

Economia matematica e dintorni: sui contributi scientifici diversi dalla geometria di Carlo Felice Manara

di
Pier Carlo Nicola

Uno dei miei primi contributi scientifici fu presentato da Carlo Felice Manara a questa Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, nel 1963, quando ne era Segretario il Professor Gino Goldoni, e probabilmente Presidente il Professor Antonio Pignedoli. Per questa ragione sono particolarmente grato al Professor Francesco Barbieri, con il quale sono stato in contatto per preparare questo incontro, per avermi oggi invitato a ricordare uno dei miei due Maestri, e a rivivere per un momento quella ormai per me quasi antica esperienza risalente al precedente millennio, la prima a farmi sentire inserito per davvero nel mondo accademico italiano.

Carlo Felice Manara fu geometra di sicuro spessore, ma non fu solo un matematico accademico. Come Suo allievo non matematico, desidero qui ricordare alcuni dei Suoi molteplici interessi, soprattutto scientifici e diversi dalla geometria, dai quali emerge quanto il Nostro si sia adoperato in vari campi dello scibile. Intendo in particolare soffermarmi brevemente sui Suoi contributi in economia matematica, matematica finanziaria e attuariale, matematica generale.

In questo breve ricordo mi propongo di considerare i testi preparati da Carlo Felice nell'ordine in cui vennero pubblicati: il primo sull'Analisi economica (scritto in collaborazione con Lombardini, l'altro mio Maestro col quale avevo elaborato la tesi di laurea), il secondo sulla Matematica finanziaria e attuariale, il terzo su Matematica generale. Ritournerò infine sull'economia matematica, per discutere brevemente del volume prodotto in collaborazione tra il Maestro e l'estensore di queste pagine.

Analisi economica

Il libro (sul quale anch'io ho appreso i primi elementi dell'economia matematica nel terzo anno accademico, il 1958-59, come studente della Facoltà di Economia e Commercio dell'Università Cattolica) vide la luce, sotto forma di dispense, attorno all'anno 1955, edito da "La Goliardica" di Milano, quando Manara si era da poco trasferito dall'Università di Modena a quella di Pavia. Mi diceva Carlo Felice che il titolo "Introduzione matematica all'analisi economica", per volere di Lombardini recava in rosso i termini "matematica" ed "economica", per potersi leggere "matematica economica". Molto probabilmente i due Autori si erano conosciuti a Modena, quando Manara era da poco diventato Professore straordinario in quell'Università, e Lombardini svolgeva un incarico di insegnamento. E' quindi verosimile che sia stato Lombardini ad attirare l'attenzione di Manara sulle applicazioni della matematica all'economia. Il libro consta di due parti distinte: la prima è intitolata Complementi di matematica, consta di 214 pagine dattiloscritte, ed è interamente opera di Carlo Felice, mentre la seconda parte, mai terminata, dal titolo Il metodo matematico nell'analisi economica, è frutto di Siro Lombardini. In questa circostanza naturalmente mi limito a ricordare e commentare il contenuto della prima parte.

Il primo capitolo ha come titolo Concetti fondamentali: insiemi, corrispondenze, insiemi di punti, vettori. Per quegli anni, purtroppo per me ormai lontani, non era affatto usuale che testi di matematica si dilungassero sul concetto di insieme e sulle relative operazioni, fino a introdurre le nozioni di relazione e di corrispondenza. Dopo avere proposto gli aspetti fondamentali in modo del

tutto astratto, Manara passa a considerare gli insiemi di punti nello spazio ad n dimensioni, e non semplicemente a due o tre dimensioni, come era allora uso fare nei testi introduttivi. Considera la nozione di distanza euclidea con le relative proprietà, e le nozioni di insieme aperto, chiuso, illimitato, infinito, ... Queste nozioni sono preliminari all'introduzione della nozione di vettore ad n componenti, seguito dalle operazioni sui vettori che definiscono algebricamente lo spazio vettoriale n -dimensionale sul campo reale. E' inoltre notevole, sempre con riferimento agli anni cinquanta del secolo scorso, l'attenzione riservata da Carlo Felice agli insiemi convessi, il cui ruolo nella teoria economica è oggi assai importante. Questa nozione serve a Manara per introdurre lo studio delle disequazioni lineari, e più in generale delle disequazioni convesse e dei relativi sistemi, per arrivare a discutere teoremi di separazione fra insiemi convessi. Si passa poi a considerare quei particolari insiemi convessi che sono i coni convessi poliedrici, la cui utilità in teoria economica è rimarchevole.

