16th WORLD CONGRESS
OF PHILOSOPHY
DÜSSELDORF 27.8.–2.9.1978

Carlo Felice MANARA

SUCCES ET LIMITES DE LA MATHEMATISATION

1 - Avant de commencer à parler du thème qu'on m'a confié, je dois vous prévenir que je vais le faire en mathématicien, tel que je suis; par conséquent il est bien naturel qu'on aille découvrir dans mon discours maintes lacunes et limitations, qui sont dues à l'optique assez restreinte dans laquelle je vais plonger mes propositions. Et d'ailleurs je ne puis pas m'arroger des compétences ou des connaissances que je n'ai pas.

D'abord je voudrais dire que le mot mathématisation pourrait être jugé assez générique, et peut être son analyse pourrait nous amener à mieux connaître ce phénomène, et à nous rendre compte de son importance et de sa signification. Car je pense qu'on puisse distinguer des différentes façons de mathématisation, auxquelles correspondent, à peu près, des différentes périodes historiques, et aussi des différents niveaux de profondeur de ce phénomène. Par conséquent je voudrais faire un excursus historique très abrégé, car je pense que l'analyse des phénomènes passés et de leur signification puisse nous aider à comprendre le sens et la signification des phénomènes d'aujourd'hui. J'attacherai à chaque niveau les noms de certains savants, mais je vais faire cela d'une façon assez conventionnelle; c'est-à-dire le fait que j'attacherai le nom de tel ou tel savant à une certaine époque ne veut pas signifier un jugement d'importance ou la volonté de laisser dans l'ombre les autres qui lui sont contemporains et peut-être plus grands que lui. Tout simplement cela va signifier que à mon avis (et peut-être à tort) le nom ou les noms que je vais prononcer vont donner plus directement l'image de ma pensée.

2 - Comme je viens de dire, je pense qu'on pourrait distinguer des différents niveaux de mathématisation, avant la mathématisation que je voudrais nommer moderne tout court. Je voudrais associer à un premier niveau le nom d'Euclide, à un deuxième les noms de Galilée, Descartes, Newton, Leibnitz, à un troisième les noms de Laplace et Fourier, et enfin à un quatrième le nom de Einstein. Evidemment chacun de ces nivéaux a ses succès et ses limites.

Je pense qu'il ne soit pas nécessaire de s'arrêter longuement sur l'étape qu'on a associée au nom d'Euclide. Je me bornerai donc à rappeler les marques caractéristiques de cette profondeur de mathématisation: à mon avis ces marques sont donnés d'abord par la prééminence de la géométrie dans l'ensemble de la mathématique et par l'emploi de la logique classique comme moyen de déduction. A ce niveau de mathématisation, le continu, tant géométrique que physique, était manié et maîtrisé par la théorie des proportions; et on sait très bien que cette théorie substituait, à cette époque, la théorie des nombres rationnels et aussi, par le truchement de l'image géométrique, la théorie qu'on appelle aujourd'hui des nombres réels.

Il est assez évident que la mathématique, à cette époque, ne se souciait guère d'admettre l'évidence comme un critère de vérité; et d'ailleurs les 'Eléments' d'Euclide nous donnent un paradigme de traité scientifique selon les idées de Aristote. Il est à peine nécessaire d'ajouter que dans cette optique on acceptait la définition de la mathématique comme science de la quantité, subdivisée en géométrie (en tant que science de la quantité continue) et arithmétique (en tant que science de la quantité discrète). On pensait donc que la mathématique était spécifiée, en tant que science, par ses objets; une conception qui d'ailleurs a été retenue jusqu'au XIX siècle à peu près.

