ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Cl. di Scienze — Vol. LXXVII, Fasc. II — 1943-44.

NORMALE PROIETTIVA E NORMALE PUNTUALE DEI RAMI SUPERLINEARI DELLE CURVE PIANE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1943 - 44

NORMALE PROIETTIVA E NORMALE PUNTUALE DEI RAMI SUPERLINEARI DELLE CURVE PIANE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

(presentata dal M. E. Oscar Chisini il 29 maggio 1944)

Sunto. — Si dimostra che ogni elemento singolare, definito dai primi due termini dello sviluppo di Puiseux $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{1+i/n}$, di un ramo superlineare ordinario di curva piana, ammette una retta covariante per trasformazioni proiettive che potrebbe venire chiamata normale proiettiva. Nel caso poi dei rami di ordine maggiore di 2 la direzione di tale retta nel fascio avente centro nell'origine del ramo è covariante non solo per trasformazioni proiettive ma anche per trasformazioni puntuali (regolari); si può dunque parlare in tal caso anche di normale puntuale. Di tali normali si dànno alcuni notevoli significati geometrici.

§ 1. - È noto che, dato un ramo regolare di curva piana, un suo E_6, definito da un punto O e dai 6 punti infinitamente vicini che gli succedono sul ramo stesso, ammette (purchè tra i 7 punti suddetti non ve ne siano tre in linea retta o 6 su di una conica, cioè, come si dice, purchè l'E_6 non sia un elemento nè di flesso nè sestattico) una retta covariante per collineazioni che viene chiamata normale proiettiva. È nota pure la interpretazione, dovuta al Bompiani, di tale normale: essa è la ulteriore tangente nodale della cubica piana avente un nodo in O e passante per l'E_6 suddetto.

Consideriamo ora un elemento, dato dai primi due termini dello sviluppo di Puiseux $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{1+i/n}$ di un ramo superlineare ordinario di ordine qualunque di curva piana, curva che, per maggior evidenza, senza ledere la generalità possiamo supporre algebrica; nella presente Nota definiremo per l'elemento suddetto una retta che potremmo chiamare normale proiettiva, in quanto è covariante di esso per trasformazioni proiettive. Inoltre dimostreremo che, se l'ordine del ramo è maggiore di 2, la direzione della normale proiettiva, nel fascio di direzioni avente centro nell'origine del ramo, è covariante dell'elemento del ramo stesso per trasformazioni che possono essere, non solo proiettive, ma anche puntuali regolari. Definiremo quindi nel caso dei rami di ordine maggiore di 2 una normale puntuale e daremo di tali normali alcuni notevoli significati geometrici [1].

§ 2. - Sia dato un ramo superlineare di ordine $n\,(n \geqq 2)$ e di classe 1 (ordinario). Assumendo l'origine 0 del ramo come origine degli assi coordinati e la tangente come asse delle x, esso è rappresentato da uno sviluppo in serie di Puiseux del tipo

$$(1) \qquad y = a_1\, x^{1+1/n} + a_2\, x^{1+2/n} + a_3\, x^{1+3/n} + \dots \qquad \text{con } a_1 \neq 0 .$$

Consideriamo tutte le curve di ordine $n+1$ che hanno in 0 la stessa singolarità e la stessa tangente del ramo (1); esse saranno date da equazioni del tipo

$$(2) \qquad y^n = a_{n+1,0}\, x^{n+1} + a_{n,1}\, x^n\, y + \dots\dots + a_{0,n+1}\, y^{n+1} .$$

Notiamo esplicitamente che affinchè le curve (2) abbiano effettivamente in 0 la stessa singolarità del ramo (1), è necessario che sia $a_{n+1,0} \neq 0$; questa condizione noi supporremo sempre soddisfatta nel seguito anche senza esplicito avvertimento.

Qualunque siano i coefficienti a_{ik} tutte le curve (2) hanno $n^2 + n$ (almeno) intersezioni riunite in 0 col ramo (1). Imponendo che ne debbano avere $n^2 + n + 2$, i coefficienti $a_{n+1,0}$ ed $a_{n,1}$ dovranno soddisfare alle equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1^n = a_{n+1,0} \\ n\, a_1^{n-2}\, a_2 = a_{n,1} \end{cases}$$

---

[1] Mentre questa Nota era in corso di stampa il prof. VILLA mi comunicava che il prof. BOMPIANI in un corso litografato di dispense del 1942, cui non è stato dato diffusione nel campo scientifico, aveva già incontrata la cennata retta covariante, per il caso particolare dei rami cuspidali del II ordine, riconoscendone la covarianza per trasformazioni projettive ed il significato geometrico da me dato, in tutta generalità, al § 3.

Ricavando di qui i coefficienti $a_{n+1,0}$ ed $a_{n,1}$ e sostituendo nella (2) troviamo che tutte le curve (2) aventi col ramo (1) n^2+n+2 intersezioni riunite in 0 formano un sistema lineare ∞^n dato da

$$(4) \qquad y^n = a_1^n x^{n+1} + n\, a_1^{n-2} a_2 x^n y + \lambda_1 x^{n-1} y^2 + \ldots\ldots + \lambda_n y^{n+1}$$

dove $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$ sono parametri indeterminati.

Consideriamo l'elemento del ramo (1) definito dai primi due termini dello sviluppo, cioè dato da

$$(1)' \qquad y = a_1 x^{1+1/n} + a_2 x^{1+2/n}\,.$$

Sussiste il seguente

Teorema I. - La retta

$$(5) \qquad (n+1)\, a_1^2 x + n\, a_2 y = 0$$

che è la polare n-esima della tangente al ramo (1) rispetto alle ∞^n $(n+1)$-ple di rette che si ottengono ponendo

$$a_1^n x^{n+1} + n\, a_1^{n-2} a_2 x^n y + \lambda_1 x^{n-1} y^2 + \ldots\ldots + \lambda_n y^{n+1} = 0$$

è definita univocamente dall'elemento (1)' del ramo (1), è distinta dalla tangente al ramo (1) e covariante proiettiva dell'elemento (1)' stesso.

Che la retta (5) sia distinta dalla $y=0$, tangente al ramo, appare evidente quando si ricordi che deve essere $a_1 \neq 0$.

Per dimostrare che è covariante proiettiva dell'elemento (1)' basta evidentemente provare il fatto per le proiettività che mantengono la tangente al ramo stesso, ossia per le proiettività date da formule del tipo

$$(6) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{a x + b y}{1 + m x + n y} \\[2ex] Y = \dfrac{c y}{1 + m x + n y} \end{cases} \qquad \text{con } a \neq 0 \text{ e } c \neq 0$$

Ora ogni proiettività del tipo (6) può essere ottenuta mediante l'applicazione successiva delle due proiettività

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{1 + m x + n y} \\[2ex] y' = \dfrac{y}{1 + m x + n y} \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} X = a x' + b y' \\ Y = \qquad\quad c y' \end{cases}$$

e basterà provare separatamente il teorema per le (7) e le (8).

Ora sostituendo nella (4) i valori dati dalle (7) si verifica materialmente che i coefficienti a_1^n, $n a_1^{n-2} a_2$ non variano. La (8) poi è una affinità che trasforma la retta $y = 0$ nella $Y = 0$ ed ogni forma omogenea nelle variabili x, y in una forma analoga nelle variabili X, Y, e quindi la polare n-esima della $y = 0$ rispetto alla prima nella analoga polare di $Y = 0$ rispetto alla seconda. E con questo la nostra tesi è provata.

Passiamo ora ad indicare qualche significato geometrico della retta che abbiamo definito, e che potremmo chiamare la normale proiettiva al ramo (1).

§ 3. - Un primo significato ci è pôrto dalla estensione al caso di n qualunque di quello che avviene in particolare per $n = 2$. In tal caso le curve (4) sono ∞^2 cubiche cuspidate, possedenti tutte la stessa Hessiana, spezzata nella tangente al corrispondente ramo (1), contata due volte, ed in una retta ulteriore che si verifica con immediato calcolo essere quella che abbiamo chiamata normale proiettiva. Ora la Hessiana di una cubica cuspidata è spezzata nella tangente cuspidale (contata due volte) e nella retta congiungente la cuspide col flesso; possiamo dunque concludere che nel caso $n = 2$ tutte le curve (4) hanno i loro flessi sulla normale proiettiva corrispondente al ramo (1).

Nel caso di $n > 2$ se imponiamo alle curve (4) di possedere una singolarità duale di quella che posseggono in O ossia un punto semplice con tangente $(n+1)$-punta, esse debbono avere necessariamente la forma

$$(9) \qquad y^n (1 + h x + k y) = \frac{((n+1)\, a_1^2 x + n\, a_2 y)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\, a_1^{n+2}} .$$

Al variare di h e di k le (9) formano un sistema lineare di curve, e per ognuna di esse la retta $1 + m x + n y = 0$ è tangente $(n+1)$-punta, mentre il punto di contatto è l'intersezione di questa tangente con la $(n+1)\, a_1^2 x + n\, a_2 y = 0$ cioè con la normale proiettiva. Inoltre si verifica con calcolo immediato che tutte le curve del sistema (9) hanno la stessa Hessiana che si compone per tutte della retta $y = 0$ (tangente al corrispondente ramo (1)) contata $2(n-1)$ volte e della normale proiettiva contata $(n-1)$ volte. Possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema II. - Dato un ramo di ordine n e di classe 1, tutte le curve d'ordine $n+1$ possedenti nell'origine del ramo la sua stessa singolarità, la sua stessa tangente, aventi ivi col ramo n^2+n+2 intersezioni e possedenti inoltre una seconda singolarità, duale della precedente, formano un sistema lineare ∞^2 ed hanno tutte questa loro seconda singolarità sulla normale proiettiva al ramo [2].

Tale normale, contata $n-1$ volte, insieme con la tangente al ramo, contata $2(n-1)$ volte, forma la Hessiana comune a tutte le curve del sistema lineare suddetto.

§ 4. - Per ottenere un secondo aspetto geometrico della normale proiettiva estenderemo qui al caso dell'elemento (1)′ i noti risultati, dovuti al Dedò [3], relativi ad un qualunque elemento regolare E_6 di curva piana. Precisamente verificheremo che (estensione di quanto accade nel caso trattato dal Dedò), nel caso presente esistono proiettività cicliche di tutti gli ordini che mutano in sè l'elemento (1)′ lasciando ferma di conseguenza anche la normale proiettiva. Precisamente il più ampio gruppo di proiettività che lascia fermo l'elemento in questione è, come si verifica facilmente, un gruppo continuo a tre parametri che contiene ∞^2 sottogruppi ∞^1 di potenze, ciascuno dei quali contiene sottogruppi ciclici di tutti gli ordini.

Tutto ciò segue dal fatto che ognuna delle curve (9) è traiettoria di Klein e Lie di un gruppo ∞^1 di potenze. Possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema III. - L'elemento singolare (1)′ è mutato in sè da un gruppo continuo a 3 parametri di trasformazioni proiettive che lasciano invariata, oltre alla tangente al ramo, la relativa normale proiettiva. Questo gruppo contiene ∞^2 sottogruppi continui ∞^1 di potenze entro i quali si trovano sottogruppi ciclici di tutti gli ordini. L'espressione analitica di tale gruppo è data da:

---

(2) Cfr. Nota (1).

(3) Cfr. M. Dedò, *Espressione analitica di alcuni gruppi di proiettività caratterizzati in modo differenziale.* Atti Acc. Torino. Vol. 77, 1942.

$$(10)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\alpha^n x + \dfrac{n a_2 a_1^2}{n+1}(\alpha^n - \alpha^{n+1})\, y}{1 + \beta x + \gamma y} \\[2ex] Y = \dfrac{\alpha^{n+1}\, y}{1 + \beta x + \gamma y} \end{cases}$$

dove α, β, γ sono i parametri.

§ 5. - Un terzo significato geometrico si ottiene considerando le varie n-ple di punti intersecate sul ramo (1) dalle rette vicine all'origine O. Precisamente consideriamo una retta r variabile in modo continuo e regolare in funzione di un parametro λ e che per $\lambda \to 0$ abbia per limite una retta $\bar{r}$ passante per O e diversa dalla tangente ivi al ramo. Chiamiamo T l'intersezione di r con la tangente (che per noi è l'asse x) ed assumiamo su r un punto U variabile comunque in funzione di λ purchè in modo continuo e regolare e purchè la sua posizione limite $\bar{U}$ su $\bar{r}$ differisca da O. Assunto il segmento OT come infinitesimo di I ordine, sussiste il seguente

Teorema IV. - La n-pla di punti $Y_1\, Y_2 \ldots Y_n$ intersecati dalla retta r sul ramo (1) può considerarsi come un ciclo di una proiettività ciclica di ordine n, di punti uniti T ed U, a meno di infinitesimi di ordine $1 + 3/n$ se e soltanto se la retta $\bar{r}$ a cui tende r è la normale proiettiva al ramo. In ogni altro caso la n-pla $Y_1\, Y_2 \ldots Y_n$ può considerarsi appartenere alla proiettività ciclica suddetta soltanto a meno di infinitesimi di ordine $1 + 2/n$.

