III. LA CONCEZIONE MODERNA DELLA SCIENZA

> Tutti gli effetti della natura non sono che conseguenze matematiche di poche immutabili leggi...
>
> Laplace, *Saggio sulla probabilità*

1. *Il declino del primato della metafisica e la nascita della concezione moderna della scienza*

Prima di analizzare nei particolari la concezione moderna della scienza, vale la pena di ritornare alla classificazione delle scienze secondo i 'gradi di astrazione' presentata nel capitolo I, per vedere come la crisi galileiana della scienza viene inquadrata in quello schema. Ci rifaremo, quindi, all'analisi che viene data da J. Maritain[1]: nell'ordine di idee che scaturisce dalla classificazione delle scienze secondo i gradi di astrazione, si ha che le scienze del grado inferiore di astrazione sono destinate ad affidarsi ad una 'scientia rectrix', che sia una scienza dei gradi superiori di astrazione e fornisca gli strumenti astratti, i mezzi concettuali per svolgere le proprie deduzioni e per costruire il proprio sistema ideale. Ovviamente la 'scientia rectrix' di fatto fornisce anche il vocabolario ed esercita una specie di attrazione e di dominio sulla scienza di grado inferiore. È appena necessario osservare che durante il Medioevo la 'scientia rectrix' delle scienze inferiori è stata la metafisica, che ha fornito l'impostazione e il vocabolario, informando del suo metodo deduttivo anche i procedimenti — empirici in linea di principio — delle scienze inferiori.

[1] Si veda il testo già citato: *Les degrés du savoir.*

Chi abbia presente il discorso umoristico con il quale il don Ferrante manzoniano cerca di dimostrare che la peste non esiste, per il fatto che non è né sostanza né accidente, capisce quale sia stata l'influenza ma anche l'invadenza della metafisica nel campo delle scienze inferiori.[2] Chi abbia presenti le argomentazioni del Simplicio di Galileo può constatare come i metodi della teologia avessero informato di sé anche le scienze fisiche, con le conseguenze che tutti conoscono.

Del resto Manzoni nel personaggio di don Ferrante e nelle sue argomentazioni non ha inventato nulla: ha soltanto dato un particolare risalto e trattato in modo arguto un atteggiamento che era comune nella mentalità dell'epoca. Si pensi, per esempio, che Pascal, nel corso delle dispute a proposito del famoso esperimento sulla pressione della aria, si trovò a doversi difendere da certi sapienti suoi contemporanei, i quali volevano sostenere che la causa per cui il mercurio sale nel tubo di Torricelli è l'orrore del vuoto, e che lo spazio nell'estremo superiore del tubo di Torricelli non è vuoto, perché il vuoto non esiste.

Questa proposizione veniva dimostrata dall'avversario di Pascal con le seguenti argomentazioni, che egli ripete: « Questo spazio che non è né Dio né creatura, né corpo né spirito, né sostanza né accidente, che trasmette la luce senza essere trasparente, che resiste senza resistenza, che è immobile e si trasporta col tubo, che è dovunque ed in nessun luogo, che fa tutto e non fa niente; ecco le qualità mirabili dello spazio vuoto: in quanto vuoto non è e non fa niente, in quanto spazio è lungo, largo e profondo; in quanto vuoto esclude la lunghezza, la larghezza e la profondità...» (*Lettre de Pascal à M. Le Pailleur au sujet du père Noël, Jésuite*).

[2] Si veda la fine del cap. XXXVII dei *Promessi Sposi*.

Anche in questo caso si tratta di argomentazioni che sono evidentemente dettate dalla metafisica classica. In questa infatti si fa la classificazione degli esseri: o Dio o creatura, o corpo o spirito, o sostanza o accidente ecc. E dello stesso influsso risentono anche le argomentazioni degli avversari di Pascal.

È ben vero che il Simplicio di Galileo si appellava alla 'sensata esperientia', così come il don Ferrante non poteva ignorare il fenomeno che era sotto i suoi occhi e, quindi, esimersi dal cercarne una spiegazione: il fatto che la gente morisse in quantità molto superiore alla norma era innegabile. Ma se la spiegazione viene ricercata (e questo è un segno della vittoria della ragione), lo è ancora nella schematizzazione ispirata dalla metafisica; infatti viene cercata negli influssi maligni delle stelle, che pur non essendo un concetto strettamente metafisico, risentono tuttavia molto della metafisica medievale.

In questo ordine di idee, la crisi rinascimentale della scienza viene spiegata nel cambiamento di 'scientia rectrix' e quindi nel passaggio della scienza inferiore dalla tutela della metafisica a quella della matematica.

Abbiamo già visto il testo di Galileo, nel quale tale passaggio è preconizzato e per così dire codificato; oggi possiamo dire che questo passaggio è avvenuto, con tutte le conseguenze, e che ormai il vocabolario e i metodi deduttivi della matematica influenzano molte scienze della natura: pensiamo, per esempio, a tutti i tentativi che sono stati fatti, anche recentemente, per sostituire il concetto di 'funzione', preso dalla matematica, al concetto di 'causa' preso dalla metafisica medievale.

La fioritura della scienza di cui siamo testimoni dimostra la fecondità di questo punto di vista. Si potrebbe obbiettare che ben poche scienze possono adottare in pieno il vocabolario della matematica e che, anzi, soltanto la fisica e la chimica (in misura minore) lo hanno fatto; si potrebbe anche dire che per molte scienze, come le scienze dell'uomo e la storia, questa adozione riesce difficile, se non impossibile.

Ma è innegabile che, nonostante tutte le difficoltà e le resistenze, il modello del metodo scientifico di oggi è dato dal metodo sperimentale e dall'impiego del linguaggio matematico.