Le niveau que je voudrais associer aux noms de Galilée, Descartes, Newton, Leibnitz pourrait être caractérisé par des nombreux phénomènes qu'il est utile d'analyser. D'abord la mathématique commence à se transformer dans le langage de la mécanique et, potentiellement, dans le langage de la physique. A ce sujet je voudrais rappeler une page de Galilée qui est classique, où ce savant énonce d'une façon consciente et explicite que "… le grand livre de la Nature est écrit dans le langage de la mathématique". Par conséquent la mathématique doit devenir (en principe au moins) le langage officiel de la science. Il est presque inutile de rappeler que le procédé standard pour associer un nombre à chaque grandeur physique est le procédé de la mesure; et il va sans dire que ce procédé manifeste un très grand degré de conventionnel, comme on le voit clairement - par exemple - dans le choix de l'unité. La géométrie analytique, par sa méthode des coordonnées, nous permet de bien comprendre la signification de la mathématisation à cet étage: les objets de la géométrie (les points, notamment) sont représentés par des nombres conventionnels: les coordonnées. Les relations entra les objets sont exprimées par des relations mathématiques (égalité, inégalité, etc.) entre les coordonnées; la déduction des propriétés des figures, comme la solution des problèmes, est confiée à l'algèbre. Tout cela est possible d'abord parce que l'algèbre existe, en tant que doctrine indépendante; et deuxièmement parce que on a une confiance absolue et naïve dans la fidélité de l'image que les nombres nous donnent de la réalité géométrique ou physique. En plus on ne doutait pas qu'on pût avoir des lois vraies ou fausses, et que la physique pût atteindre la même transparence que la géométrie; ce qui est d'ailleurs démontré par le caractère strictement euclidien des "Principia" de Newton.

Mais je voudrais observer que, même à ce niveau, la mathématique n'avait pas un état qui d'un coté pourrait être jugé complètement ancillaire vis-à-vis de la géométrie et de la mécanique, et de l'autre coté complètement indépendant: au contraire, les contenus, géométriques ou physiques, posaient des questions qui, à tour de rôle, stimulaient la mathématique, faisaient éclater des problèmes, bouleversaient maintes rapports qu'on pensait établis. Ces problèmes ne concernaient pas la logique intérieure de la mathématique, à propos de laquelle on n'avait pas de doutes; tout au plus on commençait à se poser des questions à propos de l'infini. Et ici je ne voudrais pas me passer de rappeler la réponse que déjà Galilée donne à une question concernante une propriété de l'ensemble infini des nombres entiers. Il remarque explicitement que dans les ensembles infinis on ne peut pas employer sans précautions les notions classiques et intuitives qui règlent les rapports entre le 'tout' et les ‘parties’; on pourrait donc reconnaître là le germe de la théorie des ensembles. Mais je voudrais m'arrêter surtout sur le problème du continu.

En effet on pourrait dire que à cette époque on commence à se rendre compte de la nécessité de maîtriser le continu par des instruments formels, tel que le calcul des infiniment petits ou des infiniment grands; on commence donc à bâtir les instruments pour l'analyse de cette propriété de continuité de l'espace géométrique ou de la matière physique qui, jusqu’à ce moment là, a été pensée comme tout à fait simple et évidente. En effet on sait très bien que à cette époque a sa naissance la branche de la mathématique qu'on appellera ensuite ‘Analyse’ tout court; on pourrait dire que, dès le début, on la conçoit comme une technique pour maîtriser l'infiniment petit et l'infiniment grand, qu'on regarde comme deux espèces qui entrent dans le genre di continu.

Il est à peine nécessaire de dire que cette mathématique, dont on est en train de parler maintenant, connait ses propres bornes et ses limites. Notamment elle est consciente du fait que la mécanique rationnelle connait seulement les phénomènes qu'on nomme réversibles, et que par conséquent les phénomènes de la chaleur et de la vie lui échappent. En plus, la mathématique entraine avec soi le cliché de la science parfaitement claire et certaine, et elle doit donc s'avouer impuissante vis-à-vis des phénomènes qui n'entrent pas dans ce cadre: notamment les phénomènes du hasard.

On sait que ces bornes ont été dépassés à l'époque suivante, que j'ai associée conventionnellement aux noms de Laplace et de Fourier. J'ai nommé ces deux savants non pas (comme j'ai dit plusieurs fois) pour leur donner une place particulièrement privilégiée vis-à-vis des mathématiciens de leur époque, mais pour souligner le commencement d'un agrandissement important du domaine de la mathématique. Dans le cas de Laplace, il s’agit de la naissance d'une théorie qu'on prétend rigoureuse du calcul des probabilités; dans le cas de Fourier il s'agit du commencement d'une théorie mathématique des phénomènes non réversibles dans le temps.

On pourrait présenter l'œuvre de Laplace, à propos de la probabilité, comme une tentative de donner des lois certaines (dans la mesure du possible) à des événements qui sont, en principe, incertains; ou bien, comme on dit parfois, comme une tentative de rationaliser ce qui, par définition, n’est pas rationalisable: le hasard. Et là, tout en laissant de coté les célébrations enthousiastes des gens (et les discours de Laplace même à ce propos) on ne peut pas ignorer que le commencement de l'analyse logique et rigoureuse du hasard (qui était considéré auparavant comme le paradigme du manque de certain et donc du manque de connaissance scientifique) marque le début d’un domaine nouveau pour la connaissance humaine.

Dans le cas de Fourier on tâche de donner une analyse rigoureuse et complète des phénomènes qui échappaient à la connaissance scientifique qui dominait jusqu'à l'époque. En effet - comme on a déjà dit- les succès de la mécanique rationnelle ne cachaient pas les limites de cette doctrina qui considérait le temps comme une variable symétrique, c'et-à-dire qui considérait seulement les phénomènes réversibles; on ignorait donc une grandeur privilégiée, qui est le temps, et son caractère fondamental. Donc l'œuvre de Fourier nous permet de maîtriser des phénomènes qui appartiennent à un domaine tout à fait nouveau: on a là le début d'une théorie rigoureuse de la chaleur, qui aura dans la thermodynamique et dans les travaux de Carnot, de Gibbs et de Boltzmann son achèvement complet. Mais je voudrais rappeler aussi que l'on a dans l'œuvre de Fourier des idées très modernes à propos de la signification de la mathématisation de la réalité physique: en effet on pourrait dire que l'on trouve énoncé, avant la lettre, la nature du modèle mathématique d'une réalité sensible. Fourier déclare très clairement que les développements de ses calculs sont valables quelle que soit l'image que l'intuition nous donne de la chaleur; on a donc, pour la première fois, que je sache, le cas d'un savant qui renonce à donner une image qui soit "évidente" vis-à-vis de ce qu'on appelle l'intuition physique, mais qui cherche le vérité des équations et des lois physique indépendamment de l'image qu'on se fait des choses. Il est à peine nécessaire de dire que la physique d'aujourd'hui doit ses succès exactement à ce procédé; dans la nouvelle théorie des quanta - par exemple - on a été obligé d'abandonner toute image intuitive des objets de la physique, pour rechercher seulement la vérité dans l'adhérence des lois et des déductions formelles à l'expérience.

3 - Pour bien faire comprendre l'analyse que je vais faire tout de suite je dois dire quelques mots à propos de la crise de la mathématique pendant le XIX siècle, crise qui a son issue dans la mathématique moderne. Cet exposé est nécessairement rudimentaire, et touchera seulement les points que je pense les plus importants de ce phénomène, qui est à la fois scientifique et historique. Je pense qu'une image assez intéressante de ce phénomène puisse être donnée par l'évolution da la géométrie pendant le XIY siècle. En effet, au début de ce siècle la géométrie était encore considérée comme une science qui avait des objets, et qui était spécifiée par ces objets. Il suffit, pour se convaincre, de consulter l'Encyclopédie de Diderot: elle nous donne une image de la mathématique et notamment de la géométrie qui n'a aucune différence (hormis la quantité des connaissances) de la conception classique. Mais la crise de la géométrie non-euclidienne produit pendant le siècle un tel changement que à la fin du XIX siècle la géométrie a atteint une image tout à fait différente. En effet on doit remarquer que, dès qu'on a démontré que les géométries non-euclidienne ne sont pas contradictoires et que, au contraire, elles ont le même titre à l'existence que la géométrie euclidienne, on doit complètement changer notre conception de la géométrie.

