ANNALI DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

Serie IV - Tomo XXVI - 1947

N. ZANICHELLI, Editore - BOLOGNA

Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli.

Nota II^a^ di OSCAR CHISINI **e di** CARLO FELICE MANARA **(a Milano).**

Sunto. - *Si caratterizzano le curve di diramazione di una classe di piani tripli più ampia di altra già trattata.*

1. In una Nota precedente (1), per impostare la questione della caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli abbiamo formulato i due seguenti problemi fondamentali:

A) Assegnare le condizioni caratteristiche (di tipo proiettivo e funzionale) sotto le quali una data curva è di diramazione per (almeno) un piano triplo;

B) Posto che una data curva soddisfi alle condizioni suddette, determinare i piani tripli, birazionalmente distinti, che la posseggano come curva di diramazione,

e li abbiamo risolti per le curve di diramazione dei piani tripli appartenenti a quello che abbiamo ivi denominato « caso semplice » cioè ottenibili per proiezione, sopra un piano, di una superficie F di ordine n (maggiore di tre) sprovvista di curva multipla, da un suo punto $(n-3)$-plo. Se distendiamo il piano triplo sopra il piano delle variabili x, y ed assumiamo come centro di proiezione il punto improprio dell'asse delle z, un generico modello proiettivo di piano triplo del « caso semplice » è allora rappresentato dall'equazione

$$az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0$$

dove a, b, c, d sono polinomii nelle variabili x, y i cui ordini sono in progressione aritmetica di ragione uno.

Nella presente Nota risolveremo gli stessi problemi per le curve di diramazione dei piani tripli appartenenti ad una classe più vasta di quella già considerata e comprendente quest'ultima sotto di sè come caso particolare; precisamente i piani tripli i cui modelli proiettivi possono essere rappresentati da un'equazione come quella qui sopra scritta dove però i coefficienti a, b, c, d sono generici polinomii nelle variabili x, y i cui gradi sono in progressione aritmetica di ragione diversa da uno. È appena necessario osservare che dalla genericità dei polinomii a, b, c, d segue che la curva di diramazione del piano triplo considerato è rappresentata dalla equazione che si ottiene

---

(1) O. CHISINI e C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, « Annali di Mat. », (4), 25 (1946), pp. 255-265.

ponendo uguale a zero il discriminante dell'equazione cubica scritta sopra *per intero*, cioè senza staccamento di fattori (²).

Avvertiamo anche qui che nel corso della trattazione indicheremo con una stessa lettera una curva piana ed il polinomio che, uguagliato a zero, ne fornisce l'equazione (polinomio che, come è noto, è definito a meno di una costante moltiplicativa); e che le curve che in particolare indicheremo con φ saranno sempre da considerarsi generiche nei sistemi continui a cui appartengono.

2. Consideriamo una curva irriducibile φ di ordine m (necessariamente pari) possedente come sole singolarità k cuspidi distinte; indichiamo con K il gruppo delle cuspidi di φ e con R un gruppo di m suoi punti allineati. Il problema A da noi enunciato al precedente paragrafo è risolto in questo caso dal seguente

TEOREMA A. - *La curva φ è di diramazione per un piano triplo se sono soddisfatte le tre seguenti ipotesi:*

1ª - *Esiste un intero* h *(positivo o nullo) tale che sussista la relazione*

$$3m^2 - 16k = 12h^2 \quad (^3) \tag{1}$$

2ª - *Il gruppo* K *delle cuspidi di φ è contenuto nella serie lineare, resa completa, secata dalle curve di ordine* $(m - 2h)/4$: *ossia esiste un gruppo* T *di* $(m - 2h)(m - 6h)/16$ *punti tale che*

$$K + T = \frac{m - 2h}{4} R \tag{2}$$

3ª - *Esiste almeno un gruppo* T′ *effettivo, non avente punti in comune con* T *ed equivalente a* T + hR (⁴).