Contro questa tendenza si sono avute, come si è detto, molte resistenze. A titolo puramente esemplificativo ricordiamo le polemiche a cui ha dato luogo la adozione della matematica nello studio dei fatti di competenza della economia; in questo campo, infatti, si è lungamente contestato l'uso della matematica e del suo linguaggio, con il pretesto che l'economia, come tante altre scienze dell'uomo, ha un oggetto troppo pieno di sfaccettature e che il simbolismo della matematica non riesce mai a rendere tutta la realtà variabile e continuamente progrediente della società umana.

Probabilmente non si è lontani dalla verità se si pensa che questo atteggiamento potrebbe essere ispirato dalla impostazione idealistica dell'analisi della conoscenza; impostazione che ammetteva come capace di 'concetto' nel vero senso della parola soltanto la filosofia e che chiamava sbrigativamente 'pseudoconcetti' quelli di cui si valgono la matematica e le scienze particolari.

È probabile che questa scuola di pensiero filosofico abbia ispirato anche certi giudizi sul pensiero scientifico, messo in seconda linea da una certa pretesa di conoscere tutto, dal desiderio che i nostri concetti dicano tutto della realtà, anche quella contingente e diveniente nella storia, e quindi dalla tesi che identifica l'unico sapere umano possibile nella storia, e la filosofia nella storia della filosofia.

È abbastanza comprensibile che queste critiche alla cono-

scenza data dalle scienze particolari siano più frequentemente elevate proprio nell'ambito di quelle scienze nelle quali l'esperimento non è possibile, cioè nelle scienze dell'uomo; invece, nell'ambito delle scienze nelle quali l'osservazione può essere ripetuta e può essere raffinata nell'esperimento questi atteggiamenti sono molto meno frequenti.
Ciò non toglie che anche le scienze della natura possano meglio inserirsi nella cultura, avendo una chiara coscienza del proprio condizionamento storico. Il che anche se non migliora in assoluto la 'resa' tecnica della scienza particolare, dà però una maggiore coscienza umana allo scienziato e quindi contribuisce al miglioramento dell'uomo di scienza e della società, al servizio della quale egli dovrebbe essere.

2. *L'evoluzione della matematica - Dalla concezione classica verso la concezione moderna*

Abbiamo visto brevemente quale sia la importanza della matematica per la scienza di oggi; abbiamo anche detto che la matematica in quanto 'scientia rectrix' tende a fornire il vocabolario, gli schemi, i principi e i metodi delle altre scienze, o almeno di molte fra esse.
Sarebbe difficile dare un'idea della evoluzione della matematica dalla sua concezione classica, come la si aveva, per esempio, presso i greci, alla sua concezione moderna, che esce da una evoluzione secolare e da un'analisi dei suoi fondamenti che ha provocato, specialmente negli ultimi decenni, dei progressi fondamentali. Ci limiteremo quindi a fare una brevissima analisi della concezione classica della matematica e a dare una idea molto elementare della sua evoluzione nel tempo.
Si potrebbe dire che nella concezione classica la matema-

tica veniva considerata genericamente come la 'scienza della quantità' e che specificamente veniva poi suddivisa in due grandi branche: scienza della quantità continua o della estensione (geometria) e scienza della quantità discreta (aritmetica).

Questa distinzione non si trova soltanto nell'antichità classica: la ritroviamo, per esempio, fino al secolo XVIII ripetuta nel già citato « Discorso preliminare » della *Enciclopedia*. In esso si dà come oggetto della geometria la 'estensione in quanto semplicemente figurata' e si definisce l'aritmetica come la scienza dei numeri.

Per quanto riguarda l'atteggiamento della matematica nei riguardi di quelli che venivano considerati come i suoi oggetti, pensiamo che sia molto istruttivo prendere in considerazione il testo celebre degli *Elementi* di Euclide, che resta nella storia come il primo esempio di trattato di matematica, se non addirittura di scienza sic et simpliciter. Orbene, Euclide incomincia la sua opera con delle frasi che sono state considerate per secoli come delle definizioni degli enti di cui intende trattare: la prima, per esempio, dice: « Il punto è ciò che non ha parte »; si ha poi l'altra frase: « La linea è una lunghezza senza larghezza ». E dopo qualche proposizione si ha ancora una frase che ha fatto scrivere pagine e pagine ai commentatori: « La retta è quella che giace ugualmente rispetto a tutti i suoi punti ». In seguito Euclide enuncia un certo numero di proposizioni senza dimostrazione: le une vengono chiamate 'assiomi', le altre 'postulati'. Le proposizioni che vengono chiamate 'assiomi' sono considerate come delle 'verità' la cui validità è assoluta e che riguarda ogni ente concepibile; invece i 'postulati' vengono enunciati soltanto relativamente a certe verità della geometria e riguardano gli enti di cui si occupa questa scienza.

Ci siamo espressi poco fa dicendo che certe frasi « sono state considerate per secoli come delle definizioni »; non sappiamo infatti se Euclide intendesse dare con queste frasi delle vere e proprie definizioni. Sta di fatto che tali frasi non vengono mai richiamate nel seguito del trattato e quindi la loro espressione verbale non viene mai considerata come il fondamento logico di una proposizione dimostrata in seguito (teorema); pertanto queste proposizioni sono state considerate da qualche critico delle 'descrizioni' degli enti piuttosto che delle definizioni.

Rimane tuttavia il fatto che la geometria, fino al secolo scorso, è sempre stata considerata come una scienza che ha determinati oggetti, accetta a proposito di questi delle verità 'evidenti', per il fatto stesso della loro evidenza, e ne deduce delle altre, meno evidenti delle prime, che vengono accettate in forza delle deduzioni logiche (dimostrazioni). Vedremo in seguito che questa concezione della geometria in particolare e della matematica in generale è cambiata in modo piuttosto radicale in epoca molto vicina a noi. Ma prima di poter esporre qualche idea a proposito della concezione moderna della matematica pensiamo che valga la pena di dire qualche cosa della sua evoluzione nel corso della storia.