Car s'il existe un "objet" de la géométrie (quelle que soit la signification du mot 'objet') on n'arrive pas à admettre qu'il existent des théories contradictoires et également valables d'un seul et même objet. On a ainsi bouleversé l'idée d'une vérité géométrique", mais on a aussi bouleversé l'idée même d'une théorie mathématique de la réalité, car on a été obligé d'abandonner le critère de l'évidence sensible pour l'adoption des propositions premières d'une théorie mathématique. D'ores et déjà on sera obligé d'adopter une signification du mot "vérité" qui sera différente de celle qu'on concevait jusqu'ici comme telle. Le mot même de "géométrie" admettra deux significations: l'une qui est celle d'une chaine de propositions qui sont, en principe, vides, et liées seulement par l'exigence de la cohérence avec les propositions qu'on a choisies comme primitives; l'autre comme une science qui a le même classement que la physique, c'est-à-dire une science dont les propositions ont la valeur d'un modèle mathématique de la réalité sensible; dans ce cas, cette réalité est celle des opérations concrètes qu'on opère sur les corps matériels qui sont "sensiblement rigides". Je voudrais rappeler ce que j'ai dit tout à l'heure, lorsque j'ai énoncé que les propositions initiales de la géométrie (et désormais de toute théorie mathématique) sont choisies, et non imposées par l'évidence d'une réalité extérieure, qui, dans le cas de la géométrie, devrait être la réalité de l’espace ou des figures géométriques ou un objet quelconque de cette nature (supposée). L'adoption de cette optique pose des problèmes que la mathématique classique ne connaissait pas; car si l'on laisse tomber cette "réalité" qui nous donne la certitude inébranlable des propositions initiales, si celles-ci peuvent être choisies d'une façon (en principe) arbitraire, alors on débouche nécessairementsur le problème (qui est cette fois un problème logique et non simplement mathématique) d'assurer l'absence de contradictions cachées dans l'ensemble des propositions qu'on a choisi comme initiales. Le problème se pose donc d'assurer la cohérence d'un ensemble de propositions initiales qui n'ont pas de référence immédiate à une réalité qui soit évidente en soi.

On reviendra sur ce problème dans la suite; je voudrais maintenant m'arrêter pour rappeler l'œuvre de F. Klein et pour parler des idées qui ont été introduites par lui dans la géométrie. En effet l'œuvre de Klein se présente, à première vue, comme une tentative d'introduire des critères d'unification dans la forêt des théories géométriques qui avaient eu leur naissance pendant le XIX siècle; mais ce qui me semble très important dans ce travail est le fait que le savant allemand relie les idées fondamentales de la géométrie avec une structure algébrique qui était destinée à un rôle fondamental dans la suite de l'histoire de la mathématique: la structure de groupe, qui a été considérée par Klein dans la spécialisation des groupes de transformations, mais qui néanmoins permettait de formuler d'une façon très précise et rigoureuse l'idée d'invariant (par rapport à un tel groupe). On ouvrait ainsi la route destinée à déboucher dans la géométrisation de la physique. Car la mathématique (et notamment la géométrie) possédait désormais les instruments pour traduire d'une façon rigoureuse et complète les exigences d'invariance par rapport aux changements d'observateur qui sont à la base d'une idée de science objective, détachée du sujet; idée qui est essentielle, à mon avis, à toute idée de connaissance scientifique telle qu'on l'a conçue jusqu'ici. Donc, dans cette optique, l'idée de géométrisation de la physique n'amène pas à la "confusion" ou à la "relativisation", selon les craintes de certains philosophes d'autrefois, mais au contraire elle nous amène à l'adoption de nouvelles techniques mathématiques dans la physique, et notamment elle nous donne les moyens pour traduire dans un langage rigoureux les exigences d'objectivité qui sont sous-jacentes à toute recherche scientifique

Je pense que l'on peut maintenant comprendre pourquoi j'ai parlé d'un niveau de mathématisation que j'ai voulu associer au nom de Einstein; à mon avis cette idée est justifiée d'abord par le fait que l'optique de Einstein amène, d'une façon plus ou moins explicite, à abandonner le procédé classique de la mesure pour traduire les faits de l'expérience dans le langage de la mathématique, et amène, en principe au moins à l'adoption de procédées qui sont bien plus généraux. On pourrait comparer ce progrès à celui qui a été produit par Gauss, qui a introduit les coordonnées générales sur les surfaces, à la place des coordonnées cartésiennes classiques. Je voudrais ajouter que la géométrisation qui s'ensuit n'implique aucunement la confusion de l'espace et du temps, en tant que catégories de l'expérience sensible, mais nous amène à l'adoption d'une idée bien plus générale qu'auparavant de l'emploi du langage da la mathématique et dans la connaissance de la physique. En effet, comme on a déjà dit, l'adoption de la géométrisation de l'expérience nous permet de traduire l'exigence de l'objectivité d'une théorie par les techniques rigoureuses du calcul tensoriel. Bien sûr, je n'affirme guère que Einstein fût complètement conscient des conséquences de ses idées; ni, non plus, les géomètres qui avaient développé le calcul tensoriel, qui a donné à Einstein les moyens pour écrire ses équations. Mais on ne peut pas se passer d'observer que ces idées tellement importantes et profondes ont leur racine dans la crise de la mathématique du XIX siècle.