Per dimostrare il teorema osserviamo anzitutto che: condizione necessaria e sufficiente perchè l'asse y sia la normale proiettiva al ramo (1) è, in base alla (5), che si abbia $a_2 = 0$. Assumendo dunque la normale proiettiva come asse y, nelle formule (1) e (4) vengono a mancare i termini contenenti a_2 e dal confronto delle (1) e (4) stesse con le nuove espressioni che si ottengono il teorema risulta evidente nel caso particolare in cui si ponga $x = \lambda$ ossia se la retta r tende alla $\bar{r}$ (che in questo caso è l'asse y) mantenendosi ad essa parallela, ed il punto U è il punto all'infinito comune ad ambedue. Per estendere il teorema al caso generale, cominciamo col prendere come retta r la retta di un fascio avente centro sull'asse y in un punto a cui possiamo attribuire la coordinata $y = 1$, e per punto U il centro di questo fascio. Questo caso si riduce al precedente ponendo:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x}{1-y} \\ Y &= \frac{y}{1-y}. \end{aligned} \right.$$

Ora la (11) è una trasformazione del tipo (7) e quindi, come abbiamo già verificato, non altera nè a_1 nè a_2. Valgono dunque anche in questo caso le considerazioni fatte nel caso precedente.

A chi consideri attentamente la prima delle (11) in cui si ponga $X = \lambda$ appare evidente che ambedue i casi precedenti si possono generalizzare raccogliendoli in un unico caso: quello in cui il ramo sia intersecato da una retta:

$$(12) \qquad x = p(\lambda)\, y + \lambda$$

dove $p(\lambda)$ è una funzione analitica di λ regolare nell'intorno del valore $\lambda = 0$ e nulla per tale valore. Il punto U, scelto nella intersezione della (12) con l'asse y tende ad una posizione limite che è al finito oppure all'infinito a seconda che $p(\lambda)$ è infinitesimo di ordine rispettivamente uguale oppure maggiore di 1 rispetto a λ. Da questo caso è poi facile passare a quello in cui U è qualunque su r purchè, pur variando in modo continuo e regolare su r stessa, la sua posizione limite $\overline{U}$ su $\overline{r}$ sia diversa da O. E con questo il teorema è completamente dimostrato.

Non ci pare inutile rilevare qui esplicitamente che ognuno dei teoremi II, III e IV caratterizza la normale proiettiva e potrebbe quindi servire a definirla.

§ 6. - Nel caso in cui sia dato un ramo di ordine $n > 2$ alcuni dei precedenti risultati sono valevoli, coi ritocchi opportuni, per trasformazioni che siano non solo proiettive ma anche puntuali. Per provarlo, introduciamo nel fascio di centro O la coordinata $t = x/y$, con che la tangente al ramo (1) viene ad avere la coordinata $t = \infty$. Sussiste il seguente:

Teorema V. - La direzione del fascio O cui compete la coordinata:

$$(13) \qquad t = -\, n\, a_2/(n+1)\, a_1^2$$

che è la polare n-esima della direzione della tangente al ramo (1) rispetto alle ∞^n $(n+1)$-ple di direzioni ottenute ponendo:

$$(14) \qquad a_1^n\, t^{n+1} + n\, a_1^{n-2}\, a_2\, t^n + \lambda_1\, t^{n-1} + \ldots + \lambda_n = 0$$

è distinta dalla tangente al ramo stesso e, per $n > 2$, è covariante dell'elemento (1)' non solo per trasformazioni proiettive ma anche per trasformazioni puntuali.

Che la direzione (13) sia distinta da quella della tangente segue immediatamente quando si ricordi che deve essere $a_1 \neq 0$. Per provare poi il teorema in generale basta evidentemente provarlo per le trasformazioni puntuali che mantengono la direzione della tangente al ramo, ossia per le trasformazioni date da formule del tipo:

$$(15) \qquad \begin{cases} X = ax + by + \alpha_{20} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{01} y^2 + \dots \\ Y = cy + \beta_{20} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{02} y^2 + \dots \end{cases}$$

con a e c diversi da zero.

Ora una trasformazione come la (15) può essere ottenuta con l'applicazione successiva di una opportuna trasformazione puntuale del tipo:

$$(16) \qquad \begin{cases} X = x + \mu_{20} x^2 + \mu_{11} xy + \mu_{02} y^2 + \dots \\ Y = y + \nu_{20} x^2 + \nu_{11} xy + \nu_{02} y^2 + \dots \end{cases}$$

e della proiettività (8). Ma sostituendo nella equazione (4) i valori dati dalla (16) si verifica materialmente che, *nel caso in cui sia* $n > 2$, i primi due coefficienti della forma al secondo membro non vengono variati, mentre per la proiettività del tipo (8) valgono esattamente gli stessi ragionamenti fatti nella dimostrazione del Teorema I. E con questo il teorema è completamente provato.

Non sarà inutile osservare che la retta di parametro $t = x/y$ dato dalla (13) coincide con la normale proiettiva e che la proprietà di covarianza puntuale non compete alla retta nella sua integrità ma solo all'elemento rettilineo E_1 (direzione) nel fascio O.

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani, 11 - 1944