

09-12-97 Sugli enti della geometria. Note per un colloquio con Evandro Agazzi.

NdR Note reimpaginate Dicembre 2014.

-Gli apparenti paradossi nascono (forse) dall'estrapolazione fantastica, la quale induce ad attribuire un referente costante ad ogni termine. Per esempio "retta", immagine che costruiamo a partire da esperienze limitate (filo sottile teso, raggio di sole che penetra in una stanza buia e polverosa, ecc.). L'espressione linguistica del concetto conduce poi ad enunciare dei postulati di esistenza (giustamente qui, dice Toth) che si riferiscono a comportamenti attualmente non osservati o sperimentati. Così il V Postulato afferma che se la somma di due certi angoli differisce da 2π , esiste un punto (unico in forza di altri postulati) di intersezione fra le due rette. Questa non sperimentabilità permette l'avventura non euclidea!

-Ma quando poi sentiamo dire che può darsi benissimo che le cose non stiano così, allora nasce spontaneamente la domanda: ma allora la retta come si comporta? Il fatto è che l'ente che chiamiamo con un unico nome non è unico. Perché la definizione è fornita dall'insieme di tutti i postulati! [Apologo del pezzo del gioco degli scacchi]. Il fatto è che quando si tratti di concetti o di deduzioni non è più l'esperienza o la fantasia a dettare legge.

-Tuttavia occorre tenere presente la limitatezza dei nostri mezzi. Ciò permette di pensare che la verifica riguardante l'adeguamento dello schema teorico alla realtà materiale osservata abbia pure

dei limiti. In altre parole, lo schema matematico (in particolare geometrico) non esaurisce la ricchezza dei contenuti sperimentali (attuali o possibili futuri). Esempio di questo fenomeno è il concetto di “Continuo geometrico”. È chiaro che per i bisogni della Fisica moderna tale schema concettuale può apparire inadeguato. Tuttavia esso viene utilizzato ancora in ambiti molto estesi, pur con la coscienza delle limitazioni opportune o addirittura necessarie in qualche caso. Cose analoghe potrebbero essere ripetute a proposito degli strumenti e dei concetti del calcolo differenziale impiegati nella fisica e nella tecnica. Non è escluso che le recenti scoperte relative ai buchi neri dell’Universo rendano opportuno l’impiego dei concetti relativi a spazi curvi moltiplicemente connessi, o anche dei concetti di Geometria non Archimedeica.

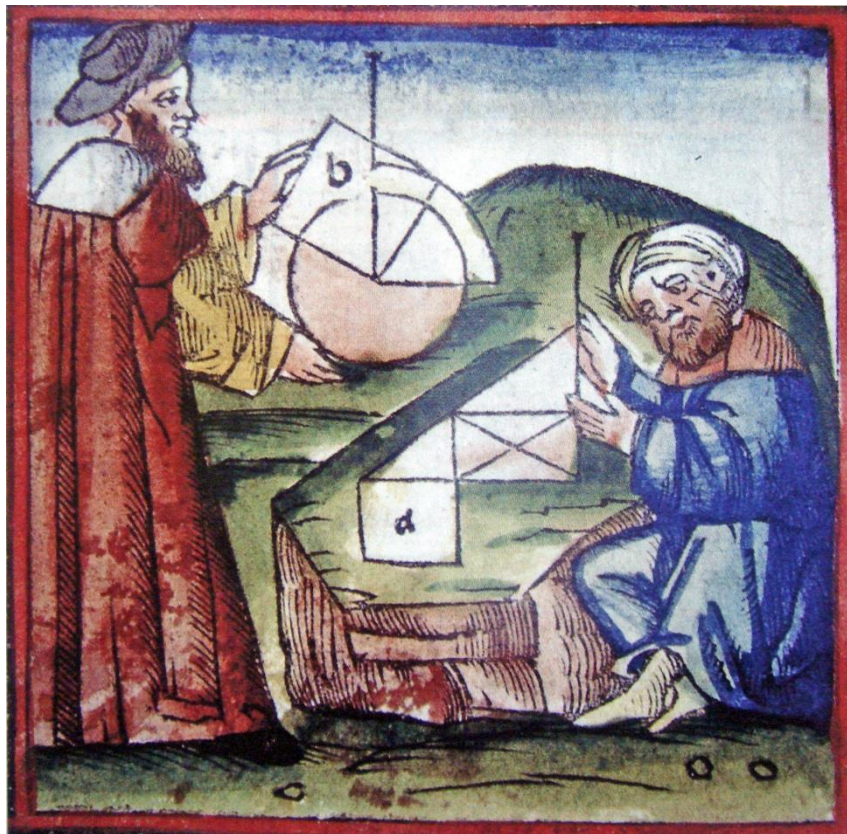
Pertanto anche il responso dell’osservazione (ed in particolare dell’esperimento) come tribunale di ultima istanza, che giudica dell’adeguatezza (e quindi su un certo aspetto della validità di una teoria), non dà un giudizio perentorio per quanto riguarda l’accettazione di un dato schema teorico. Come è noto il giudizio è molto più importante o valido quando si tratti della refutazione di una teoria. Ma anche qui la refutazione va intesa nei limiti dell’ambito in cui si agisce. Per esempio non sarebbe saggio considerare la teoria della “granularità” della materia come una refutazione della continuità geometrica.

-Cartesio e Poncelet. Per quanto riguarda la geometria analitica e proiettiva penso utile qualche approfondimento. Mi pare che non possano sussistere dubbi sul fatto che l’insieme di dottrine oggi classificate come Geometria Analitica abbia un prevalente aspetto di *metodo*. Lo stesso Cartesio, alla fine della *Géométrie*, dichiara il carattere metodologico della sua opera. Ma è chiaro che egli non dimostra alcuna posizione di dubbio nei riguardi dei fondamenti della geometria euclidea: questa viene da lui accettata in pieno, ed anche la struttura del piano e dello spazio euclideo non è mai messa in discussione. Quindi si potrebbe dire che l’opera di Cartesio propone una rivoluzione di carattere linguistico: egli propone di sostituire l’impalcatura della logica tradizionale con i calcoli delle operazioni regolate dalle leggi formali dell’algebra. Il caso della geometria proiettiva, ed in particolare il pensiero di Vittorio Poncelet, si presenta invece in modo che io ritengo abbastanza diverso. Penserei che non valga la pena di prendere troppo sul serio il cosiddetto “metodo di Poncelet” ai fini di una classificazione come questa: invero questo metodo conduce a “leggere” (per così dire) le proprietà elementari delle figure con linguaggio proiettivo. E quindi è principio di generalizzazione, e conduce ad immergere le figure e le loro proprietà in un ambiente del tutto nuovo; ma proprio questo ambiente mi pare sia la vera invenzione di Poncelet. Pertanto la geometria proiettiva di sua creazione non si limita a realizzare un nuovo metodo, ma apre orizzonti veramente nuovi alla concettualizzazione delle nostre esperienze spaziali. Naturalmente non si vuole qui negare l’aspetto metodologico, ma soltanto sottolineare che il limitare a questo il contributo della geometria proiettiva mi pare molto limitativo.

-Analoghe considerazioni si potrebbero fare con la costruzione che K.K. von Staudt diede della geometria proiettiva con la sua “*Geometrie der Lage*”. In particolare, da questo punto di vista, con il suo “metodo” Poncelet mi appare come un valido precursore di Klein.

-A proposito di Klein, guardando le cose dopo più di un secolo dalla sua opera, mi pare di poter dire che io vedrei nella sua opera l'aspetto pionieristico che conduce a costruire le classi di equivalenza delle figure geometriche collegandole alla struttura algebrica di gruppo. È infatti possibile dimostrare che proprio le leggi della struttura gruppale possono permettere di introdurre in un insieme una relazione avente le proprietà formali che ne fanno una "relazione di equivalenza", secondo la dicitura classica. Quindi proprio la visione kleiniana permette di codificare, per così dire, la costruzione del concetto, inteso come proprietà comune a tutti gli oggetti di una determinata classe, e quindi di caratterizzare quest'ultima.

-La preoccupazione di introdurre in questo modo un osservatore necessario per la costruzione di una geometria può essere superata parlando di "corrispondenza biunivoca" o di "bijezione", invece che di "trasformazione". Ma forse quest'ultimo vocabolo permette di richiamare l'attenzione sulle esperienze che fondano ed introducono la costruzione delle immagini e poi dei concetti geometrici.



Manoscritto del Quattrocento