Osserviamo anzitutto che dall'ipotesi 2ª si deduce (con procedimento perfettamente uguale a quello seguito nel « caso semplice ») l'esistenza e l'unicità di una curva p, aggiunta a φ, di ordine $(m - 2h)/2$, tangente alla φ ovunque la incontra fuori delle cuspidi e precisamente nei punti del gruppo T. Parimenti dall'ipotesi 3ª si deduce l'esistenza di una curva aggiunta ψ di ordine $m/2$ passante semplicemente per i punti del gruppo T e non contenente la p (nè avente parti comuni con essa) e secante su φ, fuori delle cuspidi e del

(²) La rappresentazione algebrica ed i modelli proiettivi di tali piani tripli sono stati diffusamente studiati da G. POMPILJ nella Memoria dal titolo: *Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Roma », (4), 3 (1939), pp. 109-132.

(³) Non offre difficoltà dimostrare che dal fatto che m è pari e che, insieme con k ed h soddisfa alla (1), segue che è intero il numero $(m - 2h)(m - 6h)/16$, come pure i numeri $(m - 6h)/4$, $(m - 2h)/4$, $(m + 2h)/4$, $m + (6h)/4$ che avremo occasione di incontrare nel seguito della trattazione.

(⁴) Come è facile verificare, queste ipotesi si riducono per $h = 1$ a quelle del « caso semplice ».

gruppo T, un gruppo T' equivalente a $T + hR$. Un noto teorema di GERGONNE, caso particolare del classico teorema di NÖTHER detto dell'$Af + B\varphi$, permetterà allora di scrivere

$$\varphi = \psi^2 - 4pp' \tag{3}$$

dove p' è una curva di ordine $(m + 2h)/2$ visibilmente aggiunta a φ e tangente ad essa, fuori delle cuspidi, dovunque la incontra, cioè nei punti del gruppo T'.

Osserviamo ora che le cuspidi di φ ed i punti T esauriscono le intersezioni di ψ con p; quindi, chiamata per un momento con $\bar{\psi}$ una determinata curva aggiunta secante su φ un gruppo $\bar{T}'$ (equivalente a $T + hR$) e chiamata analogamente $\bar{p}'$ la curva aggiunta a φ e tangente ad essa, fuori delle cuspidi, nei punti del gruppo $\bar{T}'$, il sistema completo delle curve ψ è dato dalle curve della forma

$$\psi = \bar{\psi} + p\sigma = 0$$

dove σ è un polinomio di ordine h (e quindi in particolare una costante se $h = 0$). Pertanto accanto alla espressione (3) per la curva φ sussistono le infinite altre

$$\varphi = (\bar{\psi} + 2p\sigma)^2 - 4p(\bar{p}' + \bar{\psi}\sigma + p\sigma^2)$$

da cui si deduce che la generica curva p' ha l'espressione

$$p' = \bar{p}' + \bar{\psi}\sigma + p\sigma^2 = 0$$

È quindi sempre possibile supporre che T' sia un gruppo generico nella serie dei gruppi equivalenti a $T + hR$ e pertanto *escludere che la curva* p' *sia riducibile,* giacchè questo fatto porterebbe di conseguenza l'esistenza di un fattore comune ai polinomii $\bar{\psi}$, p, e $\bar{p}$, e quindi, per l'espressione sopra data per la curva φ, la riducibilità di questa. Circostanza questa esclusa dalla nostra ipotesi di genericità di φ nel sistema continuo a cui appartiene.

Ora è stato dimostrato dalla prof. G. MASOTTI BIGGIOGERO [5] che, nelle ipotesi da noi poste per la curva φ, esistono per il gruppo T' una curva c di ordine $(m + 2h)/4$ ed una curva d di ordine $(m + 6h)/4$; quest'ultima ivi pluritangente alla φ e non contenente la c.

