

PROGRAMMAZIONE E DECISIONE IN MATEMATICA ELEMENTARE

Esperienze e proposte di didattica matematica. 8

1 - Sarebbe farsi delle grandi illusioni il credere di poter dare una definizione completa ed esauritiva della matematica. La celebre frase di B. Russell che descrive la matematica come « quella scienza in cui non si sa di che cosa si parla, e non si sa se ciò che si dice è vero », nasconde una grande verità sotto l'aspetto un po' paradossale. Si potrebbe tuttavia osservare che questa frase, pur essendo brillante e — a modo suo — profonda, non presenta tutti i caratteri della matematica. Il fatto che la complessità di questa scienza sfugge ad una definizione completa è forse un vantaggio, perché permette di sforzarsi di dire cose diverse e di illustrare certi aspetti che sono forse meno comunemente considerati. Occupandoci di questioni a livello molto più basso, vorremmo cercare di dare qualche esempio che serva di aiuto nell'opera didattica, porgendo l'occasione agli insegnanti di attirare l'attenzione degli allievi su un aspetto della matematica che si distacca dalla immagine volgarmente attribuita a questa materia; essa invero viene studiata (quando lo è) spesso come un insieme di ricette, di procedure, di regole e di formule. Non è raro il caso in cui, di fronte a certi problemi che non si possono risolvere con la utilizzazione di una formula, il giovane rinunci, dicendo che « non si può risolvere ». Egli intende esprimere con queste parole il fatto che non possiede (o non ricorda) formule che diano la soluzione.

Questo atteggiamento può anche essere dettato dalla pigrizia, ma forse è anche fondato su una visione non troppo ampia della materia, da fare risalire forse al tipo di insegnamento ricevuto. Proprio per contrastare questa visione, vorremmo sforzarci di dare cittadinanza nell'ambito della matematica, ad ogni procedura che sia razionale e che utilizzi in qualche modo il procedimento di simbolizzazione che è una delle caratteristiche della matematica.

Vorrei poter insistere su entrambi i caratteri del ragionare matematico ai quali ho accennato; anzitutto sul carattere di razionalità del comportamento, per avere più informazioni su una determinata questione di quanto se ne avevano al momento in cui il problema è stato formulato. Si esclude quindi il tirare ad indovinare, la consultazione di veggenti e altre cose.

In secondo luogo la procedura per ottenere ulteriori informazioni è quella di utilizzazione di determinati simbolismi, che possono essere svariatissimi da caso a caso, i quali con la loro sintassi interna permettono di dedur-

re le proprietà della realtà che si vuole rappresentare col linguaggio dei simboli scelti.

Tra le procedure che stanno diventando di moda in questi ultimi tempi, sono da ricordare quelle che si chiamano comunemente procedure di programmazione.

Esse sono rese quasi necessarie per le numerose questioni di tecnica e di economia che vengono poste da queste scienze alla matematica. Ne consegue dunque che la matematica si arricchisce di procedimenti e di simboli che erano sconosciuti o non comunemente impiegati soltanto qualche decennio fa, ma che non escono dallo schema concettuale della nostra scienza, così come vorremmo cercare di presentarlo.

E vorremmo osservare ulteriormente che questi procedimenti non sono necessariamente ad alto livello: al contrario riteniamo che l'insegnante accorto possa attirare l'attenzione degli studenti su questi aspetti della materia ad ogni livello di insegnamento, addirittura pensiamo al livello elementare. Lo scopo da conseguire dovrebbe essere da una parte il suscitare l'interesse degli allievi e dall'altra quello di far loro prendere l'abitudine dell'analisi logica rigorosa dei comportamenti e la coscienza esplicita delle leggi della logica che sono utilizzate in modo per così dire « naturale » nei nostri comportamenti, anche i più banali.

2 - Per dare un esempio di ciò che vorremmo esprimere, vorremmo soffermarci su una operazione del tutto elementare che consiste nella ricerca di un portone di cui si conosce il numero, in una data strada. Si potrebbe pensare che questa operazione non ha nulla di scientifico e soprattutto non ha nulla a che vedere con la matematica. Ci permettiamo di dissentire da questa opinione, perché pensiamo che la ricerca in questione sia molto facilitata, anzi acquisti il carattere di un procedimento ad esito sicuro quando si tengano presenti due circostanze fondamentali: anzitutto i numeri dei portoni sono stati assegnati con l'osservanza di certe convenzioni e pertanto si presentano come nomi di certe cose (i portoni) che appartengono ad un certo linguaggio (quello dei simboli della matematica); in secondo luogo il linguaggio scelto ha certe proprietà che permettono di dedurre logicamente altre informazioni da quelle che si posseggono all'inizio.