Il capitolo secondo reca il titolo Richiami sulle funzioni, sia di una che di molte variabili. Qui le nozioni introdotte sono quelle usuali, salvo forse l'elasticità di una funzione, spesso importante in economia per lo studio delle proprietà delle funzioni di domanda e di offerta. Un particolare richiamo merita il fatto che il Nostro dedica uno spazio adeguato alle funzioni omogenee ed al connesso teorema di Eulero.

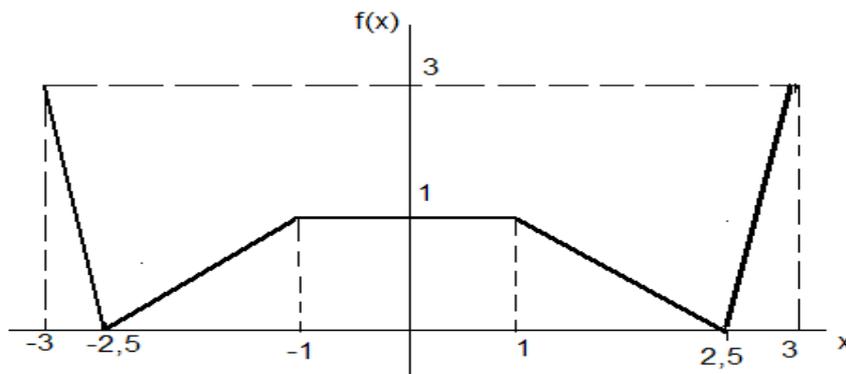
Nel terzo capitolo, Matrici e determinanti, mi sembra di poter affermare, sempre con riferimento agli anni di cui si sta dicendo, che Manara è molto in anticipo rispetto a quanto contengono i maggiori testi di analisi matematica, dove la nozione di matrice serve quasi soltanto ad introdurre la nozione di determinante di una matrice quadrata, da impiegare nello studio dell'esistenza di soluzioni per i sistemi di equazioni lineari. Vengono definite le operazioni principali sulle matrici (trasposizione, somma, prodotto, moltiplicazione per uno scalare e relative proprietà), e si studiano anche le medesime proprietà per le matrici a blocchi. Vengono poi considerate le trasformazioni elementari delle matrici per arrivare allo studio delle matrici quadrate e dei loro determinanti, e quindi si considera l'inversa di una matrice quadrata non degenere. Non occorre aggiungere che quanto precede è poi finalizzato allo studio dei sistemi di equazioni e disequazioni lineari, oggetto del successivo capitolo quarto, che stavano diventando importanti in economia grazie alla introduzione e diffusione della programmazione lineare.

Il quarto capitolo si intitola Sistemi di equazioni lineari e trasformazioni lineari. L'Autore inizia considerando un sistema lineare non degenere di n equazioni in n incognite e scrive la soluzione mediante la matrice inversa della matrice dei coefficienti, e sottolinea il fatto che la formula risolutiva equivale alla tradizionale "regola di Cramer". Vengono studiati anche i sistemi con un numero di equazioni diverso dal numero delle incognite, e sono introdotte le forme canoniche delle matrici, fino ad arrivare a definire e scrivere la forma canonica hermitiana, con la dimostrazione del teorema che ogni matrice quadrata non degenere può sempre essere trasformata in una matrice equivalente posta in forma canonica hermitiana. Il capitolo si chiude con un fugace accenno agli autovalori (e autovettori) di una matrice quadrata.