Je ne voudrais pas conclure ce petit croquis sur les différents niveaux de mathématisation qui précèdent la mathématisation d'aujourd'hui sans rappeler les idées de Helmholtz à propos des fondements de la géométrie; je dois me borner ici à dire que ces idées se rattachent d'une façon naturelle à celles de Klein, et tâchent de donner les fondements de la géométrie (mais aussi, en principe de toute connaissance physique) en s’appuyant sur l'idée de groupe de transformations.

4 - L’aperçu que je viens de donner a été bien rudimentaire, mais je pense qu'il est suffisant pour donner une idée des problèmes de la mathématisation classique, et de la signification de ce phénomène scientifique. On comprend assez bien que l'analyse mathématique du continu, la théorie des ensembles dans le sens de Cantor, l'analyse des fondements de l'arithmétique développée par Frege, Peano, Russel devaient déboucher dans la situation présente, que je tâcherai de décrire aussi fidèlement et aussi brièvement que je pourrai.

Je voudrais d'abord dire que évidemment on ne peut plus penser aujourd'hui de définir la mathématique par son objet, tâcher par exemple de la définir comme "science de la quantité" comme on pensait de pouvoir faire jadis. Au contrarie on pourrait dire que la mathématique est qualifiée aujourd'hui plutôt par ses procédés que par ses objets; ce qui rend très difficile non seulement la définition de la mathématique, mais aussi sa description; de sorte que, si l'on voulait choquer les gens on pourrait poser la question non pas de définir le domaine de la mathématique, mais de rechercher les domaines de la connaissance humaine dans lesquels la mathématique n'entre pas. Mais, en laissant de coté les paradoxes, on tâchera d'analyser la signification de la mathématisation dans les différents domaines.

En ce qui concerne d'abord le domaine classique de l'emploi de la mathématique, c'est-à-dire le domaine de la physique, je voudrais dire que la faillite et l'abandon des modèles classiques de l'atome a donné le coup de grâce à une certaine conception de l'intuition physique, qui était peut être assez liée à une certaine conception classique de la géométrie. Cette faillite a marqué la conquête d'une nouvelle profondeur de mathématisation, parce que on a été obligé d'abandonner l'imagination et de concevoir la connaissance de la matière comme un ensemble de rapports logiques, strictement dirigés par certaines lois, qui sont formulées sans passer par l'intuition géométrique, et par conséquent sans s'appuyer sur l'imagination. On pourrait dire, dans cette optique, que la nouvelle théorie des quanta a marqué non seulement l'abandon d'une idée de continuité physique qui était fondée plus sur l'imagination que sur l'expérience et la raison, mais aussi la revanche de la raison mathématisée, qui donne une situation privilégiée au symbole conventionnel et à la déduction rigoureuse par le calcul. En effet on a du se convaincre que ce qu'on appelait autrefois l'intuition physique était fondée plus sur imagination que sur l'expérience; et que par exemple, le dictum classique "natura non facit saltus" était plus l'expression d'une certaine insuffisance de nos sens qu'une vérité nécessaire.

Par conséquent on a que la physique théorique d'aujourd'hui emploie de plus en plus des structures algébriques qu'on aurait nommées "étranges" jadis: algèbres non commutatives, non associatives etc. On pourrait dire qu'on observe ici un effet à peu près analogue à celui qui a été produit par l'abandon du schéma euclidien dans la relativité générale. L'évidence de l'expérience nous a obligé d'abandonner le schéma de l'algèbre des nombres réels, qu'on estimait jadis la seule et unique algèbre. On a compris ensuite que ce schéma n'était nullement unique ni nécessaire pour décrire la réalité, et que l'on pouvait avoir des portraits parfaitement cohérents de celle-ci, et prévoir aussi les résultats des expériences futures en adoptant des schémas théoriques différents. Mais ceux qu'on pourrait nommer les succès plus éclatants de la mathématisation sont atteints dans les nouveaux domaines dans lesquels la mathématique se trouve engagée. Je me bornerai ici à en nommer seulement quelqu'un, car il serait trop difficile d'en faire une liste complète.

D'abord je voudrais nommer l'économie: ici l'emploi de la mathématique a permis de soumettre à une analyse rigoureuse la conduite de l'homme vis-à-vis des choix économiques; et, en revanche, les nécessités de l'emploi de la mathématiques dans ces nouveaux domaines ont stimulé la naissances de branches nouvelles de mathématique, comme la théorie des jeux et des stratégies. Je voudrais aussi rappeler l'évolution moderne de l'idée de probabilité: en effet on pourrait plonger le calcul classique des probabilité plutôt dans la logiques des décisions humaines que dans la logique de la connaissance. On a là le début de la théorie qu'on nomme "subjective" de la probabilité, qui permet de répondre aux paradoxes et de surmonter les difficultés de la théorie classique, qu'on pourrait nommer "objective". Et l’on pourrait aussi espérer que dans cette optique maintes problèmes de l'inférence statistique pourront être éclairés si non résolus. Et d'ailleurs l'adoption de la statistique, à la place de la mesure d'une grandeur qu'on donne 'a priori' comme existante, permet l'emploi de la mathématique dans des domaines où il serait très difficile de définir qu'est-ce que c'est que mesurer: par exemple dans les sciences biologiques, dans les sciences humaines etc. Si on regarde dans cette otique le calcul des probabilités on peut s'apercevoir qu'il se rattache d'un coté à l'économie, de l'autre à la théorie de l'information; en effet on peut considérer le calcul des probabilités comme une théorie des décisions humaines dans les conditions d' incertitude, et de l'autre coté comme une théorie pour l'exploitation optimale des informations que l'on reçoit de l'expérience. Comme on sait très bien, cette exploitation est obtenue en s'appuyant sur des hypothèses de cohérence, qui nous amènent aux théorèmes classiques de la probabilité, et sur la formule de Bayes (et les formules analogues) envisagée comme une règle pour l'exploitation des informations qu'on acquiert.

J'ai nommé l'information, et ce mot nous amène à considérer un autre grand domaine dans lequel la mathématique a une place fondamentale. En effet la théorie de l'information nous donne l'idée d'une chose (l'information, que je ne voudrais pas définir ici) que l'on connaissait d'une façon assez générique et qui, par la mathématique, a été soumise à une définition rigoureuse, qui a été rendue mesurable moyennant certains axiomes, et qui a donné naissance à une théorie indépendante. Il est presque impossible de décrire ici l'importance de la théorie de l'information dans la science d'aujourd'hui, et de rappeler l’étendue de son domaine: il suffira, je pense, de nommer les ordinateurs et leur emploi dans la science et dans la vie associée. Je ne voudrais pas m'arrêter longtemps sur ce sujet, et je me bornerai à rappeler que l'idée de "entropie" qui a eu sa naissance dans la thermodynamique, a trouvé un nouvel emploi dans la théorie de l'information, et nous aide à donner une signification rigoureuse aux idées, assez génériques, d'ordre et de désordre.

En ce qui concerne l'influence de la mathématique dans le domaine de la psychologie, je voudrais d'abord rappeler les recherches à propos des fondements psychologiques des idées géométriques; à ce propos je voudrais rappeler l'œuvre fondamentale de D. Hilbert sur les fondements de la géométrie. Je voudrais donner une place privilégiée à cette œuvre parce qu' il me semble que le but de Hilbert a été non seulement de rétablir sur des bases logiquement inébranlables les idées de la géométrie classique, mais aussi de respecter un certain échelonnement dans les différents groupes d'axiomes qu'il présente. En effet on pourrait reconnaitre dans l'œuvre de Hilbert une hiérarchie dans les groupes des axiomes qui respecte les différents niveaux d'expérience physique et psychologie auxquels se situent les différentes géométries (projective, affine etc.). A ce propos je pense qu'on pourrait rappeler aussi le nom du géomètre italien F. Enriques qui, dans des différents ouvrages, avait rattaché ces géométries aux sources psychologiques desquelles elles prennent leur naissance. Mais l'apport le plus intéressant de la mathématique à la psychologie on le trouve dans l'analyse des fondements des idées sur la base des structures de la mathématique. Ici le nom de J. Piaget doit être nécessairement rappelé, parce que on doit à ce savant et à son école des progrès fondamentaux dans l'analyse de la genèse des idées.

Je voudrais conclure cet aperçu en répétant qu'on est ici assez loin de l'idée classique qui nous présentait la mathématique comme la science de la quantité. Mais on pourrait dire aussi que l'influence de la mathématisation atteint un niveau encore plus profond que ceux qu'on vient d'exposer; en effet je voudrais signaler que dans cette optique, la méthode axiomatique (qui a eu sa source dans la mathématique) pourrait être présentée aujourd'hui comme la méthode exemplaire de la théorie scientifique et de l'exposé rigoureux. Et je pense que cela soit valable aussi à propos de certains domaines qu'on pense encore assez loin de la mathématisation.

5 - J'ai laissé la dernière place à la logique parce que je pense que cet argument mérite une attention particulière. En effet, si l'on regarde les procédés mathématiques dans l'optique qu'on s'est efforcé de présenter, on voit que la question très ancienne de la nature des objets de la mathématique a changé depuis l'époque classique, et que les frontières entre ce qu'on appelle la mathématique et celle qu'on appelait jadis la logique (matérielle, mineure ou formelle, ‘logica minor’ des anciens) sont devenues de plus en plus minces et incertaines. Et d'ailleurs, comment pourrait on distinguer les domaines de ces deux doctrines, dès le moment que l'on affirme que la mathématique n’est plus caractérisée par ses objets mais plutôt par ses procédés? Et quels sont ces procédés de la mathématique si non des règles formelles, qui n'ont pas l'évidence comme leur début, qui n'ont pas la vérité comme leur but, mais qui visent seulement à la cohérence? On comprend donc pourquoi un peut penser que parmi les conséquences les plus importantes de la mathématisation d'aujourd'hui on a l’algébrisation de la logique. Peut être on pourrait reconnaitre là une conséquence de la recherche de la certitude dans la déduction, recherche qui est propre à toute connaissance qui veut être scientifique et qui dictait jadis à Aristote les règles du syllogisme

classique, et qui faisait rêver Leibnitz à propos du calcul idéographique. L'idée que la mathématique est une logique supérieure avait déjà été exprimée par Peano à la fin du XIX siècle, et l'on peut affirmer que la naissance de la logique symbolique a été une conséquence presque nécessaire de la théorie des ensembles, de la théorie des nombres transfinis, des recherches sur les fondements de l'arithmétique, des problèmes de non contradiction qui avaient leur source dans la conception nouvelle de la géométrie.

Je ne peux pas exposer ici les idées de Frege, Peano, Russel, Hilbert pour rappeler seulement les noms les plus connus des savants qui se sont occupés de ces problèmes; ni j'ai ici le temps pour présenter les idées fondamentales de la «Beweistheorie» de Hilbert, et les conséquences des théorèmes célèbres de Gödel dans ce domaine. Ces résultats ont amené quelque mathématicien à penser que la mathématique puisse réabsorber en soi même la logique aussi, et que par conséquent la mathématique soit aujourd'hui la source et l'issue de toute connaissance rigoureuse. Si l'on acceptait cette façon de penser on serait peut être amené à une sorte de "pan-mathématisme" (je m'excuse du mot), qui donnerait à la mathématique une place de science suprême, de science des sciences; on voit donc assez facilement que cette discussion nous amène de façon naturelle à l'analyse des limites de la mathématisation, après l'analyse assez étendue de ses succès.

A ce propos je voudrais répéter que je parle en mathématicien, et que par conséquent ce que je vais exposer ne veut pas avoir une valeur absolue, ou philosophique: je tâcherai de réfléchir sur ce problème, et j'avoue d'ores et déjà que je n'arriverai pas à formuler des réponses, mais plus fréquemment à poser des questions.

Evidemment la question à propos de l'existence de limites à la mathématisation ne se posait pas aux niveaux qu'on a analysés précédemment, car, dès le moment que la mathématique se reconnait comme une science, et ne prétend pas d'être la science, les limites se présentent par eux mêmes. Et dans cette optique on pourrait dire que l'expérience du passé nous montre la science vis-à-vis de la richesse inépuisable d'une réalité qui n'est jamais connue jusqu'au fond. On toucherait donc, dans ce sens, toujours à des bornes extérieures; ce qui est d'ailleurs commun à toute connaissance scientifique. Mais dans le cas de la connaissance mathématisée, on pourrait ajouter (d'une façon tout à fait rudimentaire et approximative) que ce qu'on gagne dans la certitude de la déduction et dans la clarté de l'expression on perd dans la direction de la profondeur de la signification. Je ne voudrais pas insister dans cette façon de m'exprimer, qui est plus pittoresque et romanesque que scientifique; mais je voudrais rappeler ce qu'on peut penser de la mathématique appliquée, qui est parfois conçue come une espèce de structure abstraite que l'on peut bourrer de n’importe quel contenu, pourvu qu'on obéisse à certaines hypothèses qui sont plus ou moins sous-jacentes. Dans ce cas on est bien conscient du fait que le portrait qu'on donne de la réalité est seulement un modèle de celle-ci; que la connaissance qu'on acquiert n'est pas complète ni complètement fidèle, et pourtant qu'elle n'est pas complètement fausse. On revient donc à l'idée des théories "adéquates" de Poincaré; dans cette optique, à mon avis, on ne nie pas la connaissance, mais aussi on est obligé de reconnaitre les bornes de cette connaissance dès le premier moment qu'on entame la formulation d'un ensemble de relations avec le langage de la mathématique ou de la logique formelle mathématisée. C'est dans ce cadre là qu'on peut lacer ce que je viens de dire à propos de la perte de profondeur, par rapport à la signification qui correspond au gain de certitude, qui est conséquence de la formalisation de la logique et de la réduction de la déduction syllogistique au calcul. Et d'ailleurs on sait bien que, lorsque on est en train de bâtir une théorie mathématisée, la méthode axiomatique nous oblige à formuler des hypothèses qu'on ne peut pas discuter à l'intérieur de la théorie.

Mais la question de l'existence de limites, pour ainsi dire, extérieur s à la mathématisation est moins grave et importante que la question de l'existence de limites que l'on peut nommer intérieurs. A ce propos je ne voudrais pas me plonger dans des discussions qui risqueraient de n'avoir pas de fin et je voudrais me borner à poser à moi même certaines questions. D'abord on pourrait poser la question s'il est possible de reconnaitre les limites d'une théorie tout en restant à l'intérieur de la théorie même. A ce propos on pourrait penser que les théorèmes de Gödel qu'on a nommés nous donnent une réponse affirmative. Mais une deuxième question que je voudrais poser pourrait concerner certaines données qu'on est peut être obligé de penser sous-jacentes ou préalable à toute discussion. Est-ce que, par exemple, l'idée de cohérence à certaines règles, à certaines conventions n’est pas une donnée préalable de ce genre? Est-ce que, même si l'on réduit la logique à un calcul, on ne doit pas supposer dans celui qui développe ce calcul une capacité de reconnaitre les symboles, d'obéir sans aucun défaut aux règles qu'on a établi? Et si l'on donne ces calcul à un ordinateur, est-ce que il n'y a pas là un postulat ou une espèce de confiance préalable dans la cohérence de cette machine? Est ce que cette confiance ne serait pas du même genre qu'une espèce de postulat de la constances des lois physiques ou quelque chose de ce genre?

Je ne voudrais pas multiplier les questions auxquelles j'avoue que ne saurais pas répondre d'une façon complètement satisfaisante. Je pense que ce que je viens de dire soit suffisant pour montrer l'ampleur et la profondeur des questions qui sont liées à ce phénomène qu'on appelle aujourd'hui mathématisation, mais dont on peut, à mon avis, rencontrer les traces dans toute l'histoire humaine.