

CFM 2001. Sulla probabilità. Riflessioni.

1 Le pagine che seguono sono dedicate alla presentazione di un'esperienza didattica concretamente vissuta, diretta alla presentazione del concetto di probabilità in una scuola media, con i relativi collegamenti ai concetti fondamentali della statistica, soprattutto descrittiva.

Uno degli scopi fondamentali che ha mosso l'insegnante nell'impostazione di questo modulo didattico è stato quello di superare la tradizionale presentazione del concetto di probabilità, fondato sulla concezione classica, che oggi è spesso chiamata "oggettiva", e di introdurre invece il concetto stesso secondo la moderna concezione "soggettiva".

Invero una delle conseguenze della scelta didattica che parte dalla concezione classica è il fatto che l'alunno viene facilmente indotto a pensare che la probabilità sia una proprietà del singolo evento aleatorio (o del sistema di eventi) che si considera. Discende da qui che agli alunni viene propinata la definizione classica di "probabilità di un evento" come *rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili*, tralasciando inoltre, troppo spesso, la clausola essenziale, la quale impone che "i casi siano tutti *ugualmente possibili*".

Queste frasi (o altre analoghe) vengono corredate dalla descrizione dei pochi modelli fisici usuali che servono come supporto alla creazione di eventi aleatori artificiali: estrazione di palline da urne o da contenitori, a condizione che le palline siano indistinguibili tra loro al tatto, estrazione di carte da gioco da mazzi adeguatamente mescolati, lancio di un cubo o di qualche altro poliedro regolare ecc.

Lo spettacolo dell'estrazione dei numeri del lotto pubblico, trasmesso dalla TV, con la liturgia tradizionale del bambino bendato con le maniche arrotolate e la pattuglia di persone che leggono il numero estratto, e lo mostrano e lo proclamano, rafforzano questa presentazione del concetto di probabilità. Inoltre, in collegamento con la concezione classica, i testi scolastici abbondano di esercizi che sono sostanzialmente di matematica combinatoria, e che mirano ad addestrare gli alunni al computo dei casi favorevoli e dei casi possibili nelle situazioni più varie, escogitando i modelli fisici più svariati che realizzino concretamente degli eventi aleatori.

2 Nella maggior parte dei casi i solerti estensori dei testi scolastici si guardano bene dal fare osservare che queste presentazioni del concetto di probabilità sono molto distanti dalla realtà concreta della scienza e dell'economia; dottrine queste nelle quali il concetto di probabilità di un evento aleatorio e la sua applicazione rigorosa hanno un'importanza spesso fondamentale. E ciò soprattutto per il legame profondo che collega il concetto stesso con la teoria e la pratica della informazione, e con la ricerca della massima razionalità possibile nelle decisioni economiche.

Appare quindi ragionevole adottare finalmente nelle didattica abituale la visione soggettiva del concetto di probabilità, e soprattutto abbandonare l'impostazione che conduce a credere che la probabilità sia una proprietà dell'evento aleatorio che si costruisce o si considera.

Vedremo in seguito che ciò non significa rendere inutili i numerosi esercizi di combinatoria, che si incontrano nella manualistica; si tratta invece ridurli al loro vero significato, cioè come espedienti per dare una prima e provvisoria valutazione della probabilità di un evento aleatorio, spesso costruito artificialmente ed assunto, in modo più o meno cosciente e valido, come modello di una situazione reale.

Come è noto, secondo la visione soggettiva del concetto di probabilità, questo nasce da un impegno economico di un dato soggetto, quando costui è disposto a versare immediatamente una determinata somma di denaro a certe condizioni, e precisamente per ricevere una somma maggiore nel caso in cui si verifichi un determinato evento [è questo in genere il contratto che viene chiamato spesso "scommessa"], oppure perché egli, oppure altre persone determinate,

possano ricevere un risarcimento nel caso in cui si verifichi un determinato evento sgradevole [è questo in genere il caso del contratto che viene chiamato “assicurazione”].