Il successivo capitolo quinto riguarda le forme quadratiche, sia generiche che specializzate, di cui si studiano le proprietà salienti che di solito ricevono solo un fugace cenno nei testi di analisi matematica dell'epoca. Si studia accuratamente la forma canonica e si considerano i determinanti dei minori principali per stabilire quando una forma quadratica è definita positiva oppure negativa. E' abbastanza singolare per l'epoca che Manara abbia proposto anche l'analisi delle forme quadratiche le cui variabili devono soddisfare vincoli lineari.

Conclude la parte matematica del volume il capitolo sesto, su Massimi e minimi delle funzioni. Inutile dire che in questo capitolo convergono tutti gli argomenti proposti nei capitoli precedenti.

Un aspetto interessante della trattazione di Manara è rappresentata dal fatto che egli, per mostrare come vi siano funzioni continue ma non derivabili ovunque, ricorre all'impiego del valore assoluto per proporre un esempio interessante (p.192) che mi sembra valga la pena di riproporre in questa sede. Si tratta della funzione $f(x)=||x|+|1-x||-2|$, nell'intervallo $[-3,3]$, la cui rappresentazione grafica è la seguente:



Come si osserva, la funzione ha un massimo assoluto, di valore 3, nei due punti -3 e 3 , un massimo relativo, di valore 1, che copre tutto l'intervallo $[-1,1]$, e due punti di minimo assoluto, $-2,5$ e $2,5$, che vale zero, dove la funzione non è derivabile, o meglio ha due derivate, destra e sinistra, entrambe diverse da zero.

Lo studio dei massimi e minimi si sviluppa ampiamente sulle funzioni di molte variabili e i relativi procedimenti di ricerca delle soluzioni; ovviamente sono le funzioni differenziabili a tenere il campo e la forma quadratica che esprime la condizione sufficiente per l'esistenza di un massimo o un minimo assume un ruolo rilevante, grazie allo studio delle forme quadratiche proposto nel capitolo quinto. Dopo avere trattato il caso delle funzioni le cui variabili non sono vincolate, Manara si occupa dei massimi e minimi vincolati da più equazioni, e conclude il capitolo con un'analisi del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Non occorre sottolineare come questo capitolo trovi ampia applicazione in economia matematica, dove l'analisi del problema del consumatore e del problema dell'impresa sono di primaria importanza.

Matematica finanziaria e attuariale

A metà degli anni Cinquanta del secolo passato a Carlo Felice, trasferitosi dall'Università di Modena a quella di Pavia, venne conferito l'incarico del corso serale di Matematica finanziaria (attuariale) nella Facoltà di Economia e Commercio dell'Università Cattolica, sede di Milano. Scrisse un bel libro, dal titolo *Elementi di matematica finanziaria ed attuariale*, edito dalle "Edizioni universitarie Malfasi" di Milano, datato 1957. Nell'anno accademico 1957-58 frequentai questo corso e sostenni l'esame corrispondente: fu il mio primo fortunato incontro con Carlo Felice. Devo avvertire che questo volume fu seguito nel 1980, per i tipi della casa editrice "Edizioni La Viscontea", da un analogo volume scritto congiuntamente da Carlo Felice e da Pietro Canetta, ma il mio resoconto sarà interamente rivolto al volume del 1957, che mi ricorda così vivacemente alcuni momenti dei miei studi universitari.

Per poter trattare anche i principi della matematica attuariale, a Manara fu necessario premettere un capitolo intitolato Elementi di calcolo delle probabilità. Dopo avere introdotto il concetto di probabilità Manara presenta le leggi fondamentali che presiedono a questo calcolo, e

successivamente discute la distinzione fra probabilità e frequenze, e introduce la legge empirica del caso, espressa dal Nostro come segue: “Crescendo il numero N degli esperimenti, la frequenza osservata si avvicina sempre più alla probabilità calcolata.” Segue una agile trattazione delle variabili casuali discrete e viene proposto il teorema di Bienaymè-Cebicef, con relativa dimostrazione. Successivamente le nozioni precedentemente introdotte sono applicate allo studio del problema delle prove ripetute e si perviene al teorema di Giacomo Bernouilli, ed inoltre si esaminano le formule approssimate quando il numero delle prove è molto grande. Questo permette a Manara di arrivare a scrivere la formula della curva di Gauss e ad introdurre le nozioni di densità di probabilità e di funzione di distribuzione. Il capitolo si conclude con una breve e chiara introduzione ai sistemi di variabili casuali e studia il teorema limite del calcolo delle probabilità. E' in questa sede che Manara propone il classico problema dell'ago, o di Buffon.

Il capitolo secondo reca il titolo Elementi di matematica finanziaria, ed inizia presentando le principali leggi di capitalizzazione: semplice, composta, continua, con le relative proprietà, e un accenno alle leggi generali di capitalizzazione. Successivamente Manara introduce la nozione di rendita certa, e propone analisi grafiche per i relativi calcoli numerici quando il tempo è una variabile discreta. Non manca però anche un cenno alle rendite continue. Successivamente Carlo Felice analizza i problemi degli ammortamenti dei mutui, tema oggi diventato scottante per molti, ed analizza come si determina il premio puro e il premio caricato dato l'ammontare di un mutuo, sotto varie ipotesi sulla successione delle rate poste a servizio del prestito. Viene infine trattato il caso dei prestiti con obbligazioni.

Il successivo capitolo terzo contiene Elementi di matematica attuariale. Inizia ovviamente dalle nozioni di sopravvivenza e mortalità, le cui probabilità sono determinate per mezzo delle funzioni biometriche elementari, necessarie per la costruzione di tavole di sopravvivenza e di mortalità. In questo contesto Manara presenta le leggi di Makeham e di Gompertz per rappresentare analiticamente la funzione di sopravvivenza. Le nozioni introduttive sommariamente ricordate stanno alla base delle assicurazioni e delle rendite, che il Nostro incomincia ad analizzare per il caso vita, successivamente per il caso morte, e poi ancora per il caso misto, quando i relativi contratti sono stipulati su una o più teste. Una sezione successiva verte sui premi periodici, puri e caricati, e accenna inoltre alle controassicurazioni. Conclude il capitolo una discussione sulla riserva matematica, che ogni compagnia assicurativa ha l'obbligo per legge di costituire, per l'ovvia ragione che ogni assicurato assolve temporalmente ai suoi impegni prima dell'assicuratore, e quindi diventa creditore dell'assicuratore. Il debito dell'assicuratore, dato dalla differenza fra prestazioni dell'assicurato e quelle dell'assicuratore, costituiscono la riserva matematica inerente al contratto fra le due parti. Manara considera tre metodi per il calcolo della riserva matematica, nello studio della quale sono praticamente richieste tutte le nozioni presentate in precedenza.

L'intero testo è corredato da numerosi esempi, spesso illuminanti per comprendere le nozioni presentate nel corso dei vari capitoli. Vi è inoltre un'appendice sui complementi di analisi matematica, tra i quali rilevano le formule e le serie di Taylor e di Mac Laurin, accanto ad accenni sulla risoluzione numerica delle equazioni e sui metodi di interpolazione.

Concludo con una valutazione personale: il testo in oggetto è breve, in tutto 242 pagine, comprese le tavole numeriche; ma certamente contiene tutti gli elementi essenziali per ben comprendere i fenomeni finanziari e attuariali che solitamente, in testi più tradizionali scritti dagli specifici studiosi di questa materia, risultano largamente diluiti.

Matematica generale

L'insegnamento di Matematica generale rappresenta il corso base per tutti gli altri insegnamenti di contenuto matematico impartiti nella Facoltà di Economia e Commercio. Negli anni Sessanta dello scorso secolo Manara invece del corso di matematica finanziaria (attuariale), sempre nella medesima facoltà ma nell'ambito dei corsi diurni, fu titolare dell'incarico di Matematica generale, per il quale insegnamento pubblicò un interessante manuale, intitolato *Matematica generale*, abbastanza innovativo per quell'epoca, dove veniva dato adeguato spazio anche allo studio del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, molto importante per trattare, fra gli altri, sia il problema del consumatore che il problema dell'impresa in concorrenza perfetta, oggi strumenti indispensabili nel bagaglio di ogni economista che non si voglia limitare a produrre mere descrizioni verbali del mondo economico.

Fatte queste anticipazioni, anche per il volume in esame, certamente meno raffinato nella sua stesura della parte matematica di *Introduzione matematica all'analisi economica*, intendo fare menzione dei suoi contenuti. Devo avvertire che mi riferisco alla terza edizione, pubblicata a Milano da La Goliardica nel 1963, perché è il volume che possiedo e perché su questo testo ebbi l'incarico di svolgere esercitazioni nell'anno accademico 1963-64, l'unico anno nella mia carriera universitaria in cui tenni delle esercitazioni.

Il capitolo iniziale tratta Elementi di calcolo combinatorio, con un'impostazione del tutto tradizionale per quell'epoca, ed è seguito dal capitolo su Matrici, determinanti, sistemi di equazioni lineari. Anche questo capitolo è di impostazione tradizionale; la nozione di matrice viene introdotta per definire il determinante di una matrice quadrata e le sue principali proprietà, allo scopo di considerare sistemi di equazioni lineari e loro soluzioni, con presentazione della regola di Cramer ed enunciazione del teorema di Rouchè e Capelli.

Il terzo capitolo reca come titolo Elementi di geometria analitica, anche qui con impostazione piuttosto tradizionale. Molto ampia è la parte riguardante il piano cartesiano, ma vi sono anche alcuni elementi di geometria analitica dello spazio tridimensionale. Il successivo capitolo si occupa di Insiemi, con un'ampiezza inusitata nella maggior parte dei testi di quel torno di tempo; naturalmente lo studio verte soprattutto sugli insiemi dello spazio a due e a tre dimensioni, ma alla fine non manca un cenno sugli insiemi nello spazio a molte dimensioni.

Il quinto capitolo si intitola Successioni e serie numeriche; senza dubbio si addentra molto più a fondo rispetto ai testi tradizionali dell'epoca, con la presentazione di vari esempi caratteristici e uno studio delle proprietà del numero e .

I capitoli dal sesto al nono riguardano le funzioni di una variabile, i limiti, la continuità, e il calcolo differenziale e integrale, con le tradizionali applicazioni allo studio delle funzioni. Invece i capitoli dal decimo al tredicesimo svolgono la teoria per le funzioni di due variabili, mentre il capitolo quattordicesimo si occupa delle funzioni di più variabili, con un accenno al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il quindicesimo e ultimo capitolo introduce le equazioni differenziali, con particolare riferimento alle equazioni lineari a coefficienti costanti, del primo e del secondo ordine, spesso utilizzate già in quegli anni nello studio dei modelli macroeconomici dinamici.

Complessivamente, gli argomenti trattati sono quelli tradizionali dell'epoca, a parte forse i capitoli sulle successioni e serie e sulle equazioni differenziali. Ma colpisce immediatamente e favorevolmente il modo moderno con cui sono trattati i vari argomenti.

Economia matematica

Una volta trasferitosi all'Università di Milano, all'inizio degli anni Sessanta del secolo scorso, Manara fece affidare l'incarico di Economia matematica, nella Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali, a Siro Lombardini, che lo svolse per alcuni anni sino a quando, essendosi trasferito Lombardini all'Università di Torino, l'incarico venne assunto per qualche anno da Carlo Felice, fino al 1967, e poi dall'estensore di queste righe. Ebbi allora la fortuna e l'avventura di collaborare con lui per la preparazione delle dispense di Economia matematica, che nel 1967 diventarono un libro, dal titolo *Elementi di economia matematica*, edito dalla Editrice Viscontea di Milano, pensato e scritto non solo ad uso degli studenti delle Facoltà di Scienze e di Economia, ma ancor più per gli studiosi italiani e non della disciplina.

Per la prima volta in Italia, il libro forniva una presentazione approfondita della teoria dell'equilibrio economico generale concorrenziale, con dimostrazioni di esistenza basate sul teorema del punto fisso di Brouwer. Si studiavano anche le proprietà delle matrici quadrate non negative e le relative applicazioni allo studio dei modelli di tipo Leontief, sia statici che dinamici. Si prendevano in esame le strutture convesse e veniva anche riservato ampio spazio allo studio delle disequazioni, estesamente applicate nella programmazione lineare e non lineare, nonché nel modello dinamico di von Neumann. Una caratteristica del volume è il fatto di contenere un'unica figura, riguardante un modello macroeconomico, perché Manara voleva che le teorie presentate fossero calate nello spazio euclideo a molte dimensioni, ed inoltre il libro non contiene alcun esempio illustrativo.

Per ripercorrere gli argomenti proposti dal libro, ancora una volta commenterò brevemente il contenuto dei vari capitoli, proponendo qualche critica, riferita in particolare modo alle parti da me scritte.

Il primo capitolo ha come titolo Modelli economici aggregati, e propone alcuni modelli macroeconomici, sia uniperiodali che multiperiodali, tra i più diffusi in quegli anni. Una particolare enfasi è riservata a un modello di sviluppo a due settori in tempo continuo, mentre inespugnabilmente manca il riferimento al modello di Solow del 1956, che ha fatto da capostipite alla maggior parte dei modelli macroeconomici dinamici in tempo continuo.

Il capitolo secondo è suddiviso in due parti: la prima si intitola Cenni sulla programmazione lineare, la seconda è rivolta alle Nozioni sui giochi fra due persone a somma nulla. Le nozioni sui giochi, in particolare sui giochi matriciali, si avvalgono della programmazione lineare, per questo i due argomenti sono stati inclusi nel medesimo capitolo. Va sottolineato però che l'esistenza di soluzioni di un gioco è ottenuta nel caso generale. Seguendo le idee proposte inizialmente da Nash (1950), citato in bibliografia, sarebbe stato possibile e interessante considerare anche i giochi fra molte persone, ma non ricordo oggi perché non ce ne siamo occupati.

I capitoli dal terzo al quinto rappresentano il nucleo centrale del libro, e sostanzialmente riguardano la teoria dell'equilibrio economico generale concorrenziale, fondato alla fine dell'Ottocento da Leon Walras e perfezionato da Vilfredo Pareto. In particolare, il capitolo terzo, suddiviso in due sezioni, tratta l'analisi del consumo e successivamente l'analisi della produzione. L'analisi è condotta sotto ipotesi di sola continuità, bastevoli a dare un resoconto completo della teoria; ma si aggiunge poi un'ipotesi di differenziabilità delle funzioni coinvolte per arrivare ad una analisi di statica comparata, nella quale svolgono un ruolo rilevante le equazioni di Slutsky. Il capitolo quarto tratta i Modelli statici di equilibrio generale, e in particolare il modello walrasiano con produzione,

nella forma rivisitata e generalizzata da Arrow e Debreu nel 1954. Per dimostrare l'esistenza di una soluzione viene applicato il teorema del punto fisso introdotto da Brouwer agli inizi del Novecento, di cui viene data una dimostrazione, elaborata per intero da Carlo Felice, nell'Appendice 4. In quell'appendice è dato anche l'enunciato del teorema del punto fisso di Kakutani (per le multifunzioni) ma non venne fatta alcuna applicazione all'esistenza di un equilibrio generale. Il capitolo si chiude con l'analisi dell'ottimalità di una configurazione di equilibrio generale concorrenziale, introdotta da Pareto agli inizi del Novecento. Nel capitolo quinto l'equilibrio generale concorrenziale è riconsiderato per analizzare la Stabilità delle posizioni di equilibrio generale. Come è noto, le condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di un equilibrio generale non assicurano anche la sua stabilità, ossia il fatto che una deviazione dalla posizione di equilibrio sia in grado di generare forze capaci di ricondurre l'economia ad una posizione di equilibrio.

L'ultimo e sesto capitolo rappresenta una Introduzione all'analisi dinamica. Per la verità ci si limita ad analizzare il modello dinamico di Leontief e la sua generalizzazione dovuta a von Neumann. Per l'esistenza di soluzioni in questo secondo modello viene impiegato un teorema di separazione tra insiemi convessi, il cui studio è oggetto di una delle appendici. Si dà anche una dimostrazione del cosiddetto teorema dell'autostrada, che assicura la convergenza della configurazione iniziale al raggio di von Neumann della massima crescita uniforme.

Il volume è corredato da sette appendici, curate soprattutto da Carlo Felice, specialmente la prima e la quarta. L'Appendice 1 ha come titolo Cenni di logica e di teoria degli insiemi. Essa è per intero dovuta al Maestro, che in modo elegante e conciso presenta i fondamenti della logica e della teoria degli insiemi. Ricordo che spesso Manara mi diceva che logica e teoria degli insiemi sono la base su cui si erge l'intero edificio della matematica. E proprio a sottolineare questa fundamentalità, con l'eccezione del primo capitolo sui modelli macroeconomici, Manara aveva voluto che spesso le ipotesi e gli enunciati dei teoremi venissero espressi coi simboli della logica e della teoria degli insiemi. L'Appendice 4, su Elementi di topologia dello spazio vettoriale a dimensione finita sul campo reale, da Lui particolarmente curato, dopo avere introdotto in modo elegante e conciso le nozioni fondamentali, arriva a discutere e dimostrare il teorema del punto fisso di Brouwer, passando per la definizione di simpleso, di partizione simpliciale di un simpleso, e l'enunciato del lemma di Sperner sui sottosimplessi.

Altri contributi di teoria economica

E' opportuno infine ricordare altri scritti del Nostro, i primi due sull'analisi delle relazioni di preferenza del consumatore, e sulla teoria di Sraffa. Nel primo di questi lavori, pubblicato nel 1968, Manara molto efficacemente presenta e discute i vari assiomi su cui si basa la formulazione di una relazione di preferenza, e il passaggio da questa a una funzione indice di utilità per il singolo consumatore, con relativa dimostrazione di esistenza. Nel lavoro su Sraffa, pure del 1968, tradotto anche in Inglese nel 1980, Carlo Felice pone la sua attenzione sul caso, piuttosto complesso concettualmente e formalmente, del modello cosiddetto della produzione congiunta, riuscendo fra i primi studiosi a formalizzare alcuni aspetti salienti e ad isolare le difficoltà matematiche di questo caso. Sono da ricordare infine due articoli apparsi sulla rivista "Economia politica", edita dal Mulino di Bologna; nel primo Manara discute efficacemente sull'economia e il metodo matematico, mentre nel secondo, in collaborazione con Alberto Quadrio Curzio e Mario Faliva, la discussione verte sul problema della produzione e dell'efficienza.

Un ricordo personale

Devo a lui in buona parte di essere diventato Professore ordinario di Economia matematica nella Sua stessa Facoltà dell'Università Statale di Milano. Di lui ricorderò sempre la sua bonaria ironia,

un certo disincanto verso il mondo universitario, e la Sua capacità di gestire negli anni Sessanta del secolo trascorso, quando nel triennio 1966-69 fu Preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università degli Studi di Milano, le turbolenze prodotte dal mondo studentesco desideroso di nuovo.

Conservo numerosi ricordi personali di Lui, che custodisco come molto privati, ma uno penso di poterlo esternare qui. Più di una volta Manara mi raccontava che quando al mattino all'edicola sotto casa acquistava qualche giornale, il giornalaio spesso gli chiedeva: "come sta oggi Professore", e il Nostro gli rispondeva: "come vuole che stia, meglio di domani". Al che l'edicolante ribatteva, non so bene se faceto o convinto: "Professore, che fortuna essere ottimisti come Lei".

Non posso infine non ricordare la profonda fede in Dio di cui si nutriva Carlo Felice, venata talvolta da un filo di sottile distacco rispetto alle vicende transitorie di questo mondo.