[u(1)]S[a(1)] \quad ;$$

quindi si ha:

(63) $$\{T[a(0), a(1)]\}^2 = S[a(0)]S[a(1)] \quad .$$

Consegue di qui, per la (52):

(64) $$a(0)\{T[a(0), a(1)]\}^2 = a(2) \quad .$$

Ricordando il Teorema 4, per il gruppo abeliano T potremo anche adottare la notazione additiva. A tal fine poniamo:

(65) $$U = T[a(0), a(1)] \quad .$$

Con queste notazioni l'elemento neutro del gruppo può essere denotato con il simbolo "0" (zero), ed è facile definire anche il "multiplo" $n \cdot U$ dell'operazione U secondo un intero n qualunque (positivo o negativo).
Potremo quindi scrivere:

(66) $$a(1) = a(0) + U \quad ;$$

e con queste notazioni la (64) può essere scritta nella forma:

(67) $$a(2) = a(0) + 2 \cdot U \quad ,$$

e si avrà anche:

(68) $$a(i) = a(0) + [2^{(i-1)}] \cdot U \quad .$$

Sia ora a una qualunque mantissa binaria; e sia $x \in Intv[a(0), a(1)]$.
Abbiamo visto che ad x si può far corrispondere in modo biunivoco una mantissa $a(x)$; pertanto possiamo porre:

$$a \cdot U = T[a(0), x] \quad . \tag{69}$$

Con queste osservazioni è quindi possibile dare senso all'operazione indicata da $a \cdot U$, essendo a un numero reale qualunque, e di conseguenza stabilire un isomorfismo tra la retta reale e l'insieme G.

Summary - A one-dimension continuum is built up with a system of axioms regarding some involutory operations.

Bibliografia

[1] F.BACHMAN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer Verlag. Berlin, Göttingen, Heidelberg. 1959.

[2] H.KARZEL, K.SÖRENSEN, D.WINDENBERG, Einführung in die Geometrie. Vandenhoeck && Ruprecht. Göttingen. 1973.

[3] C.F.MANARA, M.MARCHI, On a class of reflection geometries. Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere. Milano (203-217), 1991.

ISBN 88-343-1361-5

Finito di stampare nel maggio 1994 dalla Lit. Solari P. Borromeo - Mi