CARLO FELICE MANARA - MARIA SPOGLIANTI

R. G. Boscovich e i precursori di V. Poncelet

estratto dal volume

RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO
DI BRESCIA - Volume III

VITA E PENSIERO
Pubblicazioni della Università Cattolica
Milano 1979

CARLO FELICE MANARA - MARIA SPOGLIANTI

R.G. Boscovich ed i precursori di V. Poncelet

CARLO FELICE MANARA - MARIA SPOGLIANTI

R.G. Boscovich ed i precursori di V. Poncelet

1. L'evoluzione rapidissima della geometria nel sec. XIX ha portato questa scienza alla sua fisonomia attuale di sistema ipotetico-deduttivo, partendo da una concezione che praticamente rifletteva ancora quella di EUCLIDE. Invero si potrebbe dire che sino alla fine del sec. XVIII, anzi ben oltre la prima metà del sec. XIX, si ritenne tale disciplina specificata dai suoi medesimi contenuti e basata su principii non contestabili. Questi principii si pensavano forniti dagli assiomi (o postulati) che, a loro volta, si ritenevano dettati dall'evidenza. L'evoluzione di cui parliamo è stata stimolata, come è noto, in modo radicale dall'invenzione della geometria analitica; questa ha posto alla geometria, intesa nel senso tradizionale, vari problemi, tra i quali ci limitiamo qui a ricordare i più importanti per quanto ci interesserà in seguito: il problema della continuità e quello dell'interpretazione degli enti dell'algebra mediante elementi della geometria. In sostanza, potremmo dire che il secondo di essi si riduce al confronto tra due linguaggi: quello tradizionale della geometria e quello simbolico e convenzionale dell'algebra, che effettivamente, proprio nell'epoca che stiamo considerando, andava acquistando una piena maturità.

Tali questioni, che, a livello didattico elementare, portano alla nota pratica della « discussione » dei problemi, storicamente hanno messo in evidenza, con il progredire dell'algebra, la necessità di dare l'interpretazione geometrica sia dei numeri negativi sia, soprattutto, dei numeri immaginari. Il primo dei suddetti problemi, cioè quello di fornire un'interpretazione (oggi si direbbe un « modello ») dei numeri negativi dell'algebra, sembrerebbe in effetti di risoluzione abbastanza facile, perché l'intuizione e l'esperienza quotidiana forniscono numerosi elementi atti ad ispirarne una qualche risposta: interpretazioni e modelli del genere possono infatti ottenersi facilmente considerando opposti sensi di variazione di grandezze assunte dalla geometria, oppure dalla fisica e persino dalla vita di ogni giorno. Invece queste rappresentazioni, che oggi ci appaiono del tutto naturali ed ovvie, non sono state sempre accettate con tanta immediatezza.

Il secondo problema, poi, cioè quello dell'interpretazione dell'immaginario in geometria, ha portato, come è noto, a questioni lungamente trattate e disputate durante il sec. XIX. L'elegante modello, ormai classico, datone da C. K. von STAUDT fra il 1856 ed il 1880 [38] è da considerarsi come il risultato di una maturazione che ha visto evolversi, in modo quasi parallelo e contemporaneo, anche la fondazione della geometria proiettiva, con l'ampliamento dell'insieme dei punti mediante l'aggiunzione degli elementi impropri (o all'infinito, con espressione che rivela chiaramente la propria origine). Le idee fondamentali da cui scaturì questa branca della geometria sono dovute, come è ben noto, a V. PONCELET, che le sviluppò nei suoi classici trattati, fonti di celebri controversie alle quali accenneremo in seguito. Per ora basterà qui segnalare che per V. PONCELET il problema dell'ampliamento dello spazio, mediante gli elementi impropri, e quello della rappresentazione dell'immaginario, per mezzo di enti dotati di un significato rilevante nell'ambito della geometria, erano strettamente collegati fra loro; ed egli li risolse ricorrendo a quel suo « principio di continuità », tanto contestato e discusso, che era da lui riguardato come la chiave di volta per l'impostazione della nuova geometria, o del nuovo modo di vedere tale disciplina.

Proprio in questo ordine di idee appare a prima vista sorprendente che un atteggiamento del tutto analogo, anche se immaturo da un certo punto di vista, nei confronti degli stessi problemi di cui si sarebbe occupato in seguito V. PONCELET, si trovi già negli scritti di un matematico ed astronomo vissuto circa tre quarti di secolo prima: RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH.

La presente nota è dedicata appunto all'esposizione di alcune idee di questo intelligentissimo gesuita il quale, sotto tale preciso punto di vista, a giusta ragione potrebbe apparire in un certo senso come un precursore di V. PONCELET. Non è nostra intenzione negare al geometra francese la priorità delle sue

concezioni: è ben noto, infatti, che egli le elaborò, almeno nei loro fondamenti, durante la prigionia in Russia e quindi può escludersi con sufficiente tranquillità che esse gli siano state ispirate direttamente da quelle del suddetto religioso; né intendiamo commentare qui l'interessantissima figura di questo scienziato dell'epoca illuministica: l'estensione del nostro lavoro non consente di richiamare tutti i meriti di R. G. BOSCOVICH, al quale, d'altra parte, già sono stati dedicati alcuni pregevoli volumi citati nella bibliografia ([1]; [2]; [29], pp. 17 e 29; [37], vol. I, p. 517). Precisamente, ci proponiamo solo, attraverso un nuovo esempio, di illustrare quel fenomeno ben noto nella storia della scienza, che si manifesta quando una certa scoperta è, per così dire, nell'aria e quindi spesso viene compiuta da diversi scienziati pressoché simultaneamente, anche se all'insaputa l'uno dell'altro, in quanto espressione dello stato di maturità del pensiero scientifico dell'epoca.
Inoltre ci sembra di qualche interesse analizzare, almeno in parte, un singolare stadio del processo che, come abbiamo già detto, ha portato la geometria all'assetto attuale a partire da quello classico.

2. Per una migliore comprensione di ciò che esporremo in seguito, pensiamo sia utile premettere in questo paragrafo qualche precisazione a proposito del significato del vocabolo « continuità », con cui è comunemente designata una proprietà della materia che ha attirato l'attenzione sia dei filosofi sia degli scienziati fin dai tempi antichi.
La più remota definizione di continuità che ci è dato conoscere risale ad ARISTOTELE:

Una cosa è continua quando i termini [confini], *secondo i quali si toccano due sue qualsivogliano parti limitrofe, combaciano perfettamente come fossero uno solo e, proprio secondo il vocabolo, aderiscono l'uno all'altro.* ([37], vol. I, p. 93).

È del tutto naturale che la proprietà in questione ben presto sia stata, e con estrema immediatezza, attribuita agli enti della geometria, in quanto riguardati, in un certo senso, archetipi degli oggetti materiali, particolarmente adatti a spiegare logica-mente le caratteristiche di questi. In tale ordine di idee, se riferita ad una classe di enti geometrici, essa potrebbe essere descritta in forma negativa come « mancanza di lacune »: sotto un aspetto del genere fu interpretata, anche se non enunciata esplicitamente, da Euclide, per esempio. Infatti neppure le prime proposizioni dei suoi *Elementi* apparirebbero rigorose, se non si ammettesse valida la proprietà di continuità ([23], vol. I, pp. 234-240). Simile circostanza fu intuita già dai primi commentatori del famoso geometra alessandrino; ed in particolare G. Campano, nell'ormai rarissima edizione del testo in parola da lui tradotto in latino e postillato, affermò essere sempre rispettato, nell'opera euclidea, un principio, appunto di continuità, che egli enunciò in questi termini:

Date due grandezze [omogenee] *disuguali, si passa dalla maggiore alla minore, e viceversa, attraverso tutte le grandezze* [omogenee] *intermedie.* ([12], p. 395; [13], L. III, fo. XLIIII; [23], vol. II, p. 41; [33], p. 133).

Questa visione, a parte qualche inevitabile ma inessenziale sfumatura, è quella accettata senza alcuna riserva e manifestamente imperante ancora alla fine del sec. XVIII ([12]; [33]). Il cammino verso quella precisa e rigorosa sistemazione logica del concetto di continuità realizzata, come è noto, in epoca a noi molto vicina fu lento ed ostacolato da sfavorevoli influssi ambientali e culturali; comunque gli storici delle matematiche moderni sono concordi nell'attribuire a G. Keplero il merito di avere per primo riconosciuto al concetto di cui stiamo parlando una certa potenza da potersi sfruttare con successo in scienze anche diverse dalla matematica ([5], p. 373; [8], p. 309; [17], pp. 31, 43 e 256; [37], vol. I, p. 416). È da notarsi tuttavia che si trova negli scritti di G. Keplero una concezione di continuità che non si limita alla « assenza di lacune », già rilevata da Aristotele e da G. Campano; G. Keplero si spinge oltre, prendendo in considerazione delle figure che variano con continuità (ovvero, si direbbe, insensibilmente) in modo, tuttavia, che i rapporti fra le varie parti costituenti le medesime rimangano costanti. Una siffatta variazione conduce a considerare una relazione di analogia tra figure diverse, che prelude alle vedute esposte qualche secolo dopo da V. Poncelet. Infatti, in particolare, G. Keplero, nei suoi *Paralipomena ad Vitellionem* ([24], vol. II, pp. 119 e 187), collega l'idea di punto a distanza infinita ad un « principio di analogia », che è per lui come una visione di continuità delle figure, attraverso il quale giunge alla considerazione esplicita del cosiddetto fuoco cieco della parabola ed al riconoscimento delle proprietà delle coniche di specie diversa. Lo stesso scienziato, valendosi dell'analogia, ovvero del passaggio per continuità ad essa equivalente, riesce pure a formulare in modo preciso la concezione secondo la quale le rette parallele concorrono in un medesimo punto all'infinito: e ci sembra davvero superfluo soffermarci qui a ricordare fino a che punto questa idea così nuova per quei tempi influenzò in seguito il pensiero di G. DESARGUES e quello di I. NEWTON, rivelandosi fondamentale per i successivi sviluppi di ogni ramo della scienza. Tuttavia la posizione dell'ultimo degli autori ora citati, nei confronti sia del concetto che qui ci interessa sia delle applicazioni del medesimo ([30], pp. 1-11; [31]), non appare molto più avanzata rispetto a quella già assunta da G. KEPLERO. Comunque, come rileva giustamente F. ENRIQUES ([17], p. 258), è proprio attraverso gli scritti e l'insegnamento di I. NEWTON che alcunché della geometria proiettiva si trasmette all'epoca successiva, assicurando una continuità storica allo sviluppo di tale disciplina mediante canali indiretti e spesso in margine ai circoli accademici più elevati; ma, in realtà, esattamente qui troverà impulso e vigore la reazione al predominio che il metodo analitico era andato via via acquistando anche in campo strettamente geometrico. D'altra parte, i geometri più perspicaci non potevano non rendersi conto di questa circostanza: la geometria sintetica non sarebbe mai stata in grado di risollevarsi, di reggere il confronto con quella analitica e di soddisfare le esigenze del progresso sempre più rapido in ogni settore della scienza e della tecnica, se non si fosse riusciti a procurarle metodi di indagine e di scoperta maggiormente potenti; inoltre occorreva pervenire, nell'ambito della stessa disciplina, ad un assetto atto ad unificare, e in una visione sufficientemente ampia ed aperta sopra nuovi orizzonti, concezioni e proposizioni ritenute ancora del tutto prive di mutue connessioni in conformità a canoni che, nella sostanza, risalivano all'antichità classica. A tale proposito, appare abbastanza significativo un passo di C. DUPIN che qui riportiamo tradotto nella nostra lingua:

È evidente che, nell'attuale stato in cui si trovano le scienze matematiche, il solo modo per impedire che il loro dominio finisca per divenire troppo vasto rispetto alla limitatezza delle nostre capacità intellettive è quello di generalizzare sempre più le teorie che esse contemplano, affinché, nella nostra mente, un esiguo numero di verità di carattere generale e veramente utili riassuma convenientemente una moltitudine, estesa quanto possibile, di fenomeni particolari. ([15]).