In ogni caso, sull'evento che determina il verificarsi del contratto (vincita o risarcimento), il soggetto che versa la somma di denaro non ha informazioni sufficienti per avere la certezza del suo verificarsi o del suo non verificarsi: l'evento su cui verte il contratto viene chiamato “aleatorio” [dalla parola latina “alea” che significa “dado”] o anche “casuale”: ma ovviamente ciò dipende dalle informazioni e dalle conoscenze che il soggetto possiede. Può accadere infatti che altri soggetti abbiano informazioni diverse sull'evento che è oggetto del contratto, e quindi non siano disposti ad accettare di stringere il contratto alle medesime condizioni accettate dal primo.

3 Pertanto la decisione di stringere il contratto aleatorio (scommessa o assicurazione) dipende dal giudizio strettamente personale di un soggetto, che assume un impegno economico a certe condizioni, e lo fa a ragion veduta, in relazione alle informazioni che egli possiede o si procura sull'evento non completamente conosciuto.

La decisione di stringere il contratto aleatorio in parola avviene in base ad una “valutazione di probabilità”, valutazione che si esprime abitualmente con un rapporto tra la somma di denaro che il soggetto è disposto a versare immediatamente e quella che egli (o persone da lui designate) riscuoterà nel caso in cui si verificasse l'evento che è oggetto del contratto.

Con le parole “si esprime abitualmente” si intende introdurre l'osservazione che la valutazione di probabilità data dal rapporto tra versamento immediato ed eventuale riscossione futura non è l'unico modo per esprimere la valutazione del soggetto: per esempio le “quotazioni” che i “bookmakers” danno sui vari cavalli di una corsa costituiscono un altro modo (tradizionale dell'ambiente) per dare delle valutazioni di probabilità.

In un numero ristrettissimo di casi, e quando si presume (per ragioni più o meno buone) che l'evento aleatorio considerato sia assimilabile ad uno dei risultati delle manipolazioni su sistemi fisici di cui abbiamo detto sub. 1, il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili (purché beninteso siano tutti “ugualmente possibili”) può fornire una valutazione provvisoria della probabilità dell'evento in parola.

Ma in moltissimi casi, che hanno grande importanza nell'economia nazionale (si pensi soltanto all'industria delle assicurazioni, che produce una parte importante del “prodotto interno lordo” (il PIL), cioè della ricchezza del Paese, una cosiffatta assimilazione non dà risultati accettabili. Pertanto gli operatori economici, che tendono ad assumersi dei rischi nelle condizioni della massima razionalità possibile, ricorrono ad un'altra branca della scienza: questa viene chiamata statistica.

4 Non è possibile qui ricordare tutti i numerosissimi casi in cui, nella pratica quotidiana, nell'informazione, nell'economia ad alto livello gli operatori si ispirano alla statistica per raggiungere la massima razionalità nel comportamento economico, compatibilmente con le informazioni possedute.

Pertanto la statistica potrebbe essere descritta come una scienza che si occupa di raccogliere informazioni (generalmente su numerosi fenomeni particolari), e di elaborare valutazioni di probabilità, allo scopo di permettere agli operatori (economici, politici o sociali) la massima razionalità di decisioni, in relazione a determinati fini.

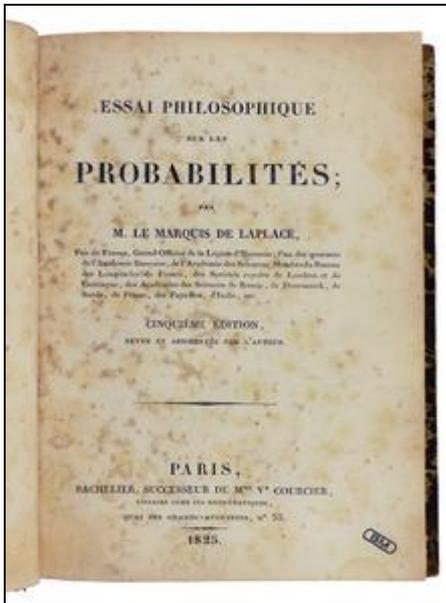
Generalmente la statistica esprime le proprie valutazioni mediante certi parametri (medie, indici); è importante osservare che ogni parametro è costruito in vista di uno scopo determinato, per dare determinate informazioni e valutare determinate probabilità.

Non esistono quindi delle “medie” privilegiate, per quanto l’abitudine quotidiana porti erroneamente a pensare che la cosiddetta “media aritmetica” sia la più importante tra quelle che si possono escogitare e calcolare in base alle informazioni possedute.

5 Occorre infine osservare che la valutazione di probabilità è sottoposta a determinate regole logiche, che, a seconda della via seguita nell’introdurre il concetto di probabilità, vengono chiamate “teoremi” (nel caso dell’impostazione cosiddetta “oggettiva”) o leggi di coerenza (nell’impostazione soggettiva).

#### RIFLESSIONI DOPO L’INCONTRO di Milano, martedì 20 novembre 2001.

1 Si discute del fascicolo riguardante la probabilità, fascicolo che contiene una compilazione fatta da una giovane studentessa, e che riguarda la nozione stessa di probabilità; tale nozione viene abitualmente presentata con atteggiamento frequentista, mentre io preferirei presentarla con l’atteggiamento che viene chiamato “soggettivo”, che si presta di più, a mio parere, ai collegamenti con il concetto di informazione, alle applicazioni pratiche ed ai collegamenti con la statistica.



#### CITAZIONE INTERESSANTE:

We must remember that the probability of an event is not a quality of the event itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it. Every event is in itself certain, not probable: if we knew all, we should either know positively that it will happen, or positively that it will not. But its probability to us means the degree of expectation of its occurrence, which we are warranted in entertaining by our present evidence. [John Stuart Mill. *Logic*. Book 3, Chapter 18. Citato da M.G. Bulmer. *Principles of Statistics*. Pagg.5-6. New York, Dover Publications, 1967].

Mi pare che questa citazione faccia giustizia dell’abitudine, purtroppo diffusa, di adottare la definizione di probabilità di un evento data da Laplace in un celebre scritto [*Essai philosophique sur les probabilités*]; secondo tale definizione si parla di “probabilità di un dato evento aleatorio” definendola come “Il rapporto tra il numero di casi favorevoli (ovviamente all’evento in parola) ed il numero di casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili”.

Tralascio qui di ripetere le critiche classiche a queste espressioni, e mi limito a ricordare che la clausola della “uguale possibilità” viene anche troppo spesso dimenticata nel ripetere psittacisticamente la pseudodefinitione, la quale, in tal caso, diventa palesemente invalida; ma si osserva immediatamente quanto sia difficile verificare l’avverarsi della circostanza nei casi concreti. Forse l’adozione fideistica delle espressioni riferite poco sopra va fatta risalire alla modellizzazione, che noi utilizziamo metodicamente nelle procedure che ci conducono dall’esperienza empirica alla concettualizzazione e poi all’espressione linguistica ed alla elaborazione logica.

2 Pertanto si potrebbe riflettere anzitutto sul significato di questi ricorsi ai modelli di sistemi fisici, impiegati nelle trattazioni classiche per introdurre il concetto di probabilità: di solito si fa riferimento a palline di vari colori, indistinguibili al tatto, introdotte in un’urna dalla quale esse

vengono poi estratte con varie modalità; oppure a mazzi di carte ben mescolate, dai quali le singole carte vengono estratte con varie modalità. Ovviamente quando le carte formano un mazzo regolare: i loro dorsi sono tutti uguali tra loro; quindi il contratto aleatorio (scommessa) viene stretto tra due contraenti nell'ipotesi che le informazioni sul valore delle carte che si presentano coperte siano uguali per ognuno dei due; ma le cose non andrebbero così se uno dei due fosse un baro, che è riuscito a fare sul dorso delle carte dei segni ignoti all'altro, e quindi su queste ulteriori informazioni può fare delle valutazioni di probabilità diverse da quelle fatte dall'altro contraente.

3 Alla luce di queste riflessioni il ricorso ai modelli fisici abituali non fonda il concetto astratto di probabilità, ma costituisce soltanto una procedura, una tecnica per conseguire una valutazione iniziale, ed in linea di massima anche provvisoria, della probabilità di un dato evento aleatorio.

È forse bene infatti ribadire il fatto che il ricorso al modello è frequente nella scienza, ma costituisce soltanto il primo passo per una conoscenza più valida: così per esempio i farmacologi assumono gli animali come modelli, dei quali si presume una reazione ai farmaci analoga a quella dei nostri organismi. Così in fisica si costruisce la teoria cinetica dei gas assumendo come modello delle molecole quello delle sferette aventi tutte lo stesso ingombro (legge di Avogadro), dotate di comportamento perfettamente elastico; così gli ingegneri studiano il comportamento dei corpi che si muovono nell'acqua o nell'aria con vasche o con gallerie del vento e così via. Ma la storia della scienza registra moltissimi fallimenti di modelli, così da rendere problematica ogni procedura teorica che ricorra a modelli per definire i propri oggetti ed i propri concetti.

Un esempio delle difficoltà che la nostra immaginazione costruisce, e degli ostacoli che genera al retto ragionare, è dato dalle discussioni che nascono a proposito delle scelte eseguite in un certo ordine: nei protocolli scritti c'è la discussione a proposito del nonno che ha tre monete in tasca, una delle quali è d'oro...È questo un caso tipico e molto frequente: tra i candidati chiamati in ordine alfabetico a scegliere le buste chiuse, nelle quali sono introdotti i temi da svolgere, tutti diversi, c'è sempre chi protesta che i primi sono favoriti, perché hanno più buste a disposizione, il che - a loro dire - falsa tra i candidati la probabilità di scegliere un dato tema. Tempo fa avvenne alla TV un'accanita disputa a proposito di una macchina (svizzera, che in Svizzera funziona sempre bene) che doveva fare un'estrazione di certi numeri e che si incantò, in modo che le palline con i numeri erano visibili benissimo nell'ordine in cui sarebbero cadute nel contenitore, ma non erano cadute. Ci furono discussioni, polemiche sui giornali, perfino ricorsi alla Magistratura, che sentenziò (mi pare) che tutto doveva essere rifatto (naturalmente tra le proteste di coloro che credevano - giustamente - di aver vinto). Mi pare che sia questo un caso veramente importante in cui l'elaborazione matematica, e non soltanto la modellizzazione, per quanto sofisticata con le macchine, aiuta a comprendere l'essenza del problema aleatorio.

Sto ancora cercando di costruire un programma in BASIC che possa servire a rendere evidente la soluzione; e penso che la costruzione di un programma cosiffatto possa servire a chiarire il significato della trattazione matematica del calcolo delle probabilità.

4 Analoghe osservazioni si potrebbero fare a proposito del concetto di "media", sul quale capita a volta di leggere, nei manuali, delle cose abbastanza singolari. Capita raramente di leggere che una media è un numero che sintetizza, *con un determinato scopo*, le osservazioni che si fanno su un insieme. Per esempio non vi è alcuna posizione concettualmente privilegiata per la media aritmetica, se non per la semplicità delle operazioni aritmetiche che occorre fare per calcolarla. Ma per certi fini la media aritmetica non soltanto non serve, ma è fuorviante, ed occorrerebbe per esempio utilizzare la moda o la mediana. Ed è chiaro che quando si utilizzano i numeri indici della statistica si perdono necessariamente delle informazioni: molte di queste si riferiscono ai singoli elementi dell'insieme considerato. Ma le discussioni su questi fatti sono spesso inutili e fuorvianti,

perché si dimentica il fatto che i numeri indici in parola servono a valutare delle probabilità, cioè a cercare di conseguire il massimo di razionalità in decisioni economiche, in condizioni di informazione (per l'appunto) incompleta, che genera negli operatori delle condizioni psicologiche di incertezza.

*Per anni ho predicato queste cose, con risultati – inutile dirlo – deludenti... Spes ultima dea.  
Milano, 22 nov. 2001*

---

*NdR. Files rieditati, maggio 2018*