Si pensi infatti ad una assegnazione di nomi che faccia riferimento alle professioni degli abitanti: in questa iper-

tesi non vi è alcuna ragione perché la « porta del barbiere » sia sullo stesso marciapiede di quella « del sarto ». Invece se nell'assegnazione dei numeri si seguono le convenzioni abituali, allora per esempio i due portoni che portano due numeri che hanno la stessa parità sono sempre sullo stesso marciapiede.

Ora può essere interessante analizzare il comportamento di un cittadino che ricerca un portone che porta un certo numero N in una strada nella quale i numeri dei portoni sono stati assegnati secondo la convenzione abituale; in forza di questa, se si percorre la strada nel senso dei numeri crescenti, si hanno i numeri pari alla destra ed i dispari alla sinistra, e due portoni successivi su un medesimo marciapiede hanno ovviamente numeri (pari o dispari) immediatamente successivi.

Ripetiamo che l'analisi che segue può essere giudicata inutile e tale da rendere complicata una operazione per sé semplice; ma a nostro parere noi la giudichiamo tale perché per abitudine compiamo tutte le operazioni molto rapidamente e senza rendercene esplicitamente conto. Mentre invece è utile analizzare ogni momento del procedimento per renderci conto esplicitamente delle due circostanze essenziali che abbiamo ricordato poco fa.

Il programma per la ricerca può essere presentato sotto l'aspetto del diagramma di flusso (che viene spesso indicato con l'espressione inglese *flow chart*); e lo presentiamo qui perché pensiamo che la compilazione di un diagramma di flusso sia utile per acquisire la mentalità matematica, proprio per le ragioni che abbiamo esposto ripetutamente.

Supponiamo dunque che il cittadino cerchi il portone che corrisponde al numero N e che si trovi di fronte ad un portone che porta il numero n .

Il programma può essere stilato in due parti, che corrispondono alle due ipotesi di N pari e di N dispari.

Sia anzitutto N pari; si hanno allora le operazioni, logiche e pratiche della Tab. 1.

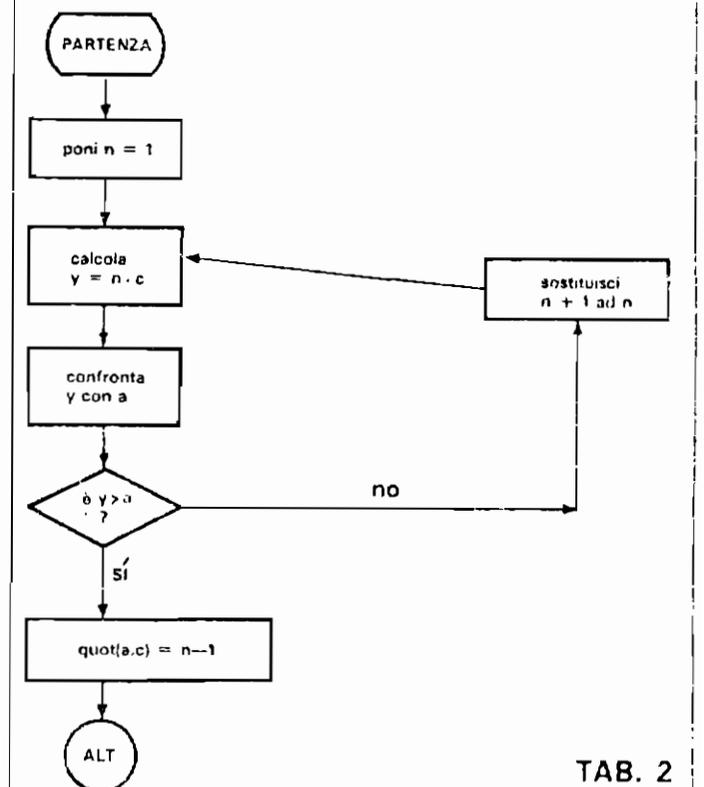
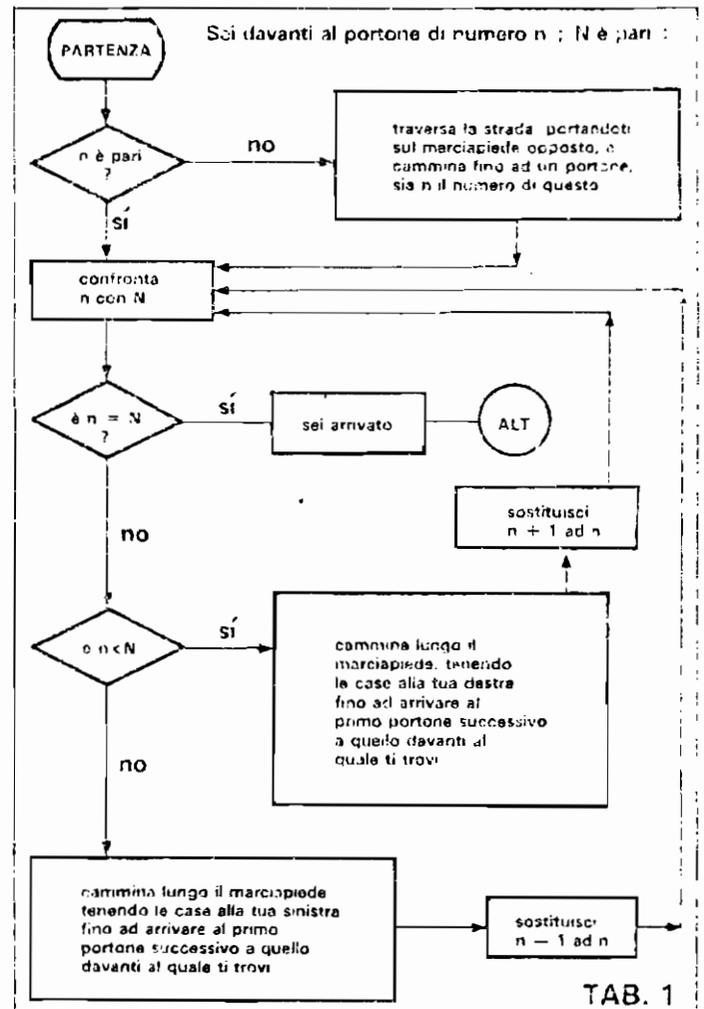
Nel caso in cui N sia dispari si ha un diagramma analogo a questo, che si ottiene scambiando nel secondo le parole « pari » e « dispari » tra loro e pure le parole « destra » e « sinistra » tra loro.

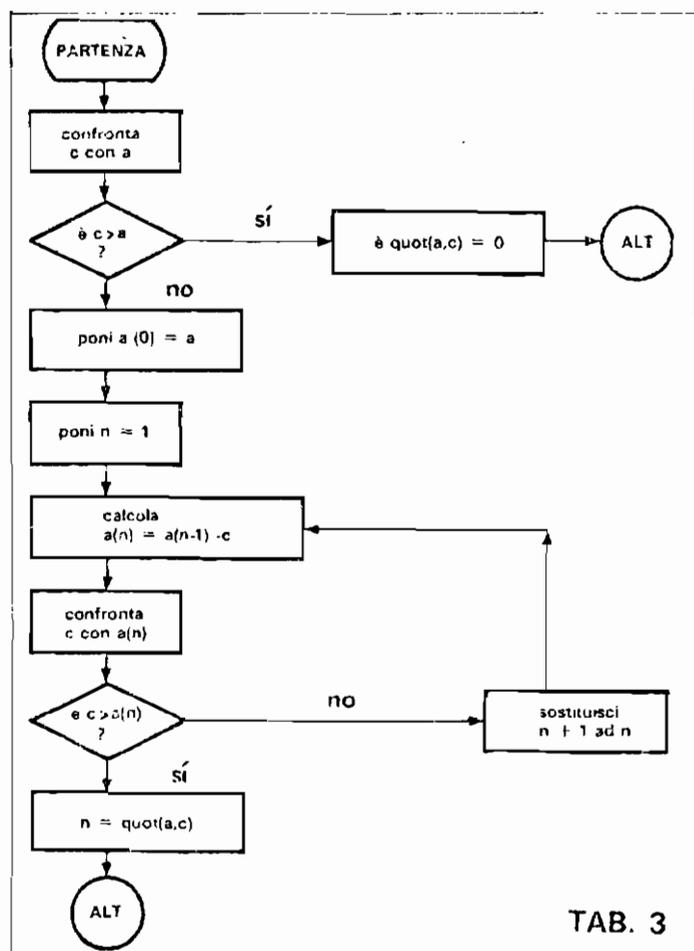
Il programma che abbiamo elaborato or ora si riferisce ad un problema pratico; tuttavia ricordiamo che nella matematica, anche elementare, i procedimenti analoghi sono molto comuni. Tali sono per esempio molti procedimenti che si riferiscono alle operazioni aritmetiche che vengono spesso chiamate « inverse »: per esempio la ricerca del quoto tra due numeri naturali oppure il calcolo della radice quadrata di un numero razionale.

Diamo degli esempi relativi al primo dei due problemi; a tal fine, dati che siano due numeri interi naturali a e c (con $c \neq 0$) indichiamo col simbolo $\text{quot}(a, c)$ il massimo intero che moltiplicato per c dà un risultato non superiore ad a .

Il programma potrebbe essere formulato nel modo descritto in Tab. 2.

Il programma che abbiamo dato or ora rientra nella interpretazione della ricerca del quoto tra due numeri, descritta talvolta come « operazione inversa della moltiplicazione »; è possibile tuttavia concepire la ricerca del quoto come operazione di « sottrazioni successive ».





TAB. 3

In questa seconda maniera di vedere il calcolo di $\text{quot}(a, c)$ potrebbe essere ottenuto con un procedimento la cui programmazione è data dal diagramma di flusso di Tab. 3.

Si potrebbe trattare per esercizio il problema di dimostrare la sostanziale equivalenza dei due procedimenti; un problema pure interessante sarebbe quello di costruire il diagramma di flusso del procedimento abitualmente insegnato nei corsi di aritmetica elementare; ciò porterebbe a constatare il fatto che certe « regole » non sono altro che una programmazione razionale di tentativi per giungere ad un determinato scopo.

Come abbiamo già detto ripetutamente, l'analisi che abbiamo svolta non ha lo scopo di complicare le cose (come si potrebbe pensare a prima vista) ma di rendere conto esattamente del significato di tutte le operazioni logiche ed aritmetiche che si fanno, anche per una operazione a livello elementare.

3 - Il lettore si sarà accorto che nei procedimenti elementari esposti finora si incontrano dei momenti fondamentali nei quali si confrontano tra loro due numeri. Ciò ci convince ancora una volta che per condurre a termine tali procedimenti si sfrutta in modo essenziale una proprietà dell'insieme numerico: tale proprietà potrebbe essere espressa in parole dicendo che l'insieme dei numeri naturali è totalmente ordinato, avendo come relazione di ordine quella che viene espressa con le parole « maggiore di » oppure « minore di ». Sarebbe molto istruttivo analizzare anche altri procedimenti che hanno sostanzial-

mente lo stesso fondamento: si pensi per esempio alla ricerca di una parola in un vocabolario. Non ci soffermiamo qui su queste idee, bastandoci aver accennato a questi fatti per cercare di suscitare nel lettore la ricerca di altri esempi che sono sì elementari ed abituali, ma sono pure istruttivi ai fini che ci proponiamo. Vorremmo invece fare un passo avanti, osservando che il procedimento di confronto tra due numeri trova applicazione in una miriade di problemi pratici che potrebbero essere classificati sotto la denominazione comune di « problemi di ottimizzazione ».

In questi problemi, che si presentano spessissimo nella pratica e nella tecnica, si tratta sostanzialmente di ricercare il massimo (o il minimo) di un insieme numerico, dato sotto varie forme e sotto varie ipotesi vincolative. Tale è per esempio il problema classico dell'analisi matematica che consiste nella ricerca del valore massimo preso da una data funzione reale $f(x)$ di una variabile reale x in un certo intervallo.

Sappiamo bene che nella ipotesi che la funzione ammetta derivate nell'intervallo considerato, il problema viene ricondotto alla ricerca delle radici della derivata $f'(x)$.

In altre parole, le ipotesi enunciate permettono di ricondurre il problema della ricerca del massimo ad un altro problema (quello della ricerca delle radici di una equazione) che si presume più semplice.

Tuttavia vi sono moltissimi casi in cui le ipotesi non sono valide e quindi il procedimento della ricerca del massimo dell'insieme numerico deve essere ricondotto al confronto diretto. Questi casi sono talvolta molto istruttivi, perché permettono all'insegnante di mettere in rilievo l'importanza della utilizzazione metodica delle proprietà formali della relazione d'ordine nell'insieme dei numeri reali.

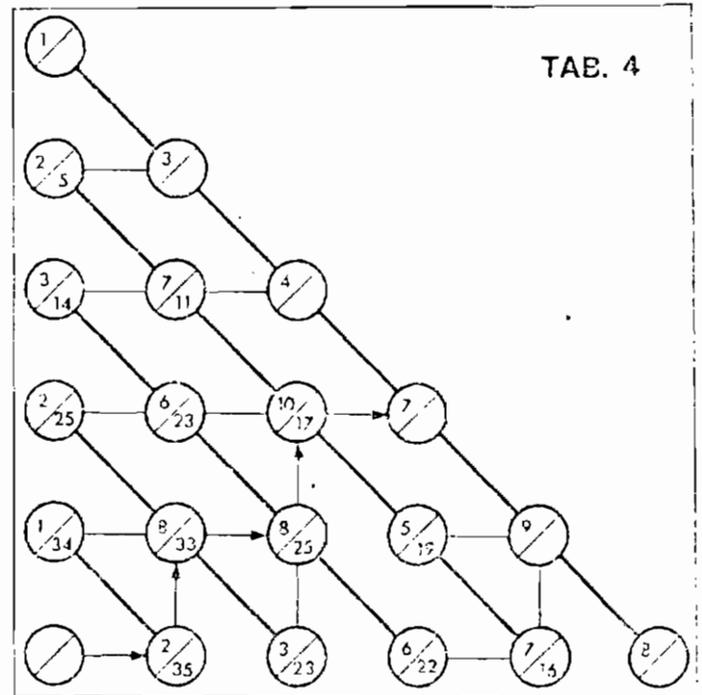
Inoltre questi casi permettono anche di richiamare l'attenzione sul fatto che il comportamento razionale consiste nella programmazione esatta, che permetta di assicurare che si sono esaminati veramente tutti gli elementi dell'insieme numerico. L'esempio che analizzeremo subito permetterà di precisare ulteriormente il nostro pensiero. Si consideri la tabella IV; in essa è dato un reticolato cartesiano in cui sono segnati con cerchi soltanto i punti a coordinate intere. I cerchi sono divisi in due metà: in alto a sinistra sono dei numeri interi che possono essere considerati come i valori di una funzione.

Consideriamo una spezzata che parta dal punto più in basso a sinistra (l'origine del sistema cartesiano) e tocchi cinque cerchi; gli spostamenti possono essere fatti con passi elementari, diretti in alto oppure a destra.

Pertanto ad ogni passo viene raggiunta una delle linee oblique discendenti dall'alto a sinistra al basso verso destra. Ad ogni cammino viene attribuito un valore intero che si ottiene sommando i numeri scritti (in alto a sinistra) in ogni cerchietto toccato; si tratta di scegliere il cammino a cui corrisponde il numero massimo. Per questo problema elementare non si direbbe che esistano regole, almeno nel senso comune del termine, per la soluzione.

A prima vista, un modo sicuro per programmare la risposta è quello di escogitare un simbolo per rappresentare tutti i cammini possibili, di guisa che si possa raggiungere la sicurezza di aver computato tutte le possibili somme.

Un modo per raggiungere questo scopo potrebbe essere il seguente: attribuiamo il simbolo « 1 » ad ogni tratto orizzontale ed il simbolo « 0 » ad ogni tratto verticale: allora un cammino sarà rappresentato da un simbolo costituito dalla successione di cinque simboli elementari. Questa scelta ci offre anche la possibilità di determinare il numero di possibili cammini: invero se interpretiamo i simboli scelti come cifre di numerazione in base due, il numero di cammini è dato dal massimo numero rappresentabile in base due con cinque simboli; poiché si hanno due scelte per ogni posto, è subito visto che il numero dei cammini è $2^5 = 32$. I cammini possibili si potranno elencare tutti nel modo seguente: si scrivano tutti i numeri, da zero a 31 estremi inclusi, e poi si rappresentino in base due, completando eventualmente con delle cifre zero a sinistra, fino ad ottenere in ogni caso una successione di cinque simboli. Si otterranno così 32 numeri interi, tra i quali si potrà scegliere il maggiore. Questo procedimento potrebbe essere considerato come troppo pesante, ma osserviamo che esso è perfettamente sicuro e razionale. Si può tuttavia cercare di rendere il procedimento meno faticoso e più elegante utilizzando qualche osservazione che faremo subito e che, opportunamente generalizzata, forma la base del metodo della « Programmazione dinamica » del Bellmann. A tal fine prendiamo in considerazione le linee oblique discendenti da sinistra in alto a destra in basso, che segnano i vari passi di ciascun cammino. Supponiamo di essere giunti con un determinato cammino ad un punto della penultima linea; da questo punto possiamo muoverci soltanto in due modi, andando ad un punto dell'ultima: o camminando verso destra oppure verso l'alto, e ci porteremo così sull'ultima linea. Ora se il cammino che abbiamo percorso fino a quel punto è ottimale (cioè tale da darci la somma massima) dovremo scegliere come ultimo passo il cammino elementare che ci porta al punto dell'ultima linea nel quale si ha il valore maggiore della funzione. Pertanto ripetendo il ragionamento per ogni punto della penultima linea, saremo condotti a congiungere ogni punto di questa con uno solo dei due punti dell'ultima che da esso sono raggiungibili. In altre parole, se siamo giunti ad un punto della penultima linea, il cammino elementare successivo è obbligato. Possiamo quindi ignorare i punti dell'ultima linea, a patto di sommare il numero che compete a ciascuno di essi al valore che compete all'unico punto della penultima, che può essere congiunto con esso da un cammino elementare che fa parte di un cammino ottimale. Pertanto in ogni cerchietto della penultima linea scriveremo, nella parte a destra in basso finora libera, la somma dei valori della funzione che competono a quel punto ed a quello dell'ultima linea col quale esso è congiunto. Siamo così ricondotti ad un problema nel quale i passi da compiere sono soltanto quattro, purché consideriamo come valori della funzione sui punti della penultima linea le somme che abbiamo già calcolate. È chiaro ora che il procedimento può essere ripetuto per la terz'ultima linea e conduce chiaramente alla determinazione del cammino cui compete il valore ottimale; è anche chiaro che sulla qualità di ottimalità di tale percorso non influisce il valore della funzione nell'origine, valore che pertanto non è stato assegnato. In figura il percorso ottimale è stato segnato con frecce. Se vogliamo adottare il simbolismo che abbiamo



spiegato prima, ad esso competerebbe il simbolo 10101. Osserviamo infine che i calcoli ed i ragionamenti svolti sono ad un livello assolutamente elementare e quindi potrebbero utilmente essere presentati da insegnanti che desiderino svegliare l'interesse degli allievi e dare una immagine più aperta e nuova della matematica.

RECENSIONI

Terzo convegno sull'insegnamento della matematica (Bologna 28-29-30 aprile 1977), a cura di Piergiorgio Gherardini e Giuseppe Piliro, Unione Matematica Italiana, Bologna 1977, pp. 418, prezzo non indicato.

L'importanza della manifestazione e degli atti può essere, oltre che affermata come parere personale, indicata riportando sommariamente i riferimenti dell'indice.

Prima giornata - 28 aprile 1977: Introduzione del prof. V. Villani; Relazioni sull'attività dei nuclei di ricerca didattica del contratto CNR-UMI; Relazioni su altre sperimentazioni didattiche; Interventi nel dibattito. *Seconda giornata - 29 aprile 1977*: Saluto dell'assessore ai beni culturali e ambientali della Regione Emilia-Romagna; Ulteriori informazioni su attività didattiche; Interventi nel dibattito; Formazione ed aggiornamento degli insegnanti — ricerche su «Biblioteche e laboratori tipo»; introduzione, relazioni, interventi nel dibattito). L'insegnamento di «Matematica ed Osservazioni scientifiche»: riflessioni e proposte su programmi e metodi (relazioni e interventi nel dibattito). *Terza giornata - 30 aprile 1977*: Scuola secondaria superiore (relazioni e interventi nel dibattito); Problemi della riforma della scuola secondaria (sintesi dei lavori del convegno, osservazioni, interventi nel dibattito). *Appendice*: Notizie sui contratti; Relazioni presentate per la pubblicazione; Allegati a relazioni presentate al convegno; Discorsi e proposte di legge.

Non essendo possibile soffermarsi qui ad analizzare relazioni e interventi, ci limitiamo a richiamare i punti che il prof. V. Villani ha indicato, nella sua « sintesi », come particolarmente significativi: 1) positività dell'iniziativa del contratto UMI-CNR; 2) esigenza di estendere l'attività di aggiornamento ai docenti della scuola media inferiore e ai maestri della scuola elementare; 3) difficoltà di programmare una sperimentazione significativa nel triennio delle superiori a causa della incertezza sulla struttura legislativa; 4) problemi legislativi e necessità di un aumento del peso complessivo della matematica e delle materie scientifiche; 5) necessità di consistenza delle Università e delle Associazioni scientifiche per l'aggiornamento degli insegnanti; 6) partecipazione al convegno di non matematici; 7) opportunità — per il futuro — di convegni per l'approfondimento di temi specifici.

(continua a pag. 32)