Chiamiamo ora Φ una curva determinata ma generica del fascio

$$d^2\varphi + \lambda(p')^3 = 0. \tag{4}$$

Essa è manifestamente irriducibile, di ordine $3(m + 2h)/2$ e possiede, come sole singolarità, delle cuspidi nelle cuspidi di φ con le medesime tangenti

---

[5] Cfr. G. MASOTTI BIGGIOGERO, *La caratterizzazione della curva di diramazione dei piani tripli ottenuta mediante sistemi di curve pluritangenti*, « Rend. Ist. Lomb. », vol. 80, (1946-47; pp. 1-12). Ivi l'Autrice dimostra il fatto per le curve di diramazione dei piani tripli del « caso semplice ». L'estensione al caso da noi qui trattato si ottiene semplicemente col rendere letterali gli indici numerici che l'Autrice appone alle curve che usa.

cuspidali e delle coppie di punti tripli nei punti del gruppo T' avendo ivi come tangenti le tangenti comuni a φ ed a d. Inoltre esiste una curva Ψ data da

$$\Psi = d\psi + cp'$$

irriducibile, avente ordine $3(m+2h)/4$ metà di quello di Φ, la quale visibilmente passa per la cuspidi di Φ stessa ed in ogni punto del gruppo T' possiede un nodo, con uno dei rami tangente alla tangente comune a φ, p' e d e quindi tangente ai tre rami di Φ che ivi hanno origine.

Ora è stato dimostrato ([6]) che ogni curva Φ_{6n} di ordine $6n$ possedente come sole singolarità $6n^2$ cuspidi che costituiscano il gruppo completo delle intersezioni di una curva p_{2n} (di ordine $2n$, un terzo di quello di Φ_{6n}) ed una ψ_{3n} di ordine $3n$ (metà di quello di Φ_{6n}) si può rappresentare nella forma

$$\Phi_{6n} = \{ p_{2n} \}^3 + \{ q_{3n} \}^2$$

dove q_{3n} è una curva che si rappresenta nella forma

$$q_{3n} = \psi_{3n} + p_{2n}\alpha_n = 0$$

(essendo α_n un opportuno polinomio); e tale risultato vale anche qualora le cuspidi di Φ_{6n} vengano a confluire a terne dando coppie di punti tripli infinitamente vicini, purchè si intenda che in questo caso la curva p sia ivi tangente alla tangente comune dei tre rami lineari che hanno ivi origine e la ψ_{3n} passi con un nodo, di cui un ramo sia tangente alla tangente comune.

Sotto queste ipotesi cade appunto la nostra curva Φ data dalla (4), in relazione alla quale l'ufficio delle curve p_{2n} e ψ_{3n} di cui abbiamo testè parlato è sostenuto dalla curva p' e dalla Ψ rispettivamente. Si potrà dunque costruire una curva q' dello stesso ordine di Ψ avente nei punti T' lo stesso suo comportamento e tale che Φ appartenga al fascio

$$\{ p' \}^3 + \mu \{ q' \}^2 = 0.$$

Con scelta opportuna dei polinomii che, uguagliati a zero, dànno le equazioni delle curve in questione sarà quindi possibile scrivere

$$d^2\varphi = 4 \{ p' \}^3 + \{ q' \}^2. \tag{5}$$

Abbiamo più sopra escluso che la curva $p' = 0$ possa essere riducibile e, dalla espressione trovata per la curva $\Psi = 0$ si esclude pure facilmente che essa, e quindi la $q' = 0$, possa contenere la $p' = 0$ come parte. Possiamo quindi concludere che non esistono parti comuni alle curve $p' = 0$ e $q' = 0$ e pertanto, in base alla formula (5) qui scritta, dedurre che la nostra curva φ costituisce l'intera curva di diramazione del piano triplo

$$z^3 + 3p'z + q' = 0 \text{ ([7])}.$$

([6]) Cfr. C. F. MANARA, *Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, « Boll. Un. Mat. It. », serie II, anno III, 1948, pp. 114-119.

([7]) Cfr. G. POMPILJ, Mem. cit. in ([2]).

3. Passiamo ora ad affrontare il problema B che risolveremo dimostrando l'unicità birazionale del piano triplo costruito a partire da una curva φ che soddisfi alle ipotesi del Teorema A; per tale scopo è opportuna una seconda rappresentazione analitica della curva φ, che raggiungeremo attraverso le seguenti considerazioni:

applichiamo anzitutto il teorema, già invocato, di GERGONNE alla curva p'. Poichè, come è facile verificare, i punti T' esauriscono le intersezioni delle curve c e d e poichè la curva p' passa per tutti i punti T' essendo ivi tangente alla curva φ e quindi alla d, esisterà un polinomio b di ordine $(m-2h)/4$ tale che sia

(6) $$p' = db - c^2.$$

Analogamente, applicando ripetutamente il teorema di NÖTHER alla curva q e tenendo conto del comportamento che questa deve avere nei punti del gruppo T', cioè un nodo in ognuno di essi, con uno dei rami tangente alla φ (e quindi alla d) si conclude che devono esistere un polinomio a di ordine $(m-6h)/4$ ed un polinomio b' di ordine $(m-2h)/4$ tali che

$$q' = d^2a + cdb' + 2c^3.$$

Sostituiamo ora nella (5) le espressioni qui trovate per i polinomii p' o q' ed imponiamo che il polinomio che ne risulta al secondo membro sia divisibile per d^2; eseguiti i calcoli, troviamo che deve essere divisibile per d il polinomio

(8) $$12bc^4 + 4b'c^4$$

e poichè, come abbiamo ricordato sopra, d non contiene c, dovrà essere divisibile per d il polinomio

(9) $$12b + 4b'$$

Sono ora a distinguersi due casi. Anzitutto se è $h > 0$ il polinomio d di ordine $(m+6h)/4$ può dividere il polinomio (9) che ha ordine $(m-2h)/4$ solo se quest'ultimo è identicamente nullo; si ha allora

(10) $$b' = -3b$$

e si può scrivere

(11) $$q' = ad^2 - 3bcd + 2c^3.$$

Se invece $h = 0$ i polinomii a, b, b' c, d hanno tutti lo stesso ordine $m/4$ e possiamo intanto, concludere che deve essere almeno

$$b' = -3b + \lambda d.$$

Ma allora posto $a' = a + \lambda c$ abbiamo ancora

(11)' $$q' = a'd^2 - 3bcd + 2c^3$$

In ogni caso dunque, portate le espressioni definitive di p' e q', date dalle (6), (11) oppure (11)', nella (5) e scrivendo sempre a al posto di a' avremo

(12) $$\varphi = a^2d^2 + 4ac^3 - 6abcd - 3b^2c^2 + 4b^3d$$

ossia φ risulta data dal discriminante dell'equazione di terzo grado in z

$$az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0. \tag{13}$$

L'espressione (12) è appunto quella che ci servirà per punto di partenza per risolvere il nostro problema B e precisamente dimostrare l'unicità birazionale del piano triplo costruito a partire dalla curva data φ.

4. Siamo giunti a rappresentare la curva φ mediante quattro polinomi a, b, c, d di cui abbiamo dimostrato l'esistenza, e di conseguenza abbiamo anche costruito un modello proiettivo (13) di piano triplo diramato dalla φ stessa. Viceversa è chiaro che, dato un piano triplo (13), in cui i coefficienti siano dei polinomii di ordini rispettivamente $(m - 6h)/4$, $(m - 2h)/4$, $(m + 2h)/4$, $(m + 6h)/4$ esso ammette una curva di diramazione di ordine m che soddisfa alle ipotesi del teorema A. Si deduce facilmente di qui che le curve di un dato ordine che soddisfanno alle ipotesi del teorema A appartengono ad un unico sistema continuo.

Facciamo allora variare φ nel sistema continuo (12) da essa definito, in modo che i polinomi a e d tendano a diventare nulli, cosicchè essa si riduca, al limite, alla somma di due curve doppie c^2 e b^2 e le sue cuspidi confluiscano a terne nelle intersezioni di c e b.

La curva φ viene così a ricadere sotto le ipotesi di un noto teorema di identità birazionale del CHISINI [8] e pertanto possiamo concludere che sussiste il

TEOREMA B. - *Esiste un unico piano triplo (nel campo birazionale) che ammette come curva di diramazione una φ soddisfacente alle ipotesi del teorema* A.

---

[8] Cfr. O. CHISINI, *Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili possedenti una medesima curva di diramazione*, « Rend. Ist. Lomb. », vol. 77, (1943-44; (pp. 1-18).