Si potrebbe dire che il primo passo che segna l'inizio di una evoluzione della matematica dalla concezione greca a quella moderna è stato fatto nel periodo rinascimentale, quando le cifre arabe entrarono nel mondo occidentale per opera dei mercanti pisani e fiorentini. A ben pensare, si ha qui un fenomeno in certo senso esemplare nella evoluzione della scienza: infatti, mentre appare del tutto ovvio, da una parte, che le idee hanno una forza propria e indipendente dal modo in cui vengono — per così dire — incarnate, dalla parte opposta si ha che lo sviluppo e il cammino di una idea dipende in modo sorprendente dai simboli che sono adottati per esprimerla.

Nel caso dell'aritmetica si ha che il sistema di convenzioni (perché di convenzioni, cioè di scelte, si tratta), che è stato inventato dagli arabi e che è ormai universalmente adottato per rappresentare i numeri, è talmente comodo che non vi può essere confronto possibile con i metodi prima adottati dai greci e dai romani.
Per convincersene basta provare a fare qualche operazione sui numeri mediante le cifre arabe oppure mediante quelle romane. Un sistema così comodo per rappresentare i numeri ha reso possibile nel seguito lo sviluppo dell'algebra e quindi anche la nascita di quella dottrina che viene oggi indicata come geometria analitica.
Gli storici della scienza hanno lungamente disputato sul merito della invenzione della geometria analitica, e precisamente se questo merito vada attribuito a René Descartes oppure al matematico tolosano suo contemporaneo Pierre Fermat. Non ci interessa qui dirimere le questioni storiche di priorità e ci limitiamo a rilevare il fatto della invenzione quasi contemporanea di un metodo da parte di due scienziati come un fenomeno che è molto frequente nella storia della scienza. Si potrebbe dire, infatti, che ad un certo periodo della evoluzione del pensiero certe scoperte 'debbono' essere fatte, perché forse è maturato un clima di pensiero che porta in modo naturale allo sboccio di nuove idee. Questo fenomeno si realizza nella scoperta contemporanea di certe leggi, nella enunciazione contemporanea ed indipendente delle stesse teorie (o di teorie molto analoghe tra loro). Si direbbe quasi che il pensiero scientifico ha una sua vita indipendente, un suo corso che si incarna in certi scienziati ed in certi pensatori, ma che prescinde dagli uomini. Questa immagine è ovviamente suggestiva, ma non risponde alla realtà; tuttavia rimane vero il fenomeno storico, che si è spesso verificato in molte scienze e non soltanto per la matematica.

Per ritornare alla geometria analitica e a Descartes, potremmo dire che le sue idee gli danno la possibilità di rappresentare geometricamente una funzione qualunque e, quindi, di sviluppare tutto il sistema di convenzioni che porta a rappresentare i rapporti geometrici mediante simboli algebrici e a mettere così in evidenza il parallelismo tra la geometria e l'algebra e a mettere, in definitiva, l'algebra al servizio della geometria.
Ricordiamo che la geometria non ha mai avuto un 'metodo' per la risoluzione dei propri problemi, risoluzione che era sempre stata lasciata alla inventiva, spesso molto geniale, dei solutori. Invece l'insieme di convenzioni che portava alla geometria analitica permetteva sostanzialmente di trasformare un problema geometrico in un problema algebrico e portava quindi, in certo senso, a dare un *metodo* uniforme per la risoluzione dei problemi geometrici. Tutto ciò è stato reso possibile anche dai grandi progressi dell'algebra, del suo simbolismo e delle idee sviluppate in questo ambito: un fenomeno di questo genere sarebbe stato inconcepibile nel quadro della matematica tradizionale, quadro in cui era la geometria a fornire all'algebra i mezzi per la soluzione dei propri problemi.
Invece, nel secolo XVI, assistiamo allo sviluppo rigoglioso dell'algebra come scienza autonoma, sviluppo che porta, tra l'altro, alla risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado da parte degli algebristi italiani e alla costruzione del campo dei numeri complessi.
L'insieme delle convenzioni della geometria analitica, che portavano a stabilire un parallelismo abbastanza stretto tra le relazioni geometriche e il simbolismo algebrico, ha anche favorito la nascita e lo sviluppo di quel ramo della matematica che va sotto il nome di 'calcolo infinitesimale'. Come è noto, questo viene ad introdurre nella matematica le possibilità di trattare l'infinitamente piccolo e l'in-

finitamente grande mediante il concetto di limite. Sui successi grandiosi di questo nuovo capitolo della matematica non posso qui soffermarmi; mi limito a ripetere che la immaginazione geometrica ed una certa concezione del continuo hanno un ruolo fondamentale nella fondazione e nello sviluppo di questa branca della matematica, così come i progressi della logica e dei calcolatori elettronici hanno certamente il loro posto nello sviluppo degli studi della matematica astratta di oggi.

Si potrebbe dire paradossalmente che, se la teoria molecolare della materia si fosse diffusa prima, non avremmo forse avuto la analisi matematica moderna: per esempio le fondamentali analisi di Fourier sono sostenute nel sottofondo da una concezione del calore come di un 'fluido' continuo e sottilissimo che entra dappertutto e di cui non esiste un 'atomo'.

Certo non si può fare la storia con i 'se', come osservava anche Pascal, ma possiamo limitarci ad osservare che molte occasioni di invenzione e di sviluppo di nuovi enti della matematica sono state offerte da una certa concezione della materia immaginata come continua. La precisazione di questo concetto di continuità, soprattutto per quanto riguarda la geometria, sarà opera della matematica del secolo XIX.

