Sulla introduzione del concetto di ordinamento di un insieme

1. - Da vario tempo e da molte parti si avanzano proposte per la adozione di nuovi criteri di insegnamento della Matematica nella scuola; molte di tali proposte prevedono che all'insegnante, durante l'ultimo anno dei Licei, sia data facoltà di ritornare criticamente su qualcuno dei capitoli svolti precedentemente in forma non completamente rigorosa, per educare gli allievi alla impostazione assiomatica che è propria della Matematica moderna e alla deduzione razionale con le regole della logica formale. Ci è parso quindi non inutile offrire alla meditazione degli insegnanti un sistema di assiomi con i quali si può introdurre il concetto di ordinamento in un insieme, a cui si vuole attribuire la proprietà di un continuo aperto ad una dimensione, topologicamente equivalente alla retta euclidea.

Esporremo la introduzione del concetto di « ordinamento » facendo uso metodico dei simboli della logica matematica, per offrire agli insegnanti la possibilità di un certo materiale di esempi, dei quali si possono valere per la applicazione delle regole di tale dottrina, che acquista ogni giorno maggiore importanza nella Matematica moderna.

Adotteremo le notazioni di logica simbolica dalla scuola di Hilbert, recentemente usate in opere scritte in italiano (1).

---

(1) Cfr. E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, Milano, 1960. Segnaliamo al Lettore qualche altra opera in italiano, che tratta di logica matematica: A. Pasquinelli, *Introduzione alla logica simbolica*, Torino, 1957; E. Nagel e J. R. Newman, *La prova di Gödel*, Torino, 1961; W. V. O. Quine, *Manuale di logica*, Milano, 1960; E. W. Beth, *I fondamenti logici della matematica*, Milano, 1963; E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Milano, 1961; E. Agazzi, *La logica simbolica*, Brescia, 1964.

Tuttavia avremo cura di tradurre il più spesso possibile le formule nel linguaggio ordinario, in modo che il Lettore possa prendere familiarità con la logica simbolica e con le sue regole.

In particolare indicate con p, q, r ... delle proposizioni, indicheremo col simbolo

$\neg p$ che leggeremo spesso « non p »

la proposizione che è vera quando p è falsa ed è falsa quando p è vera; indicheremo con

$p \vee q$ che leggeremo spesso « p oppure q »

la proposizione (spesso chiamata « disgiunzione » o anche « somma logica » di p e q) che è vera se almeno una tra le due proposizioni p oppure q è vera; indicheremo col simbolo

$p \wedge q$ che leggeremo spesso « p e q »

la proposizione (spesso chiamata « congiunzione » o anche « prodotto logico » di p e q) che è vera nel solo caso in cui entrambe, la p e la q, siano vere, falsa in tutti gli altri casi; indicheremo col simbolo

$p \rightarrow q$ che leggeremo spesso « p implica q » o anche « se p allora q »

la proposizione (spesso chiamata « implicazione materiale ») che è falsa nel solo caso in cui sia vera p e falsa q, vera in tutti gli altri casi; infine indicheremo col simbolo

$p \leftrightarrow q$ che leggeremo spesso « p equivalente a q »

la proposizione che è vera soltanto se p e q sono insieme vere oppure insieme false, falsa nel caso in cui p e q siano l'una vera e l'altra falsa (²).

Ricordiamo inoltre alcune formule notevoli cui ci dovremo riferire in seguito: si tratta delle cosiddette « leggi di De Mor-

---

(²) Non entriamo qui nella discussione sulla opportunità del nome di « implicazione » che viene dato alla proposizione $p \rightarrow q$, e di quello di « equivalenza » che viene dato alla proposizione $p \leftrightarrow q$; per tutto questo rimandiamo alla bibliografia che abbiamo citato.

GAN » ([3]), che si esprimono mediante le formule

$$(1) \qquad \begin{cases} \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q \end{cases}$$

della relazione

$$(2) \qquad \neg(\neg p) \leftrightarrow p$$

che ricorderemo spesso come « legge della doppia negazione » ed infine della relazione

$$(3) \qquad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

che lasciamo al Lettore verificare per esercizio.

Ovviamente i simboli che abbiamo convenuto di indicare con « $\vee$ » e con « $\wedge$ » possono essere considerati come simboli di operazioni che operano su proposizioni: tali operazioni hanno ben note propretà formali, analoghe alle operazioni di una algebra di BOOLE: proprietà commutativa:

$$(4) \qquad p \vee q \leftrightarrow q \vee p; \qquad p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p.$$

Proprietà associativa:

$$(5) \qquad \begin{cases} (p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r). \end{cases}$$

Proprietà distributiva:

$$(6) \qquad \begin{cases} (p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \\ (p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r). \end{cases}$$

Infine useremo le abituali indicazioni per i quantificatori esistenziali ed universali; precisamente, indicando per es. con $P(x)$ una forma proposizionale aperta (cioè una espressione suscettibile di divenire una proposizione quando alla variabile x sia sostituito il nome di un elemento appartenente ad un certo

([3]) Secondo la denominazione abituale, chiameremo *leggi logiche* le proposizioni composte che risultano vere quali che siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

universo di discorso; per es. la forma proposizionale « x è primo » suscettibile di diventare una proposizione vera o falsa quando al posto di x sia sostituita la cifra che denota un numero intero) useremo le notazioni:

$$\begin{cases} \exists\, x P(x) & \text{che leggeremo « esiste almeno un elemento } x \text{ tale che } P(x) \text{ è vera »} \\ \forall\, x P(x) & \text{che leggeremo « per ogni elemento } x \text{ è vera } P(x) \text{ ».} \end{cases}$$

2. - È dato un insieme $\mathfrak{J}$ e siano x, y, z, ... certi suoi elementi. Supponiamo che sia nota una relazione di « identità » tra elementi di $\mathfrak{J}$, relazione che denotiamo col simbolo abituale

$$x = y$$

leggendo « x coincide con y »; per la relazione di « identità » supporremo note le proprietà formali classiche: riflessiva, simmetrica, transitiva.

Useremo pure la notazione abituale

$$x \neq y$$

leggendo « x è diverso da y » per indicare che non sussiste la relazione di identità tra i due elementi x ed y, cioè per sostituire la notazione

$$\neg\,(x = y).$$

Indichiamo con « $\mathfrak{S}$ » il simbolo di una relazione tra elementi di $\mathfrak{J}$, simbolo che converremo di scrivere tra i simboli di due elementi di $\mathfrak{J}$ come segue:

$$x \mathfrak{S} y. \tag{7}$$

Potremmo convenire di leggere la formula (7) per es. con le parole « x precede y »; occorre tuttavia sempre tener ben presente il pericolo che l'uso del linguaggio ordinario, col suo inevitabile richiamo ad un contenuto intuitivo, possa trascinare lo studioso a ritenere per « evidenti » certe proprietà che invece devono essere rigorosamente dimostrate.

La relazione « $\mathfrak{S}$ » sarà caratterizzata dagli assiomi (4) che enunceremo qui di seguito e per essa varranno i teoremi elementari che dedurremo a titolo di esempio.

Ax. 1

$$(x=y) \rightarrow \neg (x\mathfrak{S}y).$$

Se x coincide con y non può essere vero che x precede y. In altre parole la relazione « $\mathfrak{S}$ » non è riflessiva.

Segue di qui immediatamente il

Teor. 1.1

$$(x=y) \rightarrow \neg (y\mathfrak{S}x).$$

La dimostrazione può essere considerata come un utile esercizio di logica formale: osservando che l'assioma 1 è valido indipendentemente dai nomi degli enti che figurano nell'enunciato, potremo applicare la « regola di sostituzione », sostituendo ad una lettera un'altra in ogni posto in cui la prima compariva; così si ottiene, sostituendo z ad y, in ogni posto in cui questa lettera compariva, la enunciazione dell' Ax. 1 nella forma:

$$(x=z) \rightarrow \neg (x\mathfrak{S}z).$$

Applicando un'altra volta le stesse considerazioni si giunge, sostituendo la lettera y alla x nella enunciazione precedente, alla forma

$$(y=z) \rightarrow \neg (y\mathfrak{S}z);$$

ed infine, sostituendo la lettera x alla z si giunge alla forma

$$(y=x) \rightarrow \neg (y\mathfrak{S}x).$$

Di qui si ha immediatamente l'enunciato del teorema, ricordando la proprietà simmetrica della relazione di identità (5).

(4) Usiamo il termine di « assiomi », secondo l'abitudine, per indicare delle proposizioni che vengono date senza dimostrazione, all'inizio di una teoria.

(5) Abbiamo voluto qui seguire il rigoroso ma abbastanza tedioso procedimento di sostituire una lettera alla volta, per evitare qualunque pericolo di confusioni; si noti tuttavia che in questo caso al teorema si potrebbe giungere in modo più sbrigativo semplicemente scambiando tra loro le lettere x ed y e poi tenendo conto della proprietà simmetrica della relazione di identità.

Ax. 2

$$(x\mathfrak{S}y) \wedge (y\mathfrak{S}z) \rightarrow (x\mathfrak{S}z).$$

Se x precede y, ed y precede z, allora x precede z: la relazione « $\mathfrak{S}$ » è transitiva.

Segue dai due assiomi prima enunciati il teorema

Teor. 2.1

$$\neg\{(x\mathfrak{S}y) \wedge (y\mathfrak{S}x)\}.$$

non può contemporaneamente essere che x preceda y e che y preceda x.

La dimostrazione si ottiene in base alla nota legge logica

(8) $$\{(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \neg \boldsymbol{q}\} \rightarrow \neg \boldsymbol{p} \quad (6);$$

prendiamo come proposizione $\boldsymbol{p}$ la seguente:

(9) $$(x\mathfrak{S}y) \wedge (y\mathfrak{S}z) \wedge (x=z);$$

---

(6) Diamo qui a titolo di esercizio la dimostrazione della (8); si parte dalla proposizione, sempre vera qualunque sia la proposizione $\boldsymbol{r}$:

$$\neg\, \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{r};$$

sostituendo al posto della $\boldsymbol{r}$ la proposizione $\neg\, \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ si ha

$$\neg\,(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee (\neg\, \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$$

da cui, applicando anzitutto la proprietà commutativa espressa dalla prima delle (4) e poi la proprietà associativa espressa dalla prima delle (5) si ha la proposizione equivalente

$$[\neg\,(\neg\, \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{q}] \vee \neg\, \boldsymbol{p};$$

ora, per la (3), questa proposizione può essere sostituita dalla seguente, a lei equivalente

$$\neg\,[\neg\,(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{q}] \rightarrow \neg\, \boldsymbol{p}$$

ed applicando la seconda legge di De Morgan e la legge della doppia negazione si può scrivere al posto della proposizione precedente quella a lei equivalente:

$$[(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \neg\, \boldsymbol{q}] \rightarrow \neg\, \boldsymbol{p}$$

ed infine, ancora per la (3), si ha la (8).

osserviamo ora che, per l'Ax. 2 la proposizione

$$(x\mathcal{S}y) \wedge (y\mathcal{S}z) \tag{10}$$

implica $x\mathcal{S}z$; si ha quindi

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}$$

essendo $\boldsymbol{q}$ la proposizione

$$(x\mathcal{S}z) \wedge (x=z).$$

Ma questa proposizione è negata dall'Ax. 1; questo infatti è stato enunciato nella forma

$$\boldsymbol{u} \to \neg \boldsymbol{t}$$

essendo $\boldsymbol{u}$ la proposizione $(x=y)$ e $\boldsymbol{t}$ la proposizione $x\mathcal{S}y$; ma per la (3) si ha

$$(\boldsymbol{u} \to \neg \boldsymbol{t}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{u} \vee \neg \boldsymbol{t}$$

e per la seconda legge di De Morgan si ha

$$\neg \boldsymbol{u} \vee \neg \boldsymbol{t} \leftrightarrow \neg (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t}).$$

Risulta quindi essere falsa la proposizione (9), la quale si riduce a quella negata nell'enunciato del teorema quando si sostituisca alla lettera z la lettera x, che rappresenta un elemento identico a quello denominato con la lettera z.

Quando si sono enunciati gli assiomi di una teoria, è necessario accertare la loro indipendenza: si tratta di constatare che nessun assioma è deducibile da quelli che lo precedono, e tale constatazione si fa abitualmente, come è noto, trovando un'interpretazione degli assiomi che soddisfi a tutti gli assiomi precedenti quello considerato e non a quest'ultimo.

La ricerca di insiemi che soddisfano ad alcuni soltanto ma non a tutti gli assiomi è sempre un utile esercizio di logica applicata: dal punto di vista didattico può apparire interessante ed efficace la ricerca di insiemi cosiffatti dopo la enunciazione di ogni assioma, così come noi faremo qui, dando alcuni esempi che l'insegnante avrà cura di moltiplicare.

Così, con riferimento agli Assiomi 1 e 2, si può verificare che il secondo è indipendente dal primo con il seguente esempio:

se come insieme $\mathfrak{J}$ si prende l'umanità e come relazione $x\mathfrak{S}y$ si prende la relazione: « x è padre di y » chiaramente è soddisfatto 1 ma non 2.

Ax. 3

$$(x \neq y) \rightarrow (x\mathfrak{S}y) \vee (y\mathfrak{S}x).$$

Se due elementi x ed y non coincidono allora deve valere una almeno delle due relazioni $x\mathfrak{S}y$ oppure $y\mathfrak{S}x$.

L'Ax. 3 potrebbe essere chiamato per es. « assioma di comparabilità »; esso infatti afferma che due elementi distinti dell'insieme $\mathfrak{J}$ sono sempre « comparabili » rispetto alla relazione $\mathfrak{S}$. Varie denominazioni sono usate dai vari Autori per denominare una relazione per la quale valga l'assioma ora enunciato; per es. una relazione che goda delle proprietà finora enunciate per la relazione $\mathfrak{S}$ è chiamata « connessa » ([7]); oppure un insieme per gli elementi del quale valgano proprietà analoghe a quelle finora postulate da noi per l'insieme $\mathfrak{J}$ viene chiamato « totalmente ordinato » ([8]).

La indipendenza dell' Ax. 3 dai precedenti si verifica molto facilmente sui seguenti esempi elementari:

a) si assuma come insieme $\mathfrak{J}$ l'insieme dei numeri naturali (interi positivi escluso lo zero) e si dia alla relazione $x\mathfrak{S}y$ il seguente significato: y è multiplo di x secondo un numero maggiore di 1. Allora si verifica subito che sono soddisfatti entrambi gli assiomi 1 e 2 ma non 3, perchè, presi per es. due numeri primi, tra essi non sussiste nè la relazione $x\mathfrak{S}y$ nè la $y\mathfrak{S}x$ secondo il significato che le abbiamo qui conferito.

b) Si assuma come insieme $\mathfrak{J}$ l'insieme delle parti (insieme dei sottoinsiemi) di un insieme $\mathfrak{H}$ e si dia alla relazione

---

([7]) Cfr. p. es. R. Carnap, *Einführung in die symbolische Logik* (2ª ed., Vienna, 1960) - § 31 c.

([8]) Cfr. per es. P. Dubreil & M. L. Dubreil-Jacotin, *Leçons d'Algèbre moderne* (Parigi, 1961) - Cap. V.

$x\mathfrak{S}y$ il significato che si dà alla relazione abitualmente espressa dal simbolo

$$x \subset y\,, \tag{11}$$

cioè $x\mathfrak{S}y$ indichi che il sottoinsieme x è contenuto come parte propria nel sottoinsieme y di $\mathfrak{H}$. È chiaro anche in questo caso che prese due qualunque parti di $\mathfrak{H}$ può avvenire che nessuna sia una parte dell'altra; si verifica d'altronde molto facilmente che per la relazione (11) valgono gli assiomi 1 e 2.

c) Si assuma ancora una volta come insieme $\mathfrak{J}$ l'umanità e si dia alla relazione $x\mathfrak{S}y$ il significato: « x è antenato di y »; è chiaro anche in questo caso che sono soddisfatti gli assiomi 1 e 2 ma che non è soddisfatto 3.

d) Si assuma come insieme $\mathfrak{J}$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri interi $x \equiv (x_1, x_2)$, $y \equiv (y_1, y_2)$ convenendo che si abbia

$$x = y$$

se e soltanto se

$$x_1 = y_1 \qquad \text{ed} \qquad x_2 = y_2$$

e che si abbia

$$x\mathfrak{S}y$$

se è

$$x_1 < x_2\,;$$

ancora una volta si constata che per un insieme cosiffatto valgono gli assiomi 1 e 2 ma non 3. Infatti due coppie che abbiano uguali i primi elementi ma diversi i secondi non sono comparabili a termini della definizione perché non si può dire che coincidano né che una preceda l'altra, nel senso che abbiamo dato alla relazione $x\mathfrak{S}y$.

L'insegnante può orientarsi con l'immagine fornita da un reticolato di « coordinate cartesiane » considerando come elementi di $\mathfrak{J}$ i punti del piano a coordinate entrambe intere, e convenendo che un punto « preceda » un altro se la parallela all'asse delle ordinate su cui sta il primo è a sinistra di quella su cui sta il secondo. Ovviamente, se due punti non sono coincidenti ma stanno sulla medesima parallela all'asse delle ordinate, di essi non si può dire nulla.

3. - In base a ciò che è stato enunciato fin qui, si può dimostrare che, considerati due elementi qualunque x ed y appartenenti all'insieme $\mathfrak{J}$, deve essere vera una ed una sola delle tre proposizioni seguenti ·

$$x = y; \qquad x\mathfrak{S}y; \qquad y\mathfrak{S}x.$$

Per esprimere questo fatto mediante il formalismo della logica simbolica, indichiamo rispettivamente con $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ le tre proposizioni sopra enunciate; avremo allora il

TEOREMA 3.1

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \neg (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \neg (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \wedge \neg (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}).$$

Svolgeremo la dimostrazione in forma simbolica, a titolo di esercizio. Si noti anzitutto che l'enunciato del teorema risulta dalla congiunzione di quattro proposizioni; occorre quindi dimostrare la verità di ognuna di queste.

Per quanto riguarda la prima, si ha che essa consegue immediatamente dall'enunciato dell'Ax. 3; infatti, con i simboli qui adottati tale assioma può essere scritto nella forma

$$\neg \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$$

e, per la (3) e per la legge della doppia negazione, questo enunciato è equivalente al seguente

$$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r});$$

e questa proposizione, per la associatività della operazione che abbiamo indicata con il simbolo « $\vee$ », è equivalente alla prima parte dell'enunciato del teorema.

Per quanto riguarda le altre proposizioni che entrano nell'enunciato del teorema si osservi anzitutto che l'Assioma 1 può essere scritto nella forma

$$p \rightarrow \neg q \tag{12}$$

con i simboli ora usati; inoltre il Teor. 1.1 può essere enunciato con la formula

$$p \rightarrow \neg r. \tag{13}$$

Ora per la (3) le proposizioni (12) e (13) sono equivalenti alle

$$\neg p \vee \neg q \quad \text{e} \quad \neg p \vee \neg r$$

rispettivamente; e queste, per le leggi di De Morgan sono equivalenti rispettivamente alla

$$\neg (p \wedge q) \quad \text{e} \quad \neg (p \wedge r); \tag{14}$$

infine il Teor. 2.1 può essere enunciato nella forma

$$\neg (q \wedge r). \tag{15}$$

Risulta pertanto dimostrata la seconda parte dell'enunciato del Teorema, parte che consiste nella enunciazione contemporanea delle tre proposizioni (14) e (15).

4. - Procediamo ulteriormente nell'enunciazione degli assiomi che caratterizzano la relazione $\mathfrak{S}$; si ha

Ax. 4

$$\forall x \; \exists z \,\{ x \mathfrak{S} z \}.$$

Qualunque sia l'elemento x, esiste almeno un elemento z tale che vale la relazione $x \mathfrak{S} z$.

Esprimendoci in forma meno rigorosa, per quanto forse suggestiva, si potrebbe dire che non esiste nell'insieme un elemento che, rispetto alla relazione $\mathfrak{S}$, sia « ultimo » elemento.

Per constatare la indipendenza dell'Ax. 4 dai precedenti sceglieremo, tra i tanti possibili, il seguente esempio:

se come insieme $\mathfrak{J}$ si assume un intervallo di numeri razionali chiuso a destra, per es. si prendono tutti i numeri tali che sia

$$1 < x \leq 2$$

e si conviene che sia $x\mathfrak{S}y$ quando e solo quando è $x < y$, valgono gli assiomi 1, 2, 3 ma non 4. Infatti per $x=2$ non è vero che in $\mathfrak{J}$ esiste un z tale che $2\mathfrak{S}z$.

Ax. 5

$$\forall x \ \exists z \{ z\mathfrak{S}x \}.$$

Qualunque sia x, esiste in $\mathfrak{J}$ almeno un elemento z che precede x; esprimendoci in forma meno rigorosa, per quanto forse più suggestiva, si potrebbe dire che non esiste nell'insieme $\mathfrak{J}$ un elemento che sia il «primo» rispetto alla relazione $\mathfrak{S}$.

Per constatare la indipendenza dell'Ax. 5 dai precedenti si può seguire un procedimento analogo a quello che abbiamo seguito per constatare la indipendenza dell'Ax. 4:

se per $\mathfrak{J}$ si assume un intervallo di numeri razionali chiuso a sinistra, per es. l'insieme dei numeri razionali tali che sia

$$1 \leq x < 2$$

e si dà alla relazione $x\mathfrak{S}y$ il significato di «$x < y$» valgono tutti gli assiomi da 1 a 4 ma non vale 5.

Ax. 6

$$x\mathfrak{S}y \rightarrow \exists z \{ x\mathfrak{S}z \wedge z\mathfrak{S}y \}.$$

Dati due elementi qualsiasi x ed y, se si ha $x\mathfrak{S}y$, allora esiste almeno un elemento z tale che contemporaneamente si ha $x\mathfrak{S}z$ e $z\mathfrak{S}y$: esprimendoci in forma meno rigorosa ma forse più suggestiva potremo dire che z sta *tra* x ed y.

La constatazione della indipendenza dell'Ax. 6 dai precedenti si consegue facilmente con un esempio elementare: infatti

se come insieme $\mathfrak{J}$ si assume quello di tutti i numeri interi (positivi e negativi) e si conviene che sia $x\mathfrak{S}y$ quando e solo quando è $x < y$ si ha che sono soddisfatti tutti gli assiomi da 1 a 5 ma non 6: infatti tra due interi consecutivi non sta nessun altro intero.

Come è noto, un insieme che soddisfi all'Ax. 6 viene chiamato «denso» (9); tale è per es. l'insieme di tutti i numeri razionali. Si verifica anche facilmente che l'insieme formato da tutti i numeri razionali di un intervallo aperto, quando si convenga che sia $x \mathfrak{J} y$ se e soltanto se $x < y$, soddisfa a tutti gli assiomi ora enunciati.

5. - Gli assiomi che abbiamo fin qui enunciati hanno dato all'insieme $\mathfrak{J}$ che consideriamo le caratteristiche di un insieme totalmente ordinato (secondo la denominazione che abbiamo ricordato nel § 2) e denso. È possibile attribuire ad un insieme cosiffatto anche una ulteriore proprietà, e precisamente la continuità; enunceremo questo fatto con un enunciato che è la traduzione di quello classico di DEDEKIND della continuità della retta.

Si consideri una classe Q di elementi dell'insieme $\mathfrak{J}$ e supponiamo che essa possegga le tre seguenti proprietà:

a) contenga almeno un elemento (cioè sia una classe «non vuota»);

b) non esaurisca l'intero insieme $\mathfrak{J}$;

c) sia tale che ogni elemento che appartiene a Q preceda ogni elemento che non appartiene a Q.

In simboli le tre proprietà della classe Q si traducono facilmente nelle tre proposizioni seguenti

(*a*) $$\exists\, x \{ x \in Q \} \quad (10)$$

(*b*) $$\exists\, y \{ \neg (y \in Q) \}$$

(*c*) $$\forall\, x\ \forall y \{ [(x \in Q) \wedge \neg (y \in Q)] \rightarrow x \mathfrak{J} y \}.$$

---

(9) Cfr. per es. H. G. FORDER, *The foundations of euclidean geometry*, Cambridge, 1927.

(10) Riteniamo che per il Lettore sia famigliare la notazione «$x \in Q$» ormai universalmente adottata, che esprime il fatto che l'elemento x appartiene alla classe Q; analogamente è chiaro che «$\neg (y \in Q)$» significa che «l'elemento y non appartiene alla classe Q».

Come è noto, la proprietà di continuità dell'insieme si enuncia postulando che, *qualunque sia la classe Q considerata*, se essa possiede le tre proprietà sopra ricordate, esiste un elemento z dell'insieme il quale possiede le due proprietà seguenti:

d) ogni elemento che precede z appartiene alla classe Q;

e) ogni elemento che è preceduto da z non appartiene alla classe Q.

In formule queste due proprietà si traducono facilmente nel modo seguente

$$(d) \qquad \forall u \{ (u \mathfrak{J} z) \rightarrow (u \in Q) \}$$

$$(e) \qquad \forall w \{ (z \mathfrak{J} w) \rightarrow \neg (w \in Q) \}.$$

Pertanto la espressione in formule della proprietà di continuità dell'insieme $\mathfrak{J}$ porta a scrivere

Ax. 7

$$\forall Q \{ \exists x (x \in Q) \wedge \exists y [\neg (y \in Q)] \wedge$$

$$\wedge \forall x \forall y [(x \in Q) \wedge \neg (y \in Q) \rightarrow (x \mathfrak{J} y)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists z [\forall u \{ (u \mathfrak{J} z) \rightarrow (u \in Q)] \} \wedge \forall w \{ (z \mathfrak{J} w) \rightarrow \neg (w \in Q) \}] \} \quad (^{11}).$$

Anche nel caso dell'Ax. 7 la constatazione della indipen-

---

(11) Si osservi che l'enunciato dell'Ax. 7 è formalmente diverso da quello di tutti gli altri assiomi, perché il quantificatore universale $\forall$ figura premesso non soltanto agli elementi dell'insieme $\mathfrak{J}$ ma anche ad un simbolo che denota una classe di elementi cosiffatti: è infatti necessario tradurre in simboli la frase che inizia così: «qualunque sia la classe Q di elementi di $\mathfrak{J}$ ...».

Il Lettore che abbia qualche conoscenza dei problemi della Logica matematica avvertirà subito che con l'enunciato di questo assioma si passa ad un livello logico superiore, tanto a quello della logica elementare delle proposizioni non analizzate, quanto a quello della logica dei predicati e delle relazioni; non intendiamo proseguire oltre in questa discussione, che richiederebbe analisi delicate e coinvolgerebbe questioni molto importanti, bastando aver segnalato qui il fatto e rimandando il Lettore che desiderasse essere ulteriormente informato alla letteratura specializzata sull'argomento. In particolare per una iniziazione in questo campo segnaliamo di nuovo i volumi di E. Agazzi ricordati nella nota (1).

denza si consegue facilmente con l'esempio seguente:

se come insieme $\mathfrak{J}$ si assume l'insieme di tutti i razionali positivi (escluso lo zero) e si conviene che sia $x\mathfrak{S}y$ quando e solo quando sia $x < y$ sono soddisfatti tutti gli assiomi da 1 a 6 ma non 7.

Presa infatti come classe Q quella di tutti i razionali tali che sia $x^2 < 2$, si dimostra con un ragionamento ormai classico che nessun elemento z dell'insieme possiede le proprietà enunciate dell'assioma 7.

Osservazione. - Si noterà che nell'enunciato dell'Ax. 7 non si distingue il caso in cui l'elemento z, di cui si afferma la esistenza, appartiene alla classe Q da quello in cui non appartiene; l'enunciato è quindi valido in ciascuno dei due casi. Si noti ora che dalle proposizioni (d) ed (e) si trae facilmente la validità delle seguenti

$$\forall\, u\, \{ (u \in Q) \rightarrow (u = z) \vee (u\mathfrak{S}z) \} \tag{f}$$

$$\forall\, w\, \{ \neg (w \in Q) \rightarrow (w = z) \vee (z\mathfrak{S}w) \}. \tag{g}$$

Infatti, qualora si voglia dimostrare per es. la (f) si noti che per l'elemento u, in forza del Teorema 3.1, deve verificarsi una ed una sola delle tre proposizioni

$$u = z; \qquad u\mathfrak{S}z; \qquad z\mathfrak{S}u\,;$$

ma se è valida la ipotesi

$$u \in Q$$

in forza della (e) la terza possibilità è esclusa e quindi si ha la (f).

Analoga dimostrazione vale per la (g).

Segue di qui facilmente la unicità dell'elemento z di cui l'Ax. 7 afferma la esistenza: consideriamo infatti un altro elemento z' e supponiamo che sia

$$z \neq z'\,; \tag{16}$$

allora, in forza del Teorema 3.1 deve essere

$$(z \mathfrak{S} z') \vee (z' \mathfrak{S} z).$$

Supponiamo che si abbia

$$z \mathfrak{S} z' \; ; \tag{17}$$

in forza dell'Ax. 6, esiste un elemento z'' tale che si abbia

$$(z \mathfrak{S} z'') \wedge (z'' \mathfrak{S} z').$$

Ora in forza della proprietà (*e*), si ha

$$(z \mathfrak{S} z'') \rightarrow \neg (z'' \in Q) \tag{18}$$

ma, supposto che z' soddisfi all'Ax. 7 insieme con z, per la proprietà (*d*) si ha

$$(z'' \mathfrak{S} z') \rightarrow (z'' \in Q) \; ; \tag{19}$$

le due tesi (18) e (19) sono contradditorie e quindi la ipotesi (17) non può essere valida; in modo analogo si dimostra che non può sussistere la ipotesi

$$z' \mathfrak{S} z$$

e di conseguenza viene dimostrata falsa la (16) ([12]).

6. - A titolo di esercizio, dimostriamo qui il teorema fondamentale di ogni continuo totalmente ordinato, teorema il quale afferma che ogni sottoinsieme che abbia le due seguenti proprietà:

i) di non essere vuoto,

ii) di essere superiormente limitato,

ammette un estremo superiore.

Per eseguire la dimostrazione con gli strumenti che abbiamo adottato, il primo passo consiste nell'esprimere le due proprietà che abbiamo or ora enunciate con parole del linguaggio comune.

([12]) Lasciamo al Lettore la dimostrazione, per esercizio, della legge logica espressa dalla formula

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p.$$

Indicato con R il sottoinsieme, la prima proprietà viene espressa dalla formula

(i) $$\exists x \, x \in R|$$

e la seconda viene espressa dalla formula

(ii) $$\exists y \forall x [(x \in R) \rightarrow (x \mathfrak{S} y)].$$

Indichiamo con il simbolo $\sup(R)$ l'elemento che è estremo superiore della classe R; esso è caratterizzato dal possesso delle due proprietà seguenti:

iii) ogni elemento che lo segue non appartiene alla classe R;

iv) ogni elemento che lo precede precede almeno un elemento di R.

Queste due proprietà si formulano molto facilmente nel modo seguente: posto

$$z = \sup(R)$$

si ha che la proprietà (iii) è espressa dalla formula

(iii) $$\forall u [(u \neq z) \wedge (u \in R) \rightarrow (u \mathfrak{S} z)]$$

e la proprietà (iv) è espressa dalla formula

(iv) $$\forall w [(w \mathfrak{S} z) \rightarrow \exists t \{(t \in R) \wedge (w \mathfrak{S} t)\}].$$

Per poter applicare l'Ax. 7 occorre costruire una classe S di elementi per la quale valgano le ipotesi che valgono per la classe Q che entra nell'enunciato dell'Assioma stesso. Tale classe S viene definita come insieme di tutti gli elementi t che appartengono ad R oppure precedono qualche elemento di R; si avrà quindi

(20) $$S = \{t \mid (t \in R) \vee \exists y [(y \in R) \wedge (t \mathfrak{S} y)]\}$$ [13];

---

[13] Abbiamo utilizzato il noto operatore che definisce una classe come insieme di tutti gli elementi che rendono vera una certa forma proposizionale; indicata con $P(x)$ una forma cosiffatta, tale classe viene indicata col simbolo $\{x \mid P(x)\}$, leggendo « insieme di tutti gli x che verificano $P(x)$ ».

ossia

(21) $$t \in S \leftrightarrow [(t \in R) \vee \exists\, y \{(y \in R) \wedge (t \mathfrak{S} y)\}].$$

Segue di qui

(22) $$\neg (t \in S) \leftrightarrow \neg (t \in R) \wedge \neg \exists\, y [(y \in R) \wedge (t \mathfrak{S} y)];$$

ora in base al noto schema

$$\neg \exists\, y [P(y)] \leftrightarrow \forall\, y [\neg P(y)]$$

si ha

$$\neg \exists\, y [(y \in R) \wedge (t \mathfrak{S} y)] \leftrightarrow \forall y [\neg \{(y \in R) \wedge (t \mathfrak{S} y)\}]$$

e di qui, per le leggi di De Morgan, l'ultima proposizione può essere sostituita dalla equivalente

$$\forall\, y [\neg (y \in R) \vee \neg (t \mathfrak{S} y)]$$

e da questa, per la (3) si ha la proposizione equivalente

$$\forall\, y [(y \in R) \rightarrow \neg (t \mathfrak{S} y)].$$

Pertanto la (22) può essere scritta nella forma equivalente

(23) $$\neg (t \in S) \leftrightarrow \neg (t \in R) \wedge \forall\, y \{(y \in R) \rightarrow \neg (t \mathfrak{S} y)\}.$$

Ma per il Teorema 3.1 si ha

$$\neg (t \mathfrak{S} y) \leftrightarrow (t = y) \vee (y \mathfrak{S} t)$$

e quindi la (23) può essere scritta nella forma

(24) $$\neg (t \in S) \leftrightarrow \neg (t \in R) \wedge \forall\, y [(y \in R) \rightarrow (t = y) \vee (y \mathfrak{S} t)].$$

Si osservi ora che la tesi dell'ultima implicazione è formata dalla disgiunzione

$$(t = y) \vee (y \mathfrak{S} t)$$

e che la prima parte di questa, cioè la relazione $t=y$ è sempre incompatibile con la congiunzione della ipotesi $y \in R$ e della $\neg(t \in R)$.

Pertanto la $t=y$ è sempre falsa e potremo scrivere la (24) nella forma

$$\neg(t \in S) \leftrightarrow \neg(t \in R) \wedge \forall y \{(y \in R) \rightarrow (y \mathfrak{S} t)\}. \tag{25}$$

Siamo ora in grado di constatare che per la classe S ora costruita valgono le tre proprietà: *a*), *b*), *c*) che possiede ogni classe Q a cui viene applicato l'Assioma 7. La prima proprietà è immediata conseguenza della (i) che afferma che la classe R non è vuota e quindi, per la (20), non è vuota neppure la S.

La seconda proprietà è pure immediata conseguenza della (ii); invero la (ii) afferma la esistenza di almeno un elemento t che verifica la seguente proposizione

$$\forall x \{(x \in R) \rightarrow (x \mathfrak{S} t)\}. \tag{26}$$

Segue di qui, ancora per il Teorema 3.1

$$\neg(t \in R)$$

e confrontando questa e la (21) con la (22) si conclude

$$\neg(t \in S).$$

Rimane a verificare la proprietà *c*), che si esprime in questo caso con la formula

$$\forall x \forall y \{(x \in S) \wedge \neg(y \in S) \rightarrow (x \mathfrak{S} y)\};$$

ricordando le (21) e (22), la ipotesi

$$(x \in S) \wedge \neg(y \in S)$$

si può scrivere nella forma seguente (per scrivere la quale abbiamo fatto ripetutamente uso della « regola di sostituzione », cambiando i nomi delle variabili)

$$t[(t \in R) \wedge (x \mathfrak{S} t)]\} \wedge \{\neg(y \in R) \wedge \forall u[(u \in R) \rightarrow (u \mathfrak{S} y)]\}.$$

Questa proposizione indicando con $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ rispettivamente le proposizioni

$$x \in R; \qquad \exists\, t\,\{(t \in R) \wedge (x \mathfrak{S} t)\}$$

e

$$\neg\,(y \in R) \wedge \forall\, u[(u \in R) \rightarrow (u \mathfrak{S} y)]$$

può essere scritta nella forma

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$$

e quindi, applicando la proprietà distributiva della operazione indicata con «$\wedge$» rispetto a quella indicata con «$\vee$»

$$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}).$$

Dalla congiunzione $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}$ segue subito $x \mathfrak{S} y$ perchè si ha, in forza di uno schema noto

$$\forall\, u[(u \in R) \rightarrow (u \mathfrak{S} y)] \rightarrow [(x \in R) \rightarrow (x \mathfrak{S} y)].$$

Dalla congiunzione $\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$, che si traduce qui nella

$$\exists\, t\,\{(t \in R) \wedge (x \mathfrak{S} t)\} \wedge \neg\,(y \in R) \wedge \forall\, u\,\{(u \in R) \rightarrow (u \mathfrak{S} y)\}$$

sostituendo in particolare t al posto di u si trae immediatamente

$$(x \mathfrak{S} t) \wedge (t \mathfrak{S} y)$$

da cui la tesi $x \mathfrak{S} y$ in forza dell'Ax. 2.

Resta pertanto dimostrato che la classe S che abbiamo definito con la (20) possiede tutte le proprietà possedute da ogni classe Q a cui si applica l'Ax. 7. Possiamo quindi invocare questo per affermare la esistenza di un elemento z che ha le proprietà dell'estremo superiore di R.

Lasciamo al Lettore il completare la dimostrazione, come utile esercizio delle regole di logica simbolica; come pure lasciamo al Lettore il compito di enunciare le proposizioni che caratterizzano la relazione che potremmo indicare con il simbolo

$$y \mathfrak{S} x \tag{27}$$

convenendo di leggere « y segue x », considerando la (27) equivalente alla relazione seguente

$$x \mathfrak{S} y. \tag{28}$$

Anche in questo caso sarà un utile esercizio di uso della logica simbolica il dedurre le proprietà della relazione (27) a partire dagli assiomi e dai teoremi che abbiamo enunciati e dedotti fin qui.

7. - Dopo di aver enunciati gli assiomi di una teoria ed aver controllato che essi sono indipendenti, occorre fare un secondo importantissimo passo, per verificare se essi determinino univocamente l'insieme di enti $\mathfrak{J}$ a proposito del quale essi sono stati enunciati. Nel nostro caso è facile constatare, ed è didatticamente cosa utilissima far notare che gli assiomi che abbiamo enunciati *non* determinano univocamente un insieme $\mathfrak{J}$ ai cui elementi essi si applicano. Invero tali assiomi caratterizzano genericamente un insieme aperto, dotato delle proprietà di ordinamento e di continuità che siamo soliti attribuire alla retta euclidea, ma non caratterizzano questa. Infatti si può osservare che gli assiomi ora enunciati convengono, quando si assuma come significato della relazione $x \mathfrak{S} y$ il sussistere della relazione $x < y$ nel solito senso, ai seguenti insiemi:

i) l'insieme di tutti i numeri reali;

ii) l'insieme di tutti i numeri reali positivi (zero escluso);

iii) l'insieme di tutti i numeri reali costituenti un intervallo aperto; per es. l'insieme dei numeri reali x soddisfacenti contemporaneamente alle relazioni

$$0 < x < 1 .$$

Le corrispondenze biunivoche (mappe bijettive) che rappresentano ognuno di questi insiemi sull'altro si ottengono molto facilmente: la funzione

$$x' = exp \cdot ax$$

essendo a una costante qualunque diversa dallo zero fa corrispondere ad un elemento x qualsiasi dell'insieme i) un elemento x' dell'insieme ii); analogamente la funzione

$$x' = x''/(1 - x'')$$

fa corrispondere ad un elemento qualsiasi x'' dell'insieme iii) un elemento x' dell'insieme ii).

Più interessante può essere il far osservare che l'insieme $\mathfrak{J}$ può anche non essere connesso, nel senso intuitivo del termine. Invero si ottiene un insieme che soddisfa a tutti gli assiomi enunciati assumendolo costituito da infiniti intervalli distinti tra loro dell'asse reale, tutti aperti ad una delle estremità e chiusi all'altra. Un tale insieme si rappresenta facilmente mediante funzioni elementari come segue: indicato con x un numero reale qualsiasi, si indichi, come al solito, con $E(x)$ il massimo intero che non supera x e con $M(x)$ (da leggersi « mantissa di x ») il numero

$$M(x) = x - E(x).$$

Ovviamente si ha per $M(x)$ la proprietà

$$\forall x \{ 0 \leq M(x) < 1 \}. \tag{29}$$

Si considerino ora gli infiniti numeri reali, dati dalla espressione

$$X = 2E(x) + M(x) \tag{30}$$

quando x assume un qualunque valore reale. Si verifica immediatamente che i numeri X costituiscono infiniti intervalli sull'asse reale: ognuno di questi intervalli ha come estremo inferiore un intero pari e come estremo superiore un intero dispari; all'insieme appartengono tutti i numeri pari (che corrispondono ai valori interi di x) e non appartengono i numeri dispari (perchè la funzione $M(x)$ non assume il valore 1, pur ammettendolo come estremo superiore). Si verifica immediatamente che i numeri X soddisfano a tutti gli assiomi enunciati, quando alla relazione $X \mathfrak{S} Y$ si dia il significato $X < Y$.

C. F. Manara