V. PONCELET sceglie quale epigrafe dedicatoria per il suo famoso trattato ([35], voll. I-II) proprio il brano testé riferito e, nel corso della lunga introduzione al medesimo testo ([35], vol. I, pp. IX-XXXII), giustifica tale scelta con varie motivazioni che puntualizza con estrema chiarezza ora per inciso ora in modo diretto: egli intende realizzare esattamente il programma concettuale schematizzato da C. DUPIN e crede, nonostante l'incomprensione e le aspre critiche dei contemporanei, nella validità delle proprie concezioni e sente il dovere di assumersi le responsabilità di esprimere per intero i risultati delle proprie riflessioni. Nei prossimi paragrafi, vedremo come la figura di R. G. BOSCOVICH si inserisca nell'atmosfera che caratterizzò e di poco precedette simili moti di rinnovamento di concetti e di procedimenti: egli ci appare invero dotato di una personalità complessa, ancorata tutt'altro che saldamente ai principi tradizionali della scienza, e sempre pronto ad abbandonarsi ad un'inventiva fantasiosa e creatrice che lo sospinge verso lidi ancora inesplorati di cui, di tanto in tanto, riesce a scorgere con una certa chiarezza i contorni più salienti. E, dall'analisi del pensiero di questo geniale scienziato, tenteremo di farne risaltare quei lineamenti che, a nostro avviso, lo pongono per certi aspetti fra i precursori di V. PONCELET.
Di quest'ultimo è ben noto quel principio, o legge, di continuità il cui enunciato possiamo così tradurre nella nostra lingua:

...*Si consideri una qualsivoglia figura, in una posizione generica e, in qualche modo, indeterminata fra tutte quelle consentite nel rispetto delle leggi, delle condizioni, delle relazioni intercorrenti fra le varie parti che la costituiscono; si supponga che, a partire dai dati, si sia riusciti a stabilire su tale configurazione una o più deduzioni, ovvero proprietà, di carattere sia* metrico *sia* descrittivo *e ciò attraverso il consueto ragionamento esplicito, ossia per quella via che, in qualche caso, è riguardata come l'unica rigorosa. Non è evidente che se, conservando i dati, si fa variare il sistema primitivo per gradi insensibili oppure si imprime ad alcune parti di questo un movimento continuo e del resto arbitrario, non è dunque evidente che le proprietà e le relazioni individuate sulla figura iniziale continuano a sussistere nei successivi stadi purché si abbia riguardo alle particolari variazioni che possono subentrare, per esempio, allorquando certe grandezze tendono a svanire, a cambiare di verso e di segno e così via, variazioni comunque sempre individuabili* a priori *tramite regole ben precise?*... ([35], vol. I, p. XIII).

L'autore lo riguarda come

un assioma di manifesta evidenza, incontestabile e tale da non esigere alcuna dimostrazione ([35], vol. I, p. XIII);

e, di questa sua proposizione, egli è strenuo difensore pur riconoscendone esplicitamente i limiti di applicabilità. Così, sempre nel medesimo trattato, leggiamo:

...*e non sarebbe difficile stabilire in modo assolutamente diretto e rigoroso tale legge, mediante quei processi caratteristici dell'Algebra la cui validità, dopo due secoli di ricerche coronate da successi, oggi finalmente non è più messa in dubbio! Ma, quando lo si consideri come strumento non di dimostrazione, bensì d'indagine e di scoperta, è necessario dimostrare il principio di continuità, oppure si ha il diritto di ammetterlo in tutta la sua generalità nell'ambito della Geometria razionale, proprio come è già avvenuto in quello del Calcolo algebrico prima e, in seguito, in quello delle applicazioni di detto Calcolo alla stessa Geometria?*...([35], vol. I, p. XIV).

E poco oltre:

...*Infine, per chi ancora fosse restio a prendere una decisione in merito, cosa accadrebbe invero se non ci si dovesse mai accontentare di semi-schemi, se non si ammettessero in alcun modo l'*analogia *e l'*induzione, *che, realmente, spesso si sono rivelate ingannevoli e non vanno confuse con il principio di continuità? In effetti,* analogia *ed* induzione *consentono di risalire da una situazione particolare* *ad una generale, da un certo numero di circostanze isolate e non necessariamente legate fra loro, anzi potremmo dire discrete, ad un risultato di ampia portata ed invariabile: invece la legge di continuità implica che si prenda l'avvio da uno stato generico ed in certo qual modo indeterminato del sistema, ossia da uno stato individuato da condizioni che non possono essere sostituite da altre ancor più late e che continuano a sussistere nei successivi stadi, tutti simili fra loro e ciascuno connesso a quello immediatamente precedente tramite una variazione insensibile; oltre a ciò, esso esige che le suddette variazioni vertano sopra enti di per sé continui o soggetti a vincoli ritenibili tali. Alcuni di questi enti possono sì mutare di posizione a causa di modificazioni intervenute nel sistema, altri allontanarsi oppure avvicinarsi fra loro indefinitamente e così via; di conseguenza, le mutue relazioni generali muteranno anch'esse, continuando però a valere rispetto all'intero sistema...*

...La piena accettazione del principio di continuità, nel campo delle ricerche geometriche, condurrà necessariamente a concetti singolari, a manifesti paradossi; ma concetti, paradossi di questo tipo si sono presentati, continuano a manifestarsi, nell'Analisi algebrica, senza per altro arrestarne né il cammino né i progressi. Inoltre, è ragionevole respingere in Geometria concezioni, ormai comunemente accolte nell'Algebra, delle quali nessuno osa più contestare il rigore? Non vi sono stati già accettati gli infinitesimi e gli infiniti, enti la cui esistenza è puramente ipotetica? Cosa impedisce allora di introdurvi anche considerazioni relative agli immaginari?... ([35], vol. I, p. XV).

V. PONCELET vede nel suo principio lo strumento indispensabile per il progresso della geometria sintetica ed il conseguimento del programma di cui abbiamo detto dianzi. Infatti, ecco a tale proposito la traduzione di alcuni passi del medesimo autore che testimoniano la validità di questa nostra affermazione:

...Dopo gli studi dei colti rappresentanti della corrente scientifica moderna, l'unica speranza che ci resta per fare compiere alla scienza qualche progresso veramente significativo risiede nel seguire da vicino le vie già percorse da quelli, cercando di generalizzare continuamente il linguaggio e le concezioni della Geometria.
A questo punto sarebbe opportuno mostrare come l'ammettere in Geometria la continuità conduca, naturalmente e necessariamente,

all'interpretazione di tutti i concetti astratti e metafisici relativi alla rappresentazione delle grandezze; dovremmo studiare e verificare la legge dell'influenza della posizione sui segni, il che ci condurrebbe a considerare il rapporto fra Analisi algebrica e Geometria e ad analizzare le difficoltà e gli ostacoli che tale accostamento ha fino ad ora originato; per questa via, riusciremmo anche a giustificare, con metodo in qualche modo rigoroso, sia la natura sia le applicazioni del principio di continuità; ma, lo abbiamo già detto, nostro unico scopo è quello di presentare delle concezioni generali, degli schemi sui metodi, atti a fornire alla Geometria ordinaria questo carattere di estensione che essa non possiede e di cui, invece, abbonda la Geometria analitica...

...non è proprio mia intenzione dimostrare detto principio ed ancor meno accettarne senza riserve tutte le conseguenze; voglio soltanto richiamare, sull'utilità di tale proposizione, l'interesse dei geometri; segnalarne impieghi che altri hanno già fatto senza rendersene conto; avanzarne casi diversi, meno immediati e meno facili da capire, giustificandoli comunque con argomentazioni di tipo tradizionale; in breve, convincere che la Geometria non viene ancora considerata nell'interezza dell'ampliamento che essa comporta e che molto resta ancora da fare per metterla in grado di rivaleggiare con l'Analisi algebrica...

...Spero di riuscire finalmente a dissipare gli scrupoli che potrebbero venire a chi, volendo assolutamente escludere dalle indagini di natura geometrica ogni principio ed ogni processo dimostrativo non tramandatici dagli Antichi, considera a buon diritto la Geometria come una scienza ormai da lungo tempo conclusa e tale che il suo cammino ed il suo contenuto non siano suscettibili di ulteriori perfezionamenti... ([35], vol. I, pp. XV-XVII).

...Accrescere le risorse della Geometria ordinaria, ampliarne i concetti e il linguaggio di consueto abbastanza limitati, avvicinare gli uni e l'altro a quelli della Geometria analitica e soprattutto presentare metodi generali specifici, atti a far dimostrare e scoprire con speditezza questo complesso di proprietà di cui godono le figure se riguardate in maniera puramente astratta ed indipendentemente da qualsivoglia considerazione relativa alla loro grandezza assoluta e determinata; ecco il fine principale che ci si propone in quest'Opera... ([35], vol. I, p. XXII).

Senza dubbio, a questo punto, possiamo sorvolare sullo scalpore suscitato da idee così inconsuete per quei tempi: di ciò si parla ampiamente in tutti i manuali di storia delle matematiche ed in numerosissimi articoli redatti dopo specifiche e laboriosissime ricerche; fra l'altro, entrare nei dettagli della questione in se stessa e delle polemiche che si accesero e divamparono circa la legittimità di accettare a priori il principio di V. PONCELET ci condurrebbe troppo lontano dall'argomento vero e proprio di questo nostro lavoro. Riteniamo pertanto di poterci limitare ad alcune osservazioni più intimamente connesse con il tema che ci siamo proposti di sviluppare attraverso la presente indagine.

Come rileva E. BOMPIANI ([3], p. 301), l'aspra controversia non conobbe né vinti né vincitori: infatti, V. PONCELET ed A. CAUCHY, che fu il suo più accanito avversario, avevano entrambi una parte di torto ed una di ragione; ma, similmente a tante altre celebri dispute per divergenze d'opinioni, anche tale contrasto fu fecondo per la precisazione ed il chiarimento di diversi concetti. In fondo, la così discussa proposizione di V. PONCELET appare oggi manifestamente come un rudimentale tentativo di enunciare delle proprietà di funzioni algebriche, quali sono appunto nella maggioranza dei casi i risultati di un problema geometrico elementare; ma ora noi sappiamo che il geometra francese in questione non possedeva degli strumenti adatti a fargli scorgere le cose da questo punto di vista [3] e quindi dobbiamo riconoscergli un merito che, se non coincide con quello da lui ambito, sotto certi aspetti non è ad esso secondo: il merito di avere messo in luce l'esigenza di un chiarimento generale, e ad altro livello, del problema della continuità e, in un campo ancora più vasto, del problema delle funzioni implicite, quali sono i risultati di un problema geometrico se considerati in funzione dei dati.

Questa precisazione, irraggiungibile con mezzi puramente geometrici, doveva necessariamente scaturire da un'evoluzione delle idee atta a trarre tutte le conseguenze implicite nel metodo delle coordinate e dalla compenetrazione dei procedimenti geometrici e di quelli analitici implicata dalla geometria analitica e dalla conseguente impostazione dei problemi. Tutto ciò è ulteriormente confermato, se mai ve ne fosse bisogno, dal fatto, per esempio, che la completa chiarificazione del significato dei co-

siddetti « problemi classici » (quadratura del cerchio, duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo) fu conseguita molto più tardi e con metodi strettamente algebrici ed analitici.
Per tornare a V. PONCELET ed a coloro che potremmo riguardare come suoi precursori, va ascritto a loro onore pure l'avere intuito anche la possibilità di riunire in grandi classi i problemi e le proposizioni della geometria, secondo quella relazione che, come vedremo, R. G. BOSCOVICH chiama *analogia*: si tratta di una profonda intuizione, nei limiti consentiti dallo stato della scienza in quel tempo, delle proprietà delle funzioni algebriche e, quindi, della possibilità di unificare enunciati e procedimenti risolutivi. Inoltre, a R. G. BOSCOVICH va attribuita la profonda consapevolezza del fatto che questa unificazione può essere conseguita con l'adozione di opportune convenzioni per interpretare le relazioni ed i processi costruttivi quando le radici delle equazioni algebriche che traducono le situazioni geometriche in esame siano negative oppure immaginarie.

3. La situazione delle ricerche geometriche esposta nel precedente paragrafo permette ora di valutare l'apporto di R. G. BOSCOVICH alla risoluzione dei problemi che stiamo esaminando. Ma, prima di analizzare a fondo il contributo arrecato da questo scienziato straordinario, vale la pena di illustrarne brevemente la figura e l'opera attraverso una rapida sintesi che tuttavia non è fine a se stessa.
Come abbiamo già accennato, vari Simposi internazionali sono stati dedicati al nostro geniale gesuita che, fra l'altro, fu in corrispondenza con i massimi matematici, fisici ed astronomi del suo tempo: tali Congressi hanno sufficientemente messo in luce i molteplici aspetti e riflessi della sua personalità e della sua attività scientifica e noi non siamo in grado di apportare qui ulteriori contributi significativi ai risultati di tutte queste precedenti indagini. Del resto, abbiamo già segnalato che non è questo lo scopo del nostro attuale lavoro. Ci soffermeremo piuttosto su alcuni punti del pensiero di R. G. BOSCOVICH che ci appaiono sintomatici in quanto particolarmente adatti, a nostro avviso, a chiarire ulteriormente sia la posizione originalissima di questo autore sia quel fenomeno, di cui abbiamo già detto, di progresso globale del pensiero scientifico in generale e mate-

matico in particolare, che spesso ha uno svolgimento parzialmente nascosto e si manifesta poi, quasi all'improvviso, nelle opere di pensatori eminenti e geniali: opere le quali, tuttavia, alle volte celano con il loro splendore il percorso sotterraneo di certe correnti di cui esse stesse sono, in realtà, solo delle manifestazioni clamorose e fulgenti.

Sopra questo secondo aspetto non indugeremo nel presente articolo, ritenendo simili fugaci accenni sufficienti a richiamare una circostanza che meriterebbe, forse, una maggiore attenzione da parte degli storici della scienza. Ci soffermeremo, invece, sulla prima parte della nostra osservazione, ossia cercheremo di tratteggiare la personalità di R. G. BOSCOVICH, per spiegare e lasciare comprendere anche l'originalità di alcuni suoi atteggiamenti a proposito di determinati concetti geometrici.

RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH nacque nel 1711 nella cittadina dalmata, spesso indicata con il nome italiano di Ragusa, che oggi porta la denominazione ufficiale di Dubrovnik. Egli non tardò a rivelare un ingegno precoce e versatile e si dedicò in particolare alla matematica dopo il 1727, anno in cui fu accolto nella Compagnia di Gesù.

Diciamo che si dedicò in particolare alla matematica, poiché il nostro scienziato dimostrò anche una profonda inclinazione all'apprendimento delle lingue straniere e manifestò pure notevoli virtù poetiche. Il carattere esuberante, la naturale e poliedrica versatilità della mente e, forse, anche l'ubbidienza ai Superiori religiosi (per la quale l'Ordine andava a quei tempi giustamente famoso) portarono R. G. BOSCOVICH ad interessarsi di questioni scientifiche relative a molteplici campi apparentemente distanti fra loro; ed a tale proposito è interessante ricordare che, proprio per le sue spiccate capacità, egli fu scelto per delicate missioni diplomatiche da parte dello Stato della Chiesa.

Non vogliamo trascurare di rammentare qui una nota umana e dolorosa abbattutasi su questa figura tanto brillante, e per molti aspetti affascinante, negli ultimi anni della sua vita: la soppressione dell'Ordine dei Gesuiti, voluta nel 1773 da Papa CLEMENTE XIV, ed amare vicende personali si ripercossero nell'animo di R. G. BOSCOVICH così profondamente da fargli smarrire parte di quell'equilibrio psichico che l'aveva assistito durante la giovinezza e la prima maturità. Il tentativo di suicidio e le sofferenze morali che precedettero la sua morte (1787) appaiono una ben dolorosa conclusione di una vita sotto altri punti di vista piena e feconda di realizzazioni, se non di soddisfazioni. Ovviamente non possiamo qui ora passare in rassegna tutta la produzione scientifica di questo autore; ci limitiamo pertanto a ricercare nel suo pensiero quei tratti caratteristici che, a nostro parere, lasciano presumere l'origine di certe sue idee sulla geometria: precisamente ne illustreremo la posizione riguardo alla legge di attrazione gravitazionale ed alla costituzione della materia in generale. È noto il prestigio di cui la concezione di I. NEWTON sull'attrazione godette nel periodo immediatamente successivo alla comparsa del grande inglese ed in particolare durante tutto il sec. XVIII [19; 20; 21] e, come si sa, nella dottrina newtoniana la materia viene considerata estesa e, nell'ipotesi che essa sia costituita da atomi, questi vengono pensati estesi a loro volta ed impenetrabili gli uni agli altri. La legge avanzata da I. NEWTON per rendere conto della gravitazione fece divampare la celebre controversia sulla forma della Terra, che ebbe fra le sue conseguenze anche quella serie di misure del grado del meridiano terrestre sfocianti nella famosa disputa tra la Scuola inglese e quella francese e nella definizione del metro internazionale, secondo la primitiva accezione, ossia come decimilionesima parte del quarto di meridiano terrestre ([34], nn. 305-311). Proprio alla luce di simili polemiche e degli sviluppi per il progresso scientifico che esse determinarono, è sintcmo di straordinaria indipendenza intellettuale e di precipue originalità e fantasia creatrice la concezione di R. G. BOSCOVICH sulla costituzione della materia e sulla legge di mutua attrazione tra due punti materiali. Egli infatti anzi tutto non accetta l'ipotesi di una materia costituita da atomi estesi e mutuamente impenetrabili e, pertanto, rettifica la posizione di I. NEWTON sostituendo a detti atomi i punti inestesi: supera così la difficoltà che nasce dalla considerazione dell'attrazione all'interno del punto materiale. In secondo luogo, enuncia una propria legge, sempre di attrazione, basata sull'esistenza, all'esterno del punto, di un campo funzione sì della distanza, ma dato non esattamente dal quadrato di questa; tale legge, espressa dal reciproco di una funzione quadratica della distanza, approssima sufficientemente quella di I. NEWTON ad una ragionevole distanza dal punto, indicando nel contempo che, ad una distanza caratteristica, l'attrazione si volge in repulsione.

L'arditezza delle concezioni di R. G. BOSCOVICH è testimoniata dall'interesse ancora attuale che esse esercitano anche in relazione a moderni problemi di costituzione della materia e di teoria dei campi [1; 2]. Esula dai limiti in cui intendiamo mantenere il nostro lavoro approfondire questo argomento, del resto già ampiamente analizzato in sedi appropriate e con competenza ben superiore alla nostra; tuttavia ci pare di poter scorgere in questa visione della materia, pensata costituita da punti inestesi, e dei campi di forze attrattive e repulsive la motivazione dell'interessamento profondo del nostro scienziato nei confronti dell'analisi di certi concetti della geometria.

La posizione critica che egli assunse nei riguardi della legge di I. NEWTON e la sua partecipazione alle ricerche sulla forma della Terra, cui abbiamo testé accennato, sono testimoniate dai lavori di misura dell'arco di meridiano negli Stati Pontifici, da Roma a Rimini, da lui compiuti negli anni 1750-52; queste indagini, come molte altre imprese pratiche delle quali si interessò o fu indirettamente partecipe, dimostrano ancora una volta la versatilità del suo ingegno che non s'appagava delle investigazioni puramente teoriche e, pertanto, tendeva ad esplicitare le ultime conseguenze delle idee per trovare ad esse un conforto nella realtà fisica. In questo R. G. BOSCOVICH si dimostra inimitabile allievo delle scuole illuministiche che avevano aperto nuove strade al pensiero scientifico a partire dalla strenua difesa sostenuta da G. GALILEI a favore della realtà e del metodo sperimentale per conseguirne la conoscenza.

Si potrebbe pensare che il collegamento tra la visione dell'illustre gesuita circa la costituzione della materia e le riflessioni geometriche che egli ci ha lasciato sia piuttosto tenue; in verità, non disponiamo di documenti o di testimonianze che mettano esplicitamente e direttamente in relazione il campo della costituzione della materia con quello specifico della geometria attraverso una ricerca di sistemazione teorica unitaria. Quindi è possibile avanzare soltanto una presunzione sull'interessamento che una delle concezioni suddette poteva suscitare per l'altra in una mente aperta e geniale; vorremmo solo osservare che queste congettura meriterebbe, forse, uno studio ulteriore ed una ricerca più paziente della nostra sopra scritti editi ed inediti concernenti il pensiero di R. G. BOSCOVICH, ma che, a nostro parere, la questione della validità di una simile ipotesi non inficia l'analisi, che esporremo fra poco, delle idee di tale scienziato a proposito della geometria.

Comunque, innanzi tutto, è opportuno ricordare che la prima enunciazione precisa della continuità geometrica risale alla seconda metà del sec. XIX e devesi a J. W. R. DEDEKIND ed a G. CANTOR, mentre, all'epoca di R. G. BOSCOVICH, essa era considerata una proprietà evidente della materia e degli enti della geometria, come abbiamo già esposto nel secondo paragrafo del presente articolo. Ora è abbastanza chiaro che una concezione in cui la materia appariva costituita dall'insieme di punti inestesi, soggetti a forze attrattive e repulsive, doveva necessariamente mettere in crisi anche il concetto di continuità materiale e, quindi, pure quello di continuità geometrica, fondato sul precedente. Tuttavia, circostanza piuttosto singolare, il nostro autore, che, nella visione riguardante la costituzione della materia, concepisce idee davvero ardite, accetta per la continuità geometrica il significato suggerito dall'intuizione.

Ecco, infatti, come egli presenta quest'ultimo concetto:

714. *È davvero meraviglioso che sempre nella Geometria la* legge di continuità *venga osservata: in forza di questa legge*, [in Geometria] *nulla cambia con salti, oppure di colpo all'improvviso nasce o svanisce; ma si passa da una qualsivoglia grandezza ad un'altra passando sempre per tutte le grandezze intermedie. Nessun arco di luogo geometrico si arresta all'improvviso, ma si gira, oppure si riflette su se stesso, oppure ritorna in sé come nell'ellisse, oppure si protende verso l'infinito come nei due rami dell'iperbole e nell'unico ramo della parabola, oppure si snoda con infinite spire, oppure allontanandosi da un certo punto da una parte se ne va all'infinito mentre si avvicina dall'altra al punto indefinitamente senza mai toccarlo e ciò senza per altro interrompersi (come avviene per quella curva chiamata spirale logaritmica, la cui natura analizzeremo altrove), oppure infine con spirali dei due tipi si allontana all'infinito come avviene per le spire di molte specie. E le ordinate, le normali, le subnormali, le tangenti e gli angoli di queste tangenti con l'asse (oppure con una qualsivoglia retta definita dallo stesso luogo geometrico), la medesima curvatura, la direzione della curva e qualunque altra cosa variano sempre passando per*

tutte le grandezze omogenee sempre, mai con un salto »[1]. ([4], pp. 326-327).

Come si vede, il concetto di continuità ivi introdotto appare, da una parte, strettamente collegato all'intuizione di situazioni fisiche e, dall'altra, limitato dalla casistica poco estesa presa in considerazione nel medesimo brano. L'enunciato ora riferito sostanzialmente non differisce da quelle proposizioni avanzate, per descrivere la stessa proprietà, dai predecessori e dai contemporanei di R. G. Boscovich; tuttavia possiamo dire che egli tenti, in certo qual modo, di conferire un significato più ampio ed una maggiore portata al concetto in questione avvicinandosi a quella concezione che abbiamo già trovato in G. Keplero e che sarà in seguito caratteristica del pensiero di V. Poncelet. Vedremo, infatti, che lo scienziato di Ragusa non solo prenderà in esame la situazione che si traduce nell'assenza di lacune, ma si spingerà fino a considerare le relazioni intercorrenti fra le varie parti di una figura soddisfacente a determinate condizioni.
In particolare, egli fisserà l'attenzione sopra certe configurazioni che possono ottenersi l'una dall'altra mediante una variazione continua degli elementi che le individuano; e tenterà di enunciare un principio valido non solo per una singola figura, ma per una vasta classe di figure mutuamente ottenibili applicando appunto un simile processo. In questo ordine di idee, arriverà ad osservare che, nei teoremi, la dimostrazione di certe proprietà, relative a configurazioni corrispondentesi nel modo indicato, resta valida, così come rimane tale la costruzione delle soluzioni di un problema condotta partendo direttamente dai dati, quando questi siano fatti variare con continuità: ciò, ovviamente, a meno di qualche inessenziale modifica da arrecare alle operazioni concrete nel caso in cui le grandezze incognite cambino di segno, magari anche passando attraverso l'infinito.
Adattando all'uopo l'acuta analisi svolta da E. Bompiani [3] e della quale abbiamo già detto, potremmo affermare che le intuizioni geometriche di R. G. Boscovich preludono all'analisi delle

---

[1] Per mantenerci il più possibile fedeli alla terminologia di R. G. Boscovich, qui e nel seguito conserviamo nella nostra traduzione i termini originali *retta* e *direzione*, che stanno rispettivamente per le moderne denominazioni *segmento* e *verso*.

proprietà delle funzioni algebriche più comunemente utilizzate nella geometria elementare. Nella fattispecie, le questioni geometriche esaminate in particolare dal nostro autore sono l'interpretazione dei numeri negativi e la rappresentazione delle radici immaginarie delle equazioni e, precisamente, di quelle di secondo grado. È vero che oggi tali argomenti sono considerati elementari, ma non si deve dimenticare la prospettiva storica nella quale ci siamo posti: a quell'epoca sussisteva una notevole preclusione mentale all'interpretazione geometrica delle grandezze dell'algebra. Simile diffidenza può essere spiegata ricordando, per esempio, che l'aspetto convenzionale dei metodi della geometria analitica non era ancora stato pienamente accettato, oppure che non era stata ancora raggiunta una piena comprensione del parallelismo tra le operazioni su numeri e quelle su enti della geometria.

Sta di fatto che, per esempio, negli scritti di L. Carnot è manifesto il persistere di un'estrema riluttanza ad adottare le interpretazioni correnti per le radici negative delle equazioni algebriche. In merito, egli, infatti, afferma:

Aucune quantité ne peut devenir, soit négative, soit imaginaire, sans cesser d'être une véritable quantité, parce qu'il n'y a évidemment de véritables quantités que les quantités absolues... ([7], p. 153).

Inoltre il medesimo autore francese critica aspramente le interpretazioni delle radici negative delle equazioni, ottenute abitualmente ricorrendo a opposti versi di movimento oppure a debiti e crediti, e quindi enuncia una serie di regole atte a trasformare in modo opportuno le equazioni da cui dipendono certi problemi: questo proprio al fine di evitare rappresentazioni siffatte. Rispetto ad un atteggiamento del genere, l'apertura di R. G. Boscovich dinanzi alla medesima questione, come apparirà chiaramente dai passi che citeremo in seguito, risulta davvero notevole. E giova ricordare fin d'ora che in quegli stessi anni anche il problema della rappresentazione dei numeri complessi mediante i punti di un piano attendeva una soluzione; ma tale passo sarebbe stato compiuto dai matematici di quella generazione che ebbe il suo più illustre esponente in C. F. Gauss. Tornando all'interpretazione delle radici negative, va subito segnalato che il nostro brillante gesuita non mostra proprio alcuno degli scrupoli presentati ancora da L. CARNOT; infatti, per esempio, egli scrive:

677. ...*Nella quantità discreta, come nei numeri* [interi] *e nelle formule algebriche, e nella quantità continua, come nelle linee della Geometria, vi sono delle quantità, che si dicono negative, le quali, se vengono addizionate alle positive, le diminuiscono oppure sono diminuite* [in valore assoluto] *da esse. Se uno possiede dieci monete e ne guadagna altre tre, ne avrà tredici; se, invece, contrarrà un debito di tre, ne avrà sette; se il debito è di nove, ne avrà una. Se il debito è di dieci, non ne avrà alcuna; ma, se il debito è di tredici, avrà ancora il debito di tre, minore, comunque, di tredici. Quel debito è una certa quantità negativa che, aggiunta alla positiva iniziale, la diminuisce, oppure viene da essa diminuita. Analogamente, se qualcuno lungo un fiume rema con la corrente propizia e, per opera dei remi, in un minuto avanza di dieci passi, mentre per suo conto la corrente lo fa progredire di tre passi, i due moti insieme gli faranno percorrere tredici passi al minuto. Ma, se egli rema contro corrente e questa contrasta l'avanzamento della barca di tre* [passi al minuto], *oppure di nove, oppure di dieci, oppure persino di tredici, allora dalla composizione di questi due moti risulterà, rispettivamente nei vari casi, un progresso di sette, oppure di uno, oppure nullo, oppure persino un regresso di tre*... ([4], p. 300).

I due esempi con cui termina questo brano sono molto pittoreschi e, per quell'epoca, senz'altro insoliti e, oseremmo dire, d'avanguardia; tuttavia, circostanza quasi certamente sconosciuta a R. G. BOSCOVICH, almeno il primo di essi era stato già avanzato, e per il medesimo fine, nei primi secoli dell'Era Volgare. A meglio chiarire il significato di questa affermazione, possiamo ricordare che, in merito all'interpretazione dei numeri negativi dell'algebra, le relative regole di calcolo, con le quali oggi siamo soliti operare, furono stabilite per via indiretta molto tempo prima che gli stessi enti fossero presi in effettiva considerazione esplicita ed interpretati, pressoché simultaneamente, in modo naturale e spontaneo. Infatti, per esempio, è vero che non si può parlare di specifica conoscenza dei medesimi nell'antichità orientale ed in quella classica occidentale, ma la cosiddetta *regola dei segni* era già implicitamente contenuta in numerosi risultati stabiliti dagli antichi Greci attraverso i procedimenti caratteristici dell'algebra geometrica e sotto questa luce venne in seguito ripresa da DIOFANTO che, intorno all'anno 275, l'esplicitò ed applicò nella sua *Aritmetica* ([17], pp. 22-23; [37], vol. II, pp. 257-258). Non si hanno notizie precise circa gli sviluppi immediatamente successivi di tali concetti, ma, presso gli Indiani, si riscontra effettivamente l'impiego sistematico dei numeri negativi dell'algebra, certo favorito dal virtuosismo nei calcoli e dalla fecondità dei metodi formali proprii del popolo in questione: così, nel 628, BRAHAMAGUPTA parla con la massima disinvoltura di *quantità numeriche positive e negative* e porge regole pratiche per l'addizione di *crediti e debiti* ([37], vol. II, p. 258), mentre nel famoso trattato *Lilāvati*, redatto verso il 1150 da BHĀSKARA CARYA, i numeri negativi appaiono usati francamente, scrivendo indifferentemente nelle somme indicate i termini positivi prima oppure dopo quelli negativi e distinguendo il valore positivo da quello negativo nei risultati di estrazioni di radici quadrate ([17], p. 24).

Atteggiamento analogo e, per certi aspetti, maggiormente consapevole può rilevarsi nell'opuscolo *Flos* che L. FIBONACCI scrisse nel 1225; ivi l'autore interpreta con scioltezza la soluzione negativa, ottenuta in relazione ad un problema di natura finanziaria, in termini di perdita invece che di guadagno. E la validità di questa affermazione è contenuta nelle seguenti parole dell'autore in questione:

...*Hanc quidem quaestionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur, primum hominem habere debitum*...([18], t. II, p. 238).

Comunque, anche se alle illustrazioni fornite da R. G. BOSCOVICH non può pertanto attribuirsi un carattere di assoluta originalità, non è lecito negare loro tutto il valore che esse rivelano in quanto sintomi di un rinnovato interesse per un'altra di quelle problematiche destinate a contribuire all'unificazione concettuale delle varie discipline matematiche. Inoltre l'aspetto del pensiero del nostro acuto scienziato che, nell'ambito delle considerazioni che stiamo svolgendo, appare più interessante è quello che lo porta ad analizzare il caso in cui un problema geometrico con soluzioni negative possa considerarsi ottenuto per continuità da uno a radici positive e, quindi, interpretabile secondo i procedimenti abituali. Di ciò diremo dettagliatamente nel corso del prossimo paragrafo.

4. Nell'ordine di idee di cui alla fine del precedente terzo paragrafo di questo nostro articolo, possiamo affermare che R. G. BOSCOVICH fu condotto dalla vivacità del proprio ingegno a concepire delle variazioni dei dati che conferiscono ai segmenti incogniti anche dei valori infiniti. Precisamente, egli prende in considerazione un fenomeno del tipo seguente: un segmento che, in relazione ad una determinata configurazione iniziale nonché a prestabilite convenzioni di misura e di segno, è soluzione di un certo problema geometrico (o rappresenta una tale soluzione) ed è positivo può, per variazione continua dei dati, divenire negativo; e ciò non soltanto quando una variazione siffatta porti gli estremi del segmento in esame a coincidere e, quindi, faccia assumere alla lunghezza di questo il valore zero, ma anche quando essa sia tale da produrre, in qualche evenienza, un segmento infinito prima e poi, proseguendo detta variazione in una direzione opportuna, negativo.
Vedremo in seguito in qual modo il nostro autore presenti questo fenomeno; ma ci sembra opportuno segnalare già qui che egli intuisce che esso altera, in un certo senso, la natura della retta come essa viene tradizionalmente considerata nella geometria classica. Infatti R. G. BOSCOVICH considera il caso di una retta divisa da un suo punto fisso H in due semirette ordinatamente specificate da due punti A e B, della medesima retta, giacenti da parti opposte rispetto ad H. Ed afferma testualmente:

717. *Questo passaggio del punto P attraverso l'infinito, da una semiretta alla semiretta opposta, sembra compiersi con movimento in tutto e per tutto continuo, come se la semiretta HA all'infinito fosse in qualche modo connessa con la semiretta opposta HB*... ([4], p. 329).

Ovviamente si tratta di cambiamento continuo dei dati nella costruzione del punto P: invero, non si può affermare che questo si muova per continuità, neppure accettando per il concetto in questione quel significato intuitivo sopra riportato. In effetti, l'autore concepisce il fenomeno della connessione delle due semirette attraverso l'infinito in modo che potrebbe dirsi pittoresco; egli dice precisamente:

716. ...[il punto] *viene assorbito in qualche modo dall'immenso pelago dell'infinito, cosicché non si può precisare la sua posizione*... ([4], p. 328).

Pertanto, in questo caso, è lecito asserire che il punto è andato all'infinito e che esso

720. ...*in qualche modo si è nascosto, ma non ha cessato di esistere, né si è cambiato*... ([4], p. 332).

E, con ulteriori esempi, R. G. BOSCOVICH indica pure che

721. ...*è possibile dimostrare sia quell'immediato passaggio* [del punto attraverso l'infinito] *sia la connessione* [delle due semirette all'infinito]*; e pertanto sarà evidente che la retta deve essere considerata come una circonferenza il cui raggio diventi infinito ed il cui centro, a quella distanza infinita, in qualche modo si nasconda come oscurato, per ricomparire poi dalla parte opposta* [della retta]...([4], p. 333).

Più oltre, la stessa visione risulta ripresa e puntualizzata in questi precisi termini:

858. REGOLA 10. *Se il raggio di una circonferenza diventa infinito in modo che, rimanendo fisso uno dei suoi estremi, l'altro vada all'infinito senza una posizione precisa, allora tale circonferenza diventerà una retta e, viceversa, la retta dovrà essere considerata come una circonferenza di raggio infinito.* ([4], p. 442).

Questi ultimi passi dell'opera in esame consentono oggi, in certo qual modo, di riguardare la considerazione da parte di R. G. BOSCOVICH della variazione continua dei dati come un consapevole tentativo di unificare molteplici, svariate proposizioni particolari della geometria elementare, ossia di realizzare quell'unificazione di concetti e di processi dimostrativi quale sarebbe derivata più tardi da un rigoroso assetto sistematico della geometria proiettiva e, ad un livello ancora superiore, dalla sintesi kleiniana del Programma di Erlangen.

Ovviamente, con tali parole, non intendiamo attribuire al nostro autore più meriti di quanti ne abbia avuti nella realtà, oppure una vista troppo lunga in ogni direzione; ma le sue intuizioni testimoniano invero che la sintesi delle nozioni geometriche attraverso una visione più generale stava diventando una specie di esigenza intrinseca, sbocciata dalla stessa evoluzione delle idee e dal progresso di tutti i rami della matematica.

Analogo spirito per certi aspetti anticipatore e rivelatore di concezioni a quell'epoca ancora confuse, oppure, comunque, latenti, dobbiamo riconoscergli soprattutto in riferimento all'enunciato della REGOLA 10. Inconsapevolmente, con tale proposizione lo straordinario gesuita si poneva al livello dei massimi geometri dell'epoca immediatamente successiva, accostandosi, sia pure in modo non troppo sciolto e raffinato, al concetto di equivalenza topologica tra la retta proiettiva e la circonferenza. Può escludersi con assoluta, categorica certezza che egli conoscesse ciò che in merito aveva già scritto G. DESARGUES perché le opere di questi, cadute rapidamente nell'oblio subito dopo la scomparsa del loro autore, si ritenevano irrimediabilmente perdute, e ciò ancora nel 1845 ([5], p. 415; [14], vol. I, pp. I-VIII; [35], vol. I, pp. XXV-XXIX). Non ci risulta che un'analoga visione sia stata contemplata da altri prima di R. G. BOSCOVICH e, pertanto, appare evidente tutto il valore, nell'ambito delle considerazioni che stiamo svolgendo, dell'ultimo dei vivacissimi brani da noi testualmente riferiti poco fa.

Poiché abbiamo qui menzionato G. DESARGUES, vale forse la pena di segnalare e precisare come egli, per primo nella storia delle matematiche, espliciti una concezione così nuova per quei tempi e così feconda di conseguenze ed applicazioni nei successivi sviluppi del pensiero scientifico. È noto ([5], pp. 413-418; [8], pp. 309-313; [17], pp. 257-258; [27], pp. 11-12 e 80; [28] pp. 495-499; [37], vol. I, p. 383 e vol. II, p. 332) che egli, nel suo *Brouillon Project. D'une atteinte aux éuénémens des rencontres d'un cone avec un plan* ([14], vol. I, pp. 103-242), perviene in modo esplicito agli attuali concetti di punto proiettivo (proprio oppure all'infinito) e di retta proiettiva (propria oppure all'infinito), da lui riguardati rispettivamente come *but d'une ordonnance* *de droites* ed *assieu d'une ordonnance de plans* ([14], vol. I, pp. 104-106), l'uno e l'altra *à distance finie ou infinie* indifferentemente. Così facendo, G. DESARGUES non si limita a considerare sotto un aspetto formale elementi che avevano già fatto sporadiche comparse, ad opera di artisti e scienziati precedenti, in scritti di carattere tecnico; neppure egli mira soltanto ad introdurre per detti enti una terminologia specifica ed adeguata, ma fine a se stessa. Invero, sconfinando ben oltre tali angusti limiti, il matematico in questione arriva a riconoscere al punto ed alla retta all'infinito alcune caratteristiche precipue di elementi nuovi e segnala in termini inequivocabili l'equivalenza che l'introduzione dei medesimi conduce a stabilire fra la circonferenza e la retta proiettiva, quest'ultima intesa come l'insieme di punti ottenuti aggiungendo a quelli della retta della geometria elementare il punto all'infinito individuato da una qualsivoglia parallela ad essa.

Infatti, mantenendo la massima aderenza al testo originale, ecco come può tradursi nella nostra lingua il passo in cui viene precisata la corrispondenza suddetta:

...Immaginiamo che una retta infinita si muova in tutta la sua estensione mantenendo fisso un punto; è chiaro che essa, assumendo con tale movimento posizioni diverse, genera e rappresenta le rette distinte di un medesimo fascio avente centro nel punto immobile. Se questo punto è ad una distanza finita ed il movimento della retta si svolge sopra un piano, allora detta retta, nelle sue successive posizioni, genera o rappresenta un fascio di rette il cui centro (il punto fisso) giace su ciascuna di esse a distanza finita, mentre ogni altro punto della retta inizialmente considerata descrive una semplice linea non spezzata le cui parti presentano tutte una medesima configurazione e si raccordano perfettamente fra loro, ossia precisamente quella linea curva ugualmente convessa in ogni punto, che dicesi circonferenza.

Se, invece, il punto immobile è ad una distanza infinita ed il movimento della retta si svolge ancora sopra un piano, allora detta retta, nelle sue successive posizioni, genera e rappresenta un fascio di rette il cui centro (il punto fisso) giace su ciascuna di esse a distanza infinita da entrambe le bande, mentre ogni altro punto della retta inizialmente considerata descrive una semplice linea non spezzata le cui parti presentano tutte una medesima configurazione e si raccor-

dano perfettamente fra loro, ossia precisamente una retta perpendicolare a quella di partenza. In conformità a tale concezione, dunque, si riconosce una specie di relazione intercorrente fra la linea retta infinita e la linea curva a curvatura costante, cioè una sorta di relazione fra la retta e la circonferenza, in virtù della quale dette linee potrebbero essere ritenute dello stesso genere e, pertanto, è lecito enunciarne le rispettive costruzioni mediante identiche proposizioni... ([14], vol. I, pp. 106-108).

In realtà, le considerazioni che, abbiamo visto, condussero R. G. Boscovich alla Regola 10 appaiono estremamente rozze e lacunose, se messe a confronto diretto con questo passo di G. Desargues; ma non va dimenticato che, nell'arco di tempo che intercorse fra i due autori, la geometria sintetica, a causa del trionfo di quella analitica, era stata sempre più trascurata fino a lasciarla cadere in un greve torpore al quale essa esitava a ribellarsi, ancora all'inizio del sec. XIX.

Ma è giunto il momento di riprendere il corso dell'esposizione interrotta con questa digressione e di continuare l'analisi del pensiero di R. G. Boscovich concedendo il maggior spazio possibile alle stesse parole che questi lasciò scritte.

Abbiamo visto in quale modo egli concepisca la continuità ed abbiamo anche constatato come non mostri alcuna reticenza ad ammettere valori negativi per le grandezze, giustificando molto ragionevomente simile accettazione con esempi finanziari e cinematici. Ma, negli scritti del medesimo autore, viene ulteriormente precisata la maniera di trattare le quantità negative definendo anzitutto il concetto di « analogia » tra due quantità che si ottengono entrambe come soluzioni di un medesimo problema mediante una trasformazione dei dati, ossia una variazione continua di questi.

A tale proposito, leggiamo:

760. *In primo luogo diremo* Analoghi *due punti che si determinano nello stesso modo e con la medesima costruzione geometrica, cioè prima e dopo la trasformazione; ossia, due punti che risultano precisamente intersezioni dei medesimi luoghi geometrici: di rette con rette, di rette con circonferenze, oppure con coniche, oppure con linee definite con la stessa legge*...([4], p. 368).

Queste testuali parole sono seguite da un certo numero di esempi di costruzioni geometriche già trattate nei precedenti capitoli dell'opera [4]. In merito ad esse, vale la pena di osservare che R. G. Boscovich considera elementare l'operazione di intersezione di due coniche; ma è chiaro che egli non aveva i mezzi per condurre un'analisi precisa delle difficoltà di natura algebrica intrinseche in un'operazione del genere e, quindi, non era assolutamente in grado di precisare il concetto di operazione elementare, o, meglio, di campo euclideo. Perciò il nostro scienziato non poteva certo collegare la classificazione delle irrazionalità con gli strumenti dell'antichità classica (riga e compasso), con i quali si eseguono appunto le costruzioni geometriche corrispondenti. Comunque il testo in esame prosegue in questi termini:

761. *Nel seguito distingueremo due generi per una siffatta analogia: precisamente dirò* Primario (*ed anche* Principale) *il tipo di analogia che si ha quando, dopo la trasformazione, la direzione della quantità definita non appare mutata oppure è cambiata un numero pari di volte; sarà chiamato* Secondario *l'altro tipo di analogia che si presenta quando la direzione della quantità* [considerata] *muta una volta soltanto oppure un numero dispari di volte. Questo secondo genere di analogia potrebbe essere chiamato* Antianalogia... ([4], p. 369).

Dopo questa precisazione del concetto di analogia, R. G. Boscovich enuncia delle Regole, che gli chiama *Canones*; ci sembra interessante analizzarle riportandole integralmente, ma nell'ordine che riterremo più opportuno; fra l'altro, la decima di esse è stata già presa in considerazione all'inizio di questo stesso paragrafo. Abbiamo ora:

764. Regola 1. *Se le quantità da cui dipende la soluzione di un problema, o l'enunciato di un teorema, dopo la trasformazione rimangono tutte analoghe secondo il primo tipo di analogia, ed inoltre non si è verificato alcun passaggio per l'infinito, allora la soluzione, o l'enunciato, e la dimostrazione rimarranno invariati parola per parola. Se poi alcune tra quelle quantità passano per l'infinito ed anche durante questo passaggio vengono riguardate sempre legate tra loro* [dalla stessa proporzione] *fermi restando gli*

estremi della proporzione, allora [dovranno effettuarsi le seguenti modifiche] *; le cose che riguardano soltanto la direzione restano invariate; nelle cose che al contrario riguardano le grandezze, le quantità devono considerarsi come aventi il medesimo rapporto che nasce dalla stessa legge che le determina,* [un rapporto] *perfettamente analogo a quello che esse avrebbero se non fossero passate attraverso l'infinito*. . . ([4], p. 373).

Dall'enunciato di questa regola si può dedurre che il legame tra due quantità, in pratica tra due segmenti, cui intende riferirsi R. G. Boscovich è quello dato dal valore del loro rapporto, rappresentato dal rapporto di altre due, che, insieme alle prime, formano una proporzione.

772. Regola 2. *Se alcune quantità rimarranno analoghe soltanto per l'analogia di tipo secondario, allora negli enunciati e nelle dimostrazioni dovranno essere computate in modo negativo quelle quantità che hanno cambiato direzione un numero dispari di volte e, precisamente, se di due quantità una sola è così mutata, la somma diventerà una differenza da ritenersi positiva o negativa secondo che quella quantità che ha variato* [segno] *sia minore o no dell'altra, e viceversa; se le due quantità cambiano* [segno] *entrambe, le somme rimangono somme e le differenze rimangono differenze, ma, da positive che erano, dovranno essere considerate negative qualora vengano utilizzate per ulteriori problemi oppure teoremi. Inoltre, nelle dimostrazioni in cui intervengano proporzioni, alle deduzioni ottenute* [con la regola del] *componendo dovranno essere sostituite altre conclusioni ottenute* [con la regola dello] *scomponendo, e viceversa qualora uno solo dei termini di un rapporto diventi negativo* [non importa se il primo od il secondo] *; altrimenti, lo sviluppo del ragionamento dovrà essere mantenuto come sta, se entrambi mutano segno.* ([4], p. 380).

R. G. Boscovich prosegue enunciando una terza regola concernente le proporzioni composte aventi per termini segmenti, oppure grandezze rappresentabili con questi enti; in seguito, egli analizza le variazioni per continuità relative agli angoli. Come al solito, anche di tale parte ci limiteremo a riportare gli enunciati più interessanti dal punto di vista della critica moderna. Per esempio, abbiamo:

790. REGOLA 4. *All'angolo, il secondo lato del quale ha cambiato solo la direzione, va sostituito quello che è il suo complemento a due retti, ovvero l'angolo che contiene, con il lato cambiato, il prolungamento del lato immutato* [cioè, sempre il supplementare]*; all'angolo che ha avuto entrambi i lati variati in direzione va sostituito il suo opposto al vertice; perché gli enunciati rimangano validi, in questo caso occorre apporre la stessa lettera ad entrambe le semirette che formano il lato che ha mutato direzione, di modo che tali lettere siano situate da parti opposte rispetto al punto analogo secondo il tipo di analogia secondario. Tuttavia è necessario evitare, per quanto possibile, negli enunciati e nelle dimostrazioni che angoli inizialmente congruenti diventino opposti al vertice, che un angolo esterno rispetto ad una coppia di rette parallele diventi interno, oppure opposto, oppure alterno; le cose* [da cambiare negli enunciati] *dipenderanno dal numero dei mutamenti, tuttavia questa dipendenza sarà tale da lasciare facilmente individuare, nei singoli casi, la debita sostituzione quando si tenga conto delle due regole che per essa sono state date. In generale, quando il vertice di un angolo, da interno alla striscia individuata da due rette parallele, diventa esterno, l'angolo formato dall'incontro nel vertice delle parallele alle rette date rimane invariato insieme al suo opposto al vertice, mentre gli angoli formati dai lati dell'angolo con le parallele da alterni diventeranno esterni, oppure interni, oppure opposti; ed il mutamento avverrà in senso contrario, se il punto* [ossia, il vertice] *da esterno diventerà interno rispetto a quella medesima striscia. Se, poi, esso da esterno alla striscia* [muovendosi] *torna ad essere esterno a quella, ma dalla parte opposta rispetto alle medesime parallele, l'angolo rimane invariato, mentre gli angoli dei suoi lati con tali rette da esterni diventeranno interni e viceversa.* ([4], p. 392).

È interessante osservare che in questa REGOLA 4, come nella precedente REGOLA 1, sono contenute delle prescrizioni per operare sui simboli (nell'una e nell'altra, rispettivamente lettere e parole) in modo che gli enunciati continuino a valere. Anche tale atteggiamento di R. G. BOSCOVICH prelude ad una concezione moderna: a quella della logica formale, di cui è ben manifesta la tendenza a trasformare le deduzioni (legate al significato dei termini) in operazioni formali sui simboli.

Qualche paragrafo più oltre, troviamo:

799. REGOLA 5. *L'apertura di un angolo può passare da una parte all'altra* [quando un lato sta fermo e l'altro ruota intorno al vertice] *e ciò accade transitando per l'angolo zero oppure per due retti; l'angolo, per il quale si verifichi il passaggio per lo zero, deve essere considerato come negativo e conteggiato come tale nelle somme, di modo che esse si trasformino in differenze, naturalmente quando uno solo dei loro addendi venga così a variare. Se, invece, la variazione ha luogo passando per due angoli retti, all'angolo risultante, come si usa dire in Geometria, deve essere sostituito il suo complemento a quattro retti; se tale angolo verrà chiamato convesso, ovvero, come dicono alcuni, gobbo, l'analogia sarà spesso molto meglio rispettata.* ([4], p. 400).

5. Nei precedenti paragrafi di questo nostro lavoro, abbiamo indicato come R. G. BOSCOVICH concepisca l'influenza esercitata dalle variazioni continue dei dati sulle soluzioni di un problema, oppure nell'enunciato di un teorema, quando dette variazioni alterino il verso degli enti geometrici; e ripetiamo ancora che tale posizione risulta senz'altro più avanzata di quella assunta in epoca successiva da L. CARNOT ([6]; [7]). Tuttavia l'interesse maggiore presentato dalle idee dell'illustre gesuita deriva, a nostro avviso, dalla soluzione che egli conseguì per il problema della rappresentazione delle radici immaginarie delle equazioni quadratiche.
In questo ordine di cose, occorre anzitutto specificare quale significato intendiamo attribuire alla locuzione *rappresentazione di un numero immaginario.* Abbiamo già ricordato che una rigorosa e soddisfacente interpretazione dei numeri complessi mediante i punti di un piano sarà ottenuta da matematici che fioriranno molto più tardi. D'altra parte è abbastanza spontaneo pensare ad un'operazione geometrica semplicissima che ad un quadrato negativo, e sia $-b^2$ (ove $b \in \Re$), associ il segmento b, quest'ultimo interpretato appunto come *rappresentazione* del numero immaginario ib. Tuttavia una simile concezione, del resto piuttosto banale, male si presta ad essere utilizzata nelle costruzioni geometriche effettive; invero l'originalità delle soluzioni per il medesimo problema dovute a V. PONCELET [35], a

M. CHASLES [11] ed a C. K. von STAUDT [38] consisterà nell'assegnare per gli enti in questione un'interpretazione geometrica, che potrebbe dirsi *diretta*, poiché essa permette, in effetti, di operare per via sintetica appoggiandosi direttamente sui dati reali che conducono alle equazioni con radici immaginarie. Non è il caso che ci soffermiamo in questa sede a ricordare, per esempio, che, secondo le idee di C. K. STAUDT, la coppia di punti immaginari su una retta è rappresentata da un'involuzione ellittica di punti e che simile posizione può, fra l'altro, essere sfruttata, nel modo diretto dianzi segnalato, per costruire geometricamente la conica individuata mediante tre punti reali ed una coppia di punti immaginari coniugati. È noto pure che V. PONCELET giunge a risultati dello stesso tipo facendo appello, invece, al suo famoso principio di continuità. Ebbene, la posizione di R. G. BOSCOVICH è soprendentemente analoga a quella che questo matematico francese assumerà circa mezzo secolo dopo, appoggiandosi a considerazioni che per certi aspetti appaiono abbastanza somiglianti a quelle del geniale predecessore. È ben noto che V. PONCELET ([3], pp. 289-299; [8], pp. 294-305 e 313-319) comincia ad osservare che ogni iperbole, la quale, ridotta in forma canonica, presenta nella sua equazione dei quadrati preceduti dal segno *meno*, può essere associata ad una ellisse; quest'ultima conica ha come diametro il segmento complementare dell'asse trasverso della suddetta iperbole, è ad essa tangente negli estremi di tale diametro e dalla medesima viene definita in modo univoco. Di conseguenza, l'altro asse di un'ellisse siffatta è reale e fornisce una rappresentazione convenzionale del numero immaginario il cui quadrato, negativo, è il semiasse immaginario dell'iperbole associata.

Vedremo fra poco quale sia la posizione di R. G. BOSCOVICH precisata, anche nel caso attuale, mediante l'enunciazione di certe regole; è da rilevarsi che queste norme sono giustificate con le considerazioni relative alla continuità di cui dicevamo: a fondamento delle medesime sta precisamente la variazione continua di un piano che seca un cono rotondo, generando così volta a volta, come intersezione, un'ellisse oppure un'iperbole. Su questa base il nostro autore fonda anzi tutto le considerazioni che lo portano a constatare l'equivalenza tra segmenti finiti e segmenti infiniti; quelli di ciascuna delle suddette specie si trasformano in elementi dell'altra per continuità: in particolare, facendo variare appunto in tal modo il piano secante che genera con un cono le coniche dei diversi tipi.

Ecco i passi nei quali viene illustrata simile concezione:

806. REGOLA 6. *Il quadrato di un segmento, sia questo positivo oppure negativo, è* [da ritenersi] *positivo e qualunque quadrato positivo ha due lati* [radici], *l'uno positivo e l'altro negativo. Se poi un certo quadrato fosse uguale ad un rettangolo di cui un lato cambia direzione, allora detto quadrato sarà da considerarsi reale, ma negativo ed analogo al quadrato di partenza secondo l'analogia del primo tipo; ed il suo lato sarà da ritenere come immaginario, perché in questo caso manca l'ente analogo del lato del quadrato iniziale. Se entrambi i lati del medesimo rettangolo cambiano di direzione, entrambi quelli del quadrato sono reali, sia il positivo sia l'altro, negativo, ed ognuno di essi sarà analogo a ciascuno dei lati del quadrato primitivo per l'analogia del primo tipo.* ([4], p. 403).

Come corollario di questa REGOLA 6, troviamo:

808. ...*Tra due segmenti, entrambi positivi oppure entrambi negativi, esistono due medi proporzionali, l'uno positivo e l'altro negativo, di uguale lunghezza, ma di direzione contraria. Tra due segmenti, l'uno positivo e l'altro negativo, non vi sono medi proporzionali reali, perché questi diventano ambedue impossibili, ossia immaginari; tuttavia, anche in un caso del genere, possono considerarsi due medi proporzionali di lunghezza uguale, ma l'uno negativo e l'altro positivo*...([4], pp. 404-405).

Dopo questi enunciati, R. G. BOSCOVICH sviluppa alcune osservazioni a proposito del procedimento che consente di associare ad ogni iperbole un'ellisse: non stiamo a riportare testualmente le parole che esprimono un pensiero che abbiamo già segnalato collegarsi sorprendentemente ai metodi escogitati in seguito da V. PONCELET. A commento di tali enunciati, nel trattato originale [4] si dice che essi traducono delle

...*relazioni, non ineleganti, tra l'ellisse e l'iperbole; relazioni che permettono di risolvere certi problemi e di ridurli ad un unico quesito e ad un enunciato comune*...([4], p. 405).

Questa frase mostra, a nostro parere, abbastanza bene che scopo del lavoro di R. G. Boscovich dovette essere proprio l'unificazione di più problemi e di più teoremi in una visione globale. E ciò introducendo un principio che pare sia, senza alcun dubbio, quello della continuità cui abbiamo ripetutamente già accennato.
A questo punto non ci resta che analizzare gli interessanti passi dove l'illustre gesuita prende in considerazione il cambiamento continuo delle coppie di segmenti che tendono a zero oppure all'infinito e la conseguente variazione del rapporto, oppure del prodotto, di enti siffatti sempre definito mediante una proporzione, nella quale rimangono costanti due termini: quelli che hanno un certo rapporto, oppure i medi, oppure gli estremi.

Abbiamo così:

835. Regola 7. *In una proporzione, se i due termini di un rapporto rimangono finiti, mentre dei due dell'altro* [rapporto] *uno va a zero oppure all'infinito, allora anche il secondo andrà a zero oppure all'infinito allo stesso modo. Se poi i due termini estremi della proporzione rimangono costanti ed uno dei termini medi va a zero, allora l'altro medio va all'infinito; e viceversa. Lo stesso avviene degli estremi, se i medi rimangono costanti: e così, in modo del tutto equivalente, se un qualsivoglia rettangolo rimane uguale a se medesimo* [in area] *ed uno dei suoi lati va a zero, l'altro lato va all'infinito, e viceversa* [2]. ([4], p. 430).

Ed anche:

839. Regola 8. *Se due rette, che si intersecano in un punto,* [variando] *diventano parallele, quel punto* [di intersezione] *va all'infinito, mentre l'angolo che era contenuto tra quelle due rette tende a zero e quello che era contenuto nella parte restante* [cioè, il supplementare] *deve essere considerato uguale a due retti. E, viceversa, se l'intersezione va all'infinito, in modo che uno degli angoli tenda a zero e l'altro a due retti, allora le due rette diventano parallele.* ([4], pp. 432-433).

---

[2] Il latino di queste frasi è piuttosto contorto ed oscuro; pertanto ci siamo permessi di tradurle *a senso*, eliminando così alcune imprecisioni che vanno riguardate, a nostro avviso, come semplici e pure sviste dell'autore.

Ed infine:

853. REGOLA 9. *Se due rette passano per un medesimo punto e* [variando] *vanno a sovrapporsi in modo che il loro angolo tenda a zero, allora altre due rette, ciascuna delle quali si mantenga parallela ad una delle precedenti, o diventano parallele anch'esse o finiscono per sovrapporsi. Se in due triangoli, che rimangono sempre simili, i vertici corrispondenti vanno a cadere su le* [corrispondenti] *basi, allora le distanze dei punti limiti da quelli che erano i vertici dei triangoli sono in proporzione.* ([4], p. 440).

Si potrebbe quindi concludere che il fenomeno per cui un punto va all'infinito viene precisato in modo geometricamente ineccepibile da R. G. BOSCOVICH attraverso questi enunciati; d'altra parte, sembra proprio che nella mente di detto scienziato rimanga una vaga tendenza a formare anche un'immagine fisica della *sparizione* del punto, quale viene descritta nei brani citati in precedenti pagine e che, nel contesto, non sono affatto isolati. Probabilmente, simile inclinazione a mischiare rigorose definizioni geometriche con visualizzazioni concrete è da attribuirsi da un lato al desiderio di spiegare in modo realistico i fenomeni della geometria e dall'altro a quello di unificare la visione geometrica e quella cosmologica da lui stesso edificata a partire dalle già menzionate leggi di attrazione e repulsione. Inoltre va osservato di nuovo che l'avvento della geometria come sistema ipotetico-deduttivo era ancora molto lontano, che a quell'epoca mancavano persino le premesse di una tale concezione e che, pertanto, questa branca delle matematiche era considerata come una scienza di contenuti, avente appunto per oggetto caratteristico gli enti dello spazio; in modo analogo, non si disponeva nemmeno di una soddisfacente teoria completa e di una rappresentazione geometrica per l'immaginario. Queste osservazioni possono, in un certo senso, aiutarci a comprendere il significato delle pagine seguenti, che altrimenti apparirebbero quasi grottesche ad una analisi che non tenesse conto della prospettiva storica.

755. *Abbiamo finora considerato molte cose che riguardano il passaggio dal positivo al negativo e viceversa, ma vale la pena di menzionare anche un altro tipo di analogia, che si manifesta quando si realizza il passaggio dallo stato reale a quello immaginario...*

...Il passaggio dal positivo al negativo mai può avvenire con un salto, ma ogni aumento ed ogni diminuzione devono realizzarsi gradualmente di modo che dal positivo al negativo il passaggio si compia attraverso lo zero oppure attraverso l'infinito. Quando si tratti di segmenti, nel primo caso gli estremi di questi vengono a coincidere e nel secondo si allontanano indefinitamente. Allo stesso modo, una quantità reale non diventa mai immaginaria all'improvviso, ma sempre a poco a poco; ed il passaggio [dal reale all'immaginario] *si compie sempre passando attraverso lo zero oppure attraverso l'infinito. In questi casi, come sbattuta contro tali scogli,* [la quantità considerata] *talvolta retrocede e poi, di nuovo, rimanendo sempre reale, talvolta passando per lo zero ed altre per l'infinito, assume direzione opposta, mentre in certi casi può perfino diventare immaginaria, cioè impossibile. Abbiamo già illustrato molti esempi di cambiamento di segno. Si presentano altrettanto spontaneamente molteplici evenienze di passaggio dal reale all'immaginario. Ne sceglieremo alcune atte ad illustrare queste variazioni.* ([4], pp. 362-363).

Ora R. G. Boscovich passa a presentare la situazione con cui tenta di spiegare come una coppia di punti reali possa trasformarsi per continuità in una di punti immaginari coniugati. Tale presentazione potrebbe essere riassunta, in termini moderni, nel modo seguente. Sopra un ramo reale di una curva algebrica, si consideri un punto A che non sia un flesso e si denotino con le lettere G e G' due punti reali, di quel medesimo ramo, abbastanza prossimi ad A e tali che la loro congiungente risulti parallela alla retta tangente in A alla curva considerata. Sappiamo che, facendo avvicinare la corda GG' alla tangente in A, mantenendola sempre parallela a questa, entrambi i punti G e G' ammettono come limite A; se poi la retta GG' varia ulteriormente, l'equazione algebrica, che nel primo caso ha due radici reali sempre più prossime alle coordinate di G e di G', viene ad ammettere due radici immaginarie coniugate vicine ad A. Il nostro autore concepisce tutto ciò in termini fisici e si esprime così:

756. *Quando la retta EF, muovendosi con moto continuo, giunge in A, i due punti G e G' si corrono incontro e quasi si scontrano in modo da distruggersi, cosicché quando la retta prosegue il suo*

movimento, essi non hanno più alcuna posizione ed il segmento [avente detti punti per estremi] *da reale diventa immaginario attraverso una variazione molto diversa da quella che accompagna un cambiamento di segno*...([4], p. 363).

Quindi R. G. Boscovich fornisce una spiegazione del passaggio all'immaginario fondata sull'ipotesi di una mutua distruzione dei due punti che tendono a confondersi e poi così prosegue analizzando anche il caso in cui una coppia di radici diventi immaginaria tendendo all'infinito:

...*Infatti il passaggio attraverso l'infinito aggiunge un'ulteriore determinazione al problema, come quando un vertice dell'ellisse, andando all'infinito, fa sì che detta curva si muti in una parabola e, trascinando seco all'infinito l'altro fuoco ed il centro, rende paralleli quei raggi che, uscendo da un fuoco, convergevano nell'altro fuoco dell'ellisse; ed alla stessa maniera, tutti i diametri che passavano per il centro dell'ellisse diventano paralleli; oppure allorquando una circonferenza si muta in una retta, se il suo centro va all'infinito. Invece, quando una quantità diviene immaginaria, il problema si fa impossibile in senso assoluto, perché le costruzioni sulle quali si fonda la sua risoluzione implicherebbero la considerazione del lato di un quadrato avente area negativa, il che si sa bene essere impossibile sia in algebra sia in geometria*...([4], p. 363).

E, poco oltre, si legge:

757. ...*In quel caso non si avrebbe passaggio all'immaginario*... *se non si verificasse all'infinito una specie di collisione, una specie di lotta tra i due punti che ivi si incontrano ed in qualche modo vicendevolmente si distruggono. E non si avrebbe qui questa specie di distruzione della quantità (se mi è concesso ravvisare una qualche analogia con la morte in altri campi), se i punti che collidono e colluttano non avessero una velocità infinitamente maggiore che in altre evenienze*...([4], p. 364).

Infine, nella conclusione del medesimo passo, sono contenuti alcuni accenni che prendono a prestito concetti addirittura dalla biologia e che qui riportiamo, per dare un'idea dell'ambiente storico e del tipo di argomentazioni reperibili nei testi matematici di quei tempi:

...di modo che si può constatare che anche in Geometria può esistere la morte causata quasi esclusivamente da un eccesso di furore ed effervescenza, come avviene nell'urto di frecce o giavellotti, oppure per quella, sia pur rara, specie di febbre o languore che si manifesta nei vecchi a causa dell'età avanzata e dell'indebolimento delle forze... ([4], p. 365).

Queste frasi, che poco fa abbiamo detto particolarmente adatte a lasciar comprendere lo spirito di quell'epoca, sono state da noi riferite con un preciso scopo: dal loro riscontro con tutto ciò che precede nel presente articolo, resta ulteriormente valorizzata l'intelligenza che, accompagnata ad una perspicacia profonda, ha permesso a R. G. BOSCOVICH di emergere da un simile ambiente ed attestare l'acutezza del proprio ingegno in tanti altri punti della medesima opera.

BIBLIOGRAFIA

[1] *Actes du Symposium International R. G. Bošković, Beograd-Zagreb, 1958*, Académie des Sciences Serbe, Ljubyana, 1958; vol. I.

[2] *Atti del Convegno Internazionale celebrativo del 250° anniversario della morte di R. G. Boscovich e del 200° anniversario della fondazione dell'Osservatorio di Brera, Milano-Merate, 6-8 ottobre 1962*, a cura dell'Istituto Italiano per la Storia della Tecnica, Milano, 1963.

[3] BOMPIANI E., *Il principio di continuità e l'immaginario in Geometria*, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari, raccolte e coordinate da Federigo Enriques*, ed. Zanichelli, Bologna, 1925; parte I, vol. II, art. X, pp. 271-308.

[4] BOSCOVICH R. G., *Tomus III continens Sectionum Conicarum Elementa nova quadam methodo cincinnata, & Dissertationem de Transformatione locorum Geometricorum. Ubi de Continuitate lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis.*, della *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium, auctore P. Rogerio Josepho Boscovich Societatis Jesu, nunc ab ipso perpolita, et aucta, ac a plurimis praecedentium editionum mendis expurgata*, Editio veneta prima ipso auctore praesente, et corrigente. Ex Typographia Remondiniana, Superiorum permissu, ac privilegio, Venetiis, MDCCLXIII, pp. 297-468.

[5] BOYER C. B., *Storia della matematica*, ed. I.S.E.D.I., Milano, 1976.

[6] CARNOT L. N., *De la corrélation des figures de Géométrie*, ed. Crapelet, Paris, 1801.

[7] CARNOT L. N., *Réflexions sur la méthaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, 1860.

[8] CASSINA U., *Dalla geometria egiziana alla matematica moderna*, ed. Cremonese, Roma, 1961; pp. 94-325.

[9] CHASLES M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1875.

[10] CHASLES M., *Discours d'inauguration du cours de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences de Paris*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1846.

[11] CHASLES M., *Traité de Géométrie Supérieure*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1880.

[12] CLAVIO C., *Euclidis Elementorum Libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati. Auctore Christophoro Clavio*, Romae, apud Vincentium Accoltum, 1574; 2 volumi.

[13] COMMANDINO F., *Elementorum Libri XV una cum scholiis antiquis. A F. Commandino urbinate nuper in latino conversi, commentariisque quibusdam illustrati*, Pisauri, apud Camillum Francischinum, 1572.

[14] DESARGUES G., *Oeuvres réunies et analysées par M. Poudra, précédées d'une nouvelle biographie de Desargues, suivies de: L'Analyse des ouvrages de Bosse, élève et ami de Desargues; De notices sur Desargues extraites de la vie de Descartes, par Baillet; et des lettres de Descartes; De Notices diverses sur Desargues, par le P. Colonia, Pernetty, MM. Poncelet et Chasles; De Notices sur la Perspective d'Aleaume et Migon; Sur celle de Niceron; Sur celle de Grégoire Huret; et d'un Recueil très rare de divers libelles publié scontre Desargues*, ed. Leiber, Paris, 1864, 2 volumi.

[15] DUPIN C., *Développements de Géométrie pour faire suite à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Analytique de M. G. Monge*, (5 memorie presentate all'Istituto di Francia), Paris, 1813.

[16] ENRIQUES F., *Sull'immaginario in geometria*, Periodico di Matematiche, Serie IV, VII (1927), ed. Zanichelli, Bologna; pp. 140-153 e 231-240.

[17] ENRIQUES F., *Le matematiche nella storia e nella cultura*, ed. Zanichelli, Bologna, 1938.

[18] FIBONACCI L., *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da B. Boncompagni*, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, Roma, 1857-1862; 2 volumi.

[19] FORTI U., *La teoria della gravitazione di Huyghens*, Periodico di Matematiche, Serie IV, VI(1926), ed. Zanichelli, Bologna; pp. 305-313.

[20] FORTI U., *Tommaso Young e la Rinascita della teoria ondulatoria della luce nel secolo decimonono*, Periodico di Matematiche, Serie IV, X(1930), ed. Zanichelli, Bologna; pp. 7-20.

[21] GILARDI G., *Il problema dei disaccordi fra teoria newtoniana dei grandi pianeti e osservazioni*, Periodico di Matematiche, Serie IV, XVIII (1938), ed. Zanichelli, Bologna; pp. 151-170.

[22] GRMEK M. D., *La personalità di R. G. Boscovich*, Atti del Convegno Internazionale celebrativo del 250° anniversario della morte di R. G. Boscovich e del 200° anniversario della fondazione dell'Osservatorio di Brera, Milano-Merate, 6-8 ottobre 1962, a cura dell'Istituto Italiano per la Storia della Tecnica, Milano, 1963; pp. 69-82.

[23] HEATH T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc., New York, 1956; 3 volumi.

[24] KEPLERO J., *Opera omnia* (ed. C. Frisch), Francoforte ed Erlangen, 1858-1871; 8 volumi.

[25] KEPLERO J., *Ad Vitellionem Paralipomena*, in *Opera omnia* (ed. C. Frisch), Francoforte ed Erlangen, 1858 -1871; vol. II, pp. 119 e 187.

[26] KLEIN F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im. 19 Jahrhundert*, ed. Verlag von I. Springer, Berlin, 1926.

[27] LORIA G., *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia*, ed. C.E.D.A.M., Padova, 1931.

[28] LORIA G., *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*, ed. Hoepli, Milano, 1950.

[29] MASOTTI A., *Matematica e matematici nella storia di Milano, da Severino Boezio a Francesco Brioschi*, conferenza tenuta il 15 gennaio 1963; estratto dai « Rendiconti del Seminario Matem. e Fisico di Milano », vol. XXXIII (1963).

[30] NEWTON I., *Philosophiae naturalis principia mathematica, Auctore I. S. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali*, Londini, Iussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater, Anno 1687.

[31] NEWTON I., *The mathematical Papers*, ed. Whiteside, Cambridge University Press, London, 1967-1969; 3 volumi.

[32] NEWTON I., *Principi matematici della filosofia naturale* (a cura di A. Pala), ed. U.T.E.T., Torino, 1965.

[33] PÉLÉTIER J., *In Euclidis Elementa geometrica demonstrationum libri sex*, Lion, 1557.

[34] POGGENDORFF J. C., *Geschichte der Physik*, Leipzig, 1879; nn. 305-311.

[35] PONCELET J. V., *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1865; 2 volumi.

[36] PONCELET J. V., *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1862; 2 volumi.

[37] SMITH D. E., *History of Matematics*, ed. Ginn & Co., Boston, 1923; 2 volumi.

[38] STAUDT K., *Geometrie der Lage*, trad. M. Pieri, ed. Bocca, Torino, 1889.

[39] TAYLOR C., *On the History of geometrical Continuity*, « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society », 1880-81.

[40] VIVANTI G., *I paradossi dell'infinito*, Periodico di Matematiche, Serie IV, I(1921), ed. Zanichelli, Bologna; pp. 190-209.

[41] WHYTE L. L., *R. J. Boscovich, S. J., F. R. S. (1711-1787), and the Mathematics of Atomism*, Notes and Records of the Royal Society of London, vol. XIII (1958), n. 1.

SUNTO

L'articolo presenta ed analizza alcuni lineamenti dell'opera di R. G. BOSCOVICH nei quali si ravvisano idee, a proposito della geometria, che preludono ad atteggiamenti assunti circa mezzo secolo dopo anche da V. PONCELET come punti di partenza per la fondazione della propria geometria proiettiva e l'unificazione dei problemi. Si vuole qui mettere in risalto come, anche in questo campo, R. G. BOSCOVICH manifesti chiaramente quella genialità di invenzione e quella vivacità di ingegno per cui egli si impose pure in altri campi da lui coltivati.

SUMMARY

This paper shows and analyses some outlines of R. G. BOSCOVICH's works in which it is possible recognize ideas, about geometry, foreshadowing attitudes put on, half a century later, as starting-points for his own projective geometry and the unification of a great many processes of demonstration and solution of problems, by V. PONCELET too. Here we will emphasize how, in this field also, R. G. BOSCOVICH reveals those inventive power and intellective cleverness owing to which he was very successful in further ranges.