In quest'epoca, infatti, ebbe origine una fase di critica della analisi matematica, fase che faceva seguito al tumultuoso sviluppo dei due secoli precedenti; in particolare l'attenzione dei matematici fu attirata dal concetto di 'continuità' e da tutti i concetti ad esso collegati.

Per avere una idea di ciò che intendiamo dire, pensiamo a ciò che si presenta alla nostra immaginazione quando parliamo di 'retta' o anche di 'linea' della geometria. A ben pensare, questo concetto è di solito formato su una esperienza fisica concreta: sulla esperienza che si ha quando disegniamo con una punta su un foglio di carta una retta, oppure quando facciamo girare il compasso, oppure quando seguiamo con gli occhi un oggetto molto piccolo (un 'punto' siamo tentati di dire ora) che si muove nello spazio.

In tutti questi casi noi siamo certi che non avvengono 'salti' nel movimento e che, per esempio, nel caso della retta non vi è dubbio che la punta della matita, quando passa da un punto all'altro, 'deve' passare per ogni punto che sta fra l'uno e l'altro. Analogamente, se si considera una circonferenza, non abbiamo dubbi sul fatto che se una retta 'penetra' nell'interno di una circonferenza incontra certamente la circonferenza stessa.

Abbiamo messo tra virgolette molte delle parole utilizzate, perché le abbiamo enunciate nel senso del linguaggio comune e nel senso che diamo alle parole stesse quando descriviamo una esperienza concreta.

Analogamente non abbiamo dubbi, per esempio, che quando guardiamo uno specchio, la superficie che vediamo è assolutamente priva di 'buchi' e che non presenta lacune.

Tutti questi fatti che noi incontriamo nella nostra esperienza quotidiana sono stati il fondamento della immagine del mondo che ha ispirato la matematica per secoli, tanto che quando si è dovuto abbandonare questo schema, accettando, per esempio, l'esistenza di una struttura corpuscolare della materia e della energia, si sono avute delle crisi notevoli, che hanno condotto molti ad una sorta di sfiducia nella scienza o di vertigine provocata da questi continui cambiamenti. Si può dire addirittura che, mentre la struttura corpuscolare della materia è stata accettata abbastanza bene, forse perché si potevano via via immaginare le molecole e gli atomi come delle particelle molto piccole, l'accettazione della struttura corpuscolare della energia ha dato luogo a ben altre difficoltà e a discussioni senza fine (e spesso inutili) da parte di coloro che si consideravano i filosofi della scienza oppure della natura.

Corrispondentemente, il problema della rappresentazione del 'continuo', così come era concepito dalla immaginazione che riproduceva con immagini interiori le esperienze nostre sui fatti della fisica, ha costretto la matematica a elaborare un'intera teoria, quella dei numeri reali, e a precisare mediante postulati quelle proprietà della continuità della retta e delle linee geometriche in generale che abbiamo ricordato poco fa.

Ai nostri fini, la cosa più importante da ricordare è che, insieme con questo intenso lavoro di critica e di precisazione dei concetti, stava avvenendo anche un mutamento radicale del modo stesso di concepire la matematica. Tale mutamento era provocato dalla nuova concezione della geometria, causata dalla dimostrazione della coerenza logica delle geometrie non-euclidee. Dobbiamo pertanto soffermarci un poco ad esporre tale questione almeno per sommi capi, per poter poi renderci conto del significato dei nuovi indirizzi e delle nuove concezioni riguardanti la matematica.

3. *Dalla concezione classica della geometria alle geometrie non-euclidee*

Abbiamo rilevato che nella concezione greca della geometria, adottata poi da tutta la matematica dei secoli successivi, non pare esserci dubbio che le proposizioni della geometria stessa dicessero qualche cosa di qualche cosa. Che questo 'qualche cosa' fosse 'lo spazio geometrico' o qualche altro ente, che magari veniva anche definito, oppure gli oggetti di cui la geometria si occupava, sarebbe difficile dire ora, né penso che ne valga la pena; la cosa interessante è che non vi era dubbio apparente che questi oggetti avessero una qualche esistenza.

Abbiamo ricordato le definizioni di punto e di retta che si leggono negli *Elementi* di Euclide. Vi era bensì tra i matematici la coscienza che il punto 'vero' — per così dire — non si può esperimentare in concreto, benché qualche trattazione filosofica faccia anche pensare al contrario; ma si direbbe che non si dubiti della 'verità' degli enunciati che sono stati considerati come 'evidenti'; in particolare di quegli enunciati che sono stati classificati come 'postulati' della geometria. Rimane tuttavia, lungo la storia della matematica, il fatto che ci fu spesso qualcuno che cercò di 'dimostrare' tali postulati. La spiegazione di questo fatto è stata data in vario modo: quella più ovvia e semplice è che qualcuno non fosse totalmente convinto della 'evidenza' di questi enunciati e quindi della loro verità; una spiegazione più sofisticata ed originale è data da chi dice che si cercava di dimostrarli proprio perché si ritenevano 'veri'. Quale che sia la spiegazione del fenomeno, sta di fatto che durante i secoli questi tentativi si sono ripetuti. Essi hanno avuto come oggetto principalmente il cosiddetto « quinto postulato » di Euclide, detto anche « postulato della parallela ». Per la migliore comprensione di quanto segue enunceremo tale postulato nella nomenclatura moderna: secondo questa, se si considerano in un piano due rette, diciamole a e b, e si traccia una retta t che le incontri entrambe (una 'trasversale'), si possono prendere in considerazione otto angoli, che — sempre nella nomenclatura moderna — vengono associati a coppie di angoli 'coniugati interni', 'coniugati esterni', 'alterni interni', 'alterni esterni', 'corrispondenti'.

Orbene, il postulato euclideo dice che se la somma degli angoli 'coniugati interni' che le due rette formano con la trasversale è diversa da due angoli retti, allora le due rette si incontrano e precisamente dalla parte (rispetto alla trasversale) dalla quale la somma è minore di due retti. Questo postulato afferma sostanzialmente che, considerata la retta *a* e preso un punto fuori di essa, è unica la parallela alla *a* che si può condurre da quel punto.

Le dimostrazioni di questo postulato che si succedettero attraverso i secoli (a parte quelle sbagliate per errori logici di cui gli autori non si accorsero) sostanzialmente si ridussero ad addossare la responsabilità della dimostrazione della proposizione in questione alla verità di altre, ritenute — in modo più o meno inconscio — come più 'evidenti'.

Ciò si deduce o da esplicite dichiarazioni degli autori che enunciano delle proposizioni che essi ritengono più evidenti della proposizione euclidea, oppure dalla analisi delle dimostrazioni date, analisi che rivela come surrettiziamente nel pensiero dell'autore ci sia stata la ammissione tacita che certe proposizioni risultano più evidenti di quella che si tratta di dimostrare. Il solo tentativo di seguire un'altra strada si ha dall'opera famosa di padre G. Saccheri s.j.[3], che nel 1632 pubblicò la sua dimostrazione per assurdo della proposizione euclidea. Dalla negazione di questa il Saccheri tentò di dedurre una palese contraddizione; egli non arriva al suo scopo, perché commette ad un certo punto un errore di deduzione e si lascia irretire da complicazioni dovute alla utilizzazione di concetti del calcolo infinitesimale non completamente analizzati. Tuttavia l'opera di Saccheri è passata alla storia della scienza per il fatto che vi si trova una prima raccolta di teoremi, che sono basati su proposizioni diverse da quella classica di Euclide; in altre parole nel trattato di Saccheri si ha un primo esempio di geometria non-euclidea.

[3] « Euclides ab omni naevo vindicatus ».

Sul problema del famoso quinto postulato di Euclide tornarono nel secolo XIX vari celebri matematici. Tra l'altro C.F. Gauss sviluppò un sistema di proposizioni di geometria non-euclidea che non pubblicò perché temeva 'gli strilli dei beoti'; infatti l'ambiente culturale del tempo, imbevuto delle concezioni kantiane che consideravano lo spazio come una delle forme costanti della intuizione spaziale e quindi accettavano la geometria euclidea come una specie di assoluto del pensiero umano, era notevolmente contrario a un sistema geometrico che non tenesse conto della proposizione di Euclide. Tuttavia si potrebbe dire che le idee maturarono durante il secolo XIX e che la matematica si liberò da certe paure ed accettò quella che doveva diventare una scoperta in certo senso rivoluzionaria: la dimostrazione della non contraddittorietà della geometria non-euclidea. In altre parole, si giunse a dimostrare che il postulato euclideo della parallela non può essere dimostrato a partire dagli altri: per dimostrarlo occorre enunciare una proposizione che è equivalente al postulato stesso; conseguentemente si possono costruire delle teorie che partono dalla negazione del postulato euclideo della unicità della parallela. La cosa interessante è che la geometria euclidea stessa può fornire gli strumenti per la costruzione di modelli di geometria non euclidea e, quindi, se si accetta la coerenza della geometria euclidea si accetta anche la compatibilità di un sistema nel quale il postulato euclideo della parallela è negato.

Questo risultato appariva quanto mai sconcertante e destinato a cambiare tutta la concezione della geometria che era stata adottata fino a quell'epoca; infatti se la geometria fosse una teoria che enuncia e studia le proprietà di qualche cosa, al di fuori di noi, questo 'qualche cosa' (fosse lo 'spazio geometrico' di cui si legge da qualche parte,

oppure fossero le 'figure' o altri oggetti) non ammetterebbe due teorie contraddittorie tra loro.
Infatti, nell'insieme di sentimenti e di certezze che ci assistono quando incominciamo a cercare la spiegazione di qualche cosa di reale che sta fuori di noi, e la cui esistenza noi ammettiamo come indipendente dalla nostra volontà, sta la certezza che questo 'reale' è in certo modo coerente e, anzi, con la sua esistenza fonda la non contraddittorietà delle teorie che noi costruiamo per cercare di conoscerlo.
Ritornava quindi a presentarsi, e in modo radicale, la questione sulla natura degli oggetti della geometria e sui fondamenti della certezza delle proposizioni di questa dottrina.
La soluzione che è stata data di questo problema si potrebbe esporre brevemente dicendo che la geometria è stata considerata sotto un duplice aspetto. Il primo è quello di un sistema di proposizioni che viene spesso descritto come 'ipotetico-deduttivo': in questo modo di concepire la geometria, questa si presenta come un puro gioco logico, analogo al gioco degli scacchi, cioè le proposizioni che vengono poste all'inizio della teoria sono scelte in un modo che è in larga misura arbitrario. Esse non sono dimostrate non perché siano 'evidenti', ma semplicemente perché dimostrare significa ricondurre la validità di una proposizione a quella di un'altra enunciata precedentemente e non si può andare all'infinito in una regressione cosiffatta: bisogna pure incominciare con una proposizione (di fatto con più di una) e questa non può essere dimostrata, almeno nella teoria che stiamo costruendo.
In modo analogo si rinuncia a definire tutti i termini che si usano; non troviamo quindi all'inizio della trattazione delle frasi definitorie, e ciò perché ovviamente non si può tutto definire, ma occorre accettare di conoscere il significato di alcuni termini (di fatto molti) perché si possano definire tutti gli altri.

Per capire che cosa si intende descrivere, si confronti la prima frase degli *Elementi* di Euclide, con la prima frase dei *Gründlagen der Geometrie* di Hilbert. In Euclide noi troviamo la frase di cui abbiamo già parlato: « Il punto è ciò che non ha parte ». Nei *Gründlagen der Geometrie* troviamo la frase seguente: « Pensiamo a tre sistemi di cose: le cose del primo sistema le chiameremo punti, le cose del secondo sistema le chiameremo rette, le cose del terzo sistema le chiameremo piani ». Poi Hilbert prosegue dando degli 'assiomi' che collegano i termini che ha appena presentato senza definirli; tali frasi sono chiamate 'assiomi', ma senza la pretesa che esse enuncino delle verità incontestabili ed universalmente valide; semplicemente sono frasi che sono state scelte per essere messe all'inizio della trattazione.

Questa impostazione un po' sconcertante potrebbe far pensare che si lavora senza sapere di che cosa si parla. Si è quindi condotti irresistibilmente a ricordare la celebre frase di B. Russel, secondo la quale « la matematica è una scienza nella quale non si sa di che cosa si parla e non si sa se ciò che si dice è vero ».

Frase paradossale, fatta quindi per risvegliare l'attenzione e far colpo sul lettore, ma frase che descrive abbastanza bene ciò che abbiamo tentato fin qui di esporre; perché nella concezione moderna della geometria non esistono 'oggetti' concreti di cui parlare e quindi non si sa se ciò che diciamo è 'vero' (nel senso classico del termine), cioè se risponde allo 'stato di cose' di una certa realtà esteriore. Questa posizione può apparire sconcertante e addirittura paradossale a chi è abituato alla convinzione di poter definire con precisione le cose di cui si parla e, soprattutto, è abituato alla idea che la scienza debba procedere necessariamente in questo modo: definendo e deducendo. Ma, per quanto riguarda la definizione degli enti di cui si tratta, si può osservare che molto spesso ci si trova in circostanze analoghe: pensiamo, per fissare le idee, ad un gioco, per esempio al gioco degli scacchi. Evidentemente la natura dei pezzi su cui si opera non viene data dai nomi che si attribuiscono loro: la 'torre' non ha nulla in comune con la costruzione che ha lo stesso nome e che incontriamo nelle vie delle città.

Pertanto il pezzo 'torre' riceve la sua definizione dall'insieme delle regole con le quali conveniamo di giocare con quel pezzo e con tutti gli altri della scacchiera. Dunque la vera definizione del pezzo si avrà quando saranno state enunciate tutte le regole di gioco, perché il pezzo trova la sua specificazione nel modo di giocare. Le regole, nel loro insieme, forniscono quindi la definizione dei pezzi; si suol dire che si dà così la 'definizione implicita' dei pezzi, nel senso che i pezzi sono perfettamente conosciuti (almeno ai fini che ci interessano e che sono quelli del gioco), ma non si trova una frase del tipo: « La torre è... » e poi una definizione 'per genus et differentiam' secondo i canoni classici. La cosa è ancora più evidente nel caso del gioco delle carte; si ha qui, per esempio, che il re della « Briscola » non è il re della « Scopa », anche se ricevono lo stesso nome e vengono rappresentati dalla stessa carta. Il fatto è che le regole sono diverse e che quindi le figure di cui si parla sono diverse, proprio perché sono le regole e non i nomi e le figure che danno la vera definizione delle carte stesse.

Una cosa del tutto analoga si potrebbe ripetere della geometria e degli enti dei quali essa si occupa: non vi è scandalo per il fatto che la retta della geometria euclidea si comporta diversamente dalla retta della geometria non-euclidea. Per quanto abbiano le stesso nome, si tratta di enti diversi tra loro e ciò semplicemente perché sono diverse le 'regole di gioco', cioè gli assiomi che forniscono la definizione implicita delle figure.

Da questa posizione, che — ricordiamolo — è la sola che può considerarsi come compatibile con la esistenza di geometrie diverse ed apparentemente contraddittorie, ma che si dimostrano tutte valide, discendono tuttavia molti problemi che interessano il filosofo della scienza ed anche l'uomo comune.

Il primo di tali problemi si riattacca direttamente alla analogia che abbiamo data con i giochi degli scacchi e delle carte. Allora, se le cose stanno così —si dice —, che differenza c'è tra la geometria, che è sempre stata considerata come una scienza, e un gioco come quello degli scacchi e delle carte? Vale la pena di dedicare tanti sforzi alla geometria quando ha la stessa serietà di quelle occupazioni che gli uomini tradizionalmente considerano come 'poco serie'?

Si risponde che, pur avendo ora la geometria l'aspetto di un puro 'gioco' logico e, quindi, pur non essendo in linea di principio molto differente da un qualunque altro gioco, niente vieta che le proposizioni iniziali della teoria siano suggerite dalla osservazione che noi facciamo del mondo che ci circonda e che, pertanto, abbiano una certa validità per la conoscenza del mondo o meglio di certi aspetti del mondo: quelli che riguardano le cose materiali, in quanto concerne la loro forma e la loro mutua posizione. La cosa che interessa mettere in evidenza è che le proposizioni iniziali sono soltanto *suggerite*, non imposte dalla osservazione, e che pertanto la validità che noi contiamo di attribuire a queste proposizioni non è quella incontrovertibile degli assiomi della metafisica, secondo la concezione classica, ma quella delle osservazioni delle proprietà elementari dei corpi che sono prese dalla fisica.

In questo ordine di idee la geometria si presenta quindi, secondo l'espressione un po' paradossale, ma anche molto suggestiva, di qualcuno, come « il primo capitolo della fisica ».

Pertanto si deve prendere nei riguardi della geometria, considerata in questo contesto, l'atteggiamento che si ha nei riguardi delle teorie della fisica; non si può quindi parlare di 'verità' di una teoria, ma soltanto di 'adeguatezza' della teoria stessa: questa nasce dalle osservazioni che si fanno sulla realtà fisica, che sono sempre accompagnate da un certo margine di errore. In modo analogo si può asserire che l'ultima fase della costruzione della teoria, cioè quella della osservazione della coincidenza tra le deduzioni e la realtà, è pure affetta da errori. Pensiamo ad un esempio concreto, quale ci è offerto dalla applicazione della geometria alla descrizione della Terra; è noto che in prima approssimazione la figura teorica 'piano' è stata spesso assunta come adeguata per rappresentare la superficie su cui viviamo, tanto che è stato molto difficile convincere l'opinione comune del contrario, nonostante che i sapienti della Grecia antica fossero già vicini alla verità su questo punto. Sta di fatto che anche in questo argomento non vi è luogo a parlare di verità o falsità, ma soltanto di adeguatezza; infatti anche oggi, nonostante il fatto che noi siamo molto più scaltriti degli antichi, adottiamo per rappresentare una porzione abbastanza ristretta della superficie terrestre lo schema del piano; infatti rappresentiamo tali porzioni mediante 'carte topografiche', le quali certamente rappresentano ciò che vogliamo con un certo margine di errore, poiché è dimostrato che la superficie di una sfera non può essere 'rivestita' con una superficie distendibile su un piano, così come è effettivamente la superficie di un foglio di carta. Si vede, quindi, che in questo caso la geometria, pur avendo da una parte l'atteggiamento di un 'gioco' intellettuale, ha tuttavia anche il suo fondamento come scienza, e quindi una sua giustificazione di 'serietà', nonostante il paradossale atteggiamento che potrebbe essere preso da qualcuno. Possiamo dunque asserire che la geometria è una scienza. Abbiamo tuttavia qualche cosa da aggiungere a proposito della certezza di una tale scienza: se la consideriamo come un sistema ipotetico-deduttivo, la certezza delle proposizioni è fondata soltanto sulla correttezza della deduzione dalle proposizioni scelte per partire e per costruire la scelta; se invece si intende come una teoria che fa conoscere qualche cosa della 'realtà', quale che sia il significato di questa parola, occorre allora prendere il concetto di 'verità' con le precauzioni che abbiamo spiegato.

Vale la pena, del resto, di osservare che non soltanto nella matematica la scienza non osa fare affermazioni troppo rigide a proposito della realtà dei fatti: pensiamo, per esempio, alle sentenze delle Magistrature ecclesiastiche che spesso sono pronunciate con la frase cautelativa: « Si vera sunt exposita », come a dire che la sentenza è un procedimento logico di deduzione, che dal contenuto delle testimonianze e delle affermazioni delle parti deduce certe conseguenze; ma i giudici non si fanno in alcun modo garanti della rispondenza delle affermazioni e delle testimonianze alla realtà esistente; si limitano ad obbligare i testimoni a giurare, ma lasciano poi l'ultima istanza alla loro coscienza. Abbiamo quindi anche in questo caso un sistema ipotetico-deduttivo, che potrebbe suscitare molte perplessità, ma che risulta giustificato dalla importanza e dalla gravità delle conseguenze delle sentenze pronunciate. Nel caso, quindi, della geometria considerata come « primo capitolo della fisica », si pone un problema che è del tutto analogo a quello che nasce a proposito della 'verità' di una qualunque teoria della fisica.

Come abbiamo visto quando abbiamo parlato del procedimento tipico della scienza, l'osservazione che fa da punto di partenza di questo procedimento e quella che costituisce in certo modo il punto di arrivo, di verifica delle ipotesi e delle deduzioni, sono sempre viziate da errori di misura. Questo fatto non dipende dalla matematica, ma spesso le cose vanno in modo tale da portare ad una situazione che appare paradossale a chi è abituato a considerare la matematica come la scienza certa per definizione, e quindi a considerare anche le scienze che utilizzano il simbolismo della matematica come scienze certe. Tale 'scandalo' arriva fino ad una crisi, quando si presentano i casi in cui addirittura esistono più teorie, spesso incompatibili tra loro, che riguardano il medesimo insieme di fenomeni.

Effettivamente questo atteggiamento deriva dalla abitudine di considerare una teoria come vera oppure falsa in assoluto. Nella concezione della scienza che viene oggi adottata non vi è luogo a porsi domande di questo genere; come abbiamo già detto, vale la pena soltanto di parlare di teorie più o meno 'adeguate'. Con ciò si rinuncia a pretendere che una teoria scientifica possa darci *tutta* la verità, oppure a pretendere che un certo insieme di concetti sia valido per sempre.

L'atteggiamento contrario, che porta i profani a pretendere dalle scienze fisico-matematiche delle verità assolute e sempiterne, è stato tratto forse dalla concezione classica della geometria, nel senso euclideo. Infatti, si ragiona, anche se la geometria può accrescersi per apporto di nuove deduzioni e quindi di nuovi teoremi, di nuove 'proprietà' dedotte dai principi, questi rimangono tuttavia validi sempre e quindi i teoremi dedotti rimangono sempre veri. Ma, ripetiamo, questo atteggiamento non tiene conto del processo concreto secondo il quale la scienza si sviluppa.

Evidentemente la costanza e la validità sempiterna di certi principi va cercata, se mai, ad altro livello, che non sia quello della scienza in quanto tale; riprendendo un discorso sul quale ci siamo già soffermati, tale costanza va ricercata forse nei principi che inconsciamente e 'in actu exercito' lo scienziato adotta e senza i quali addirittura non incomincerebbe a fare scienza, cioè a cercare una certezza ed una spiegazione di ciò che osserva.

Ripetiamo anche che questa concezione della scienza è maturata nel tempo, anche in concomitanza con la crisi con la quale la matematica rivedeva la concezione di se stessa, crisi che ha costretto gli scienziati a precisare bene quale sia il carattere della matematica e quale, di conseguenza, il significato delle sue 'certezze'. Ma dedicheremo a questo argomento delle riflessioni specifiche, che appaiono necessarie per comprendere appieno il carattere della scienza e quindi della civilizzazione alla quale apparteniamo.

4. *I problemi logici generati dalla nuova concezione della matematica*

La nuova concezione della matematica ed in particolare della geometria, che seguiva la crisi provocata dalla dimostrazione della coerenza logica delle geometrie non-euclidee, poneva ulteriori e ben più gravi problemi alla matematica. Per farci una idea approssimata di queste questioni, sulle quali torneremo diffusamente in seguito, ricordiamo che — come abbiamo detto — nella concezione classica della geometria le proposizioni iniziali erano considerate come 'evidenti' e che il significato di questa evidenza era ovviamente quello della rispondenza dell'enunciato alla realtà effettiva del mondo che ci circonda. Tale evidenza era considerata talmente grande ed importante, che lo stesso Dante l'ha presa come paradigma della visione che i beati hanno dell'essenza delle cose, se dice a Cacciaguida:

> ...come veggion le terrene menti
> non capère in triangolo due ottusi
> così vedi le cose contingenti
> anzi che sieno in sé, mirando il punto
> a cui tutti li tempi son presenti...
>
> Par. XVII, 14 ss.

Ma, se le proposizioni iniziali sono staccate dalla realtà e dall'evidenza della osservazione immediata, e sono soltanto suggerite da questa in modo che si possa costruire una teoria abbastanza vicina alle apparenze, e, più ancora, se le proposizioni iniziali possono essere scelte in modo arbitrario come sono scelte le regole di un gioco, nasce il problema di garantire che le proposizioni stesse siano tali da formare un sistema logicamente coerente, siano cioè tali che non esista tra loro una contraddizione nascosta, che potrebbe non essere evidente di primo acchito, ma rivelarsi nel seguito con il proseguire delle deduzioni.
Come se volessimo inventare un gioco e stabilissimo delle regole tali che un bel giorno due giocatori potessero entrambi proclamarsi vincitori l'un contro l'altro, senza aver mai sbagliato a giocare.
Questa questione è veramente molto grave, perché può mettere in gioco la coerenza di tutto un sistema, oppure lasciare nel dubbio ogni costruzione teorica che abbiamo cercato di costruire. Infatti la coerenza logica delle deduzioni dai principi non garantisce affatto della coerenza dei principi.
Questo problema, che è nato — ripetiamo — con la nuova impostazione della geometria, e che ha dato origine a

tutta una serie di analisi e di studi di logica, può venire risolto soltanto in parte.
Provvisoriamente possiamo dire che la tecnica adottata inizialmente è la seguente: trovare un sistema di enti presi dalla realtà, o da una teoria di cui sia già certa la coerenza, che potessero 'riempire' le proposizioni, in guisa da fornire un modello della teoria astratta e garantire così la compatibilità delle proposizioni primitive. La stessa strada era stata seguita per dimostrare che le geometrie non euclidee erano delle costruzioni logiche consistenti e quindi prive di contraddizioni interne; la tecnica seguita era stata quella di trovare nella geometria euclidea stessa, supposta coerente e quindi priva di contraddizioni, dei modelli delle teorie in questione, di modo che si potesse dire delle geometrie non euclidee e di quella euclidea « simul stabunt aut simul cadent ».
Però queste ricerche introducevano in un mondo nuovo e davano origine fatalmente alla analisi dei meccanismi di formazione delle idee fondamentali della matematica e dei procedimenti di deduzione della mente umana. In altre parole, queste questioni sfociavano necessariamente nella analisi dei fondamenti della matematica e della logica. Diremo qualche cosa di queste ricerche in seguito.
Vorremmo ora proseguire il nostro discorso a proposito della scienza, per mettere in evidenza le conseguenze che la nuova concezione della matematica ha portato nella scienza e soprattutto nella scienza fisica, che è quella che più si serviva e si serve della matematica, dei suoi procedimenti e del suo linguaggio.

IV. LA EVOLUZIONE DELLA MATEMATICA

> La matematica pura non riguarda le grandezze: essa è semplicemente la dottrina che si occupa della simbolizzazione di certe operazioni mentali relativamente ordinate, che sono diventate meccaniche.
>
> Novalis, *Schriften*

1. *La evoluzione della matematica e la concezione nuova del suo dominio*

Nel capitolo precedente abbiamo parlato della evoluzione critica che la matematica ha avuto durante il secolo XIX ed abbiamo detto che, alla fine di tale evoluzione, la matematica ha cambiato il suo carattere assumendo pian piano la fisionomia che ha oggi: una scienza non più caratterizzata dai contenuti, ma piuttosto dalla sua struttura logica; scienza che interessa piuttosto che per le cose che dice, per il come le dice. In questo ordine di idee, quindi, la matematica si presenta come una specie di linguaggio, così come aveva predetto Galileo, dicendo che il gran libro della natura è scritto con caratteri matematici.

Abbiamo avuto anche occasione di rilevare la grande importanza che nella scienza è stata assunta non soltanto dalle idee, ma anche e soprattutto dai modi di esprimerle e dai simboli scelti per comunicarle; in altre parole, abbiamo visto che il fenomeno della espressione e della simbolizzazione, che appare a prima vista secondario per la conoscenza, ha invece una importanza fondamentale per lo sviluppo della scienza.

Si potrebbe concludere che c'è, quindi, una ragione che giustifica l'adozione del linguaggio matematico anche nelle altre scienze, e questa è data ovviamente dalla estrema chiarezza degli enunciati, dalla esistenza di regole di deduzione che sono ineccepibili e quindi possono garantire la certezza delle conseguenze, sia che queste debbano venire confrontate con la realtà, come quando si deve confermare qualche ipotesi, sia che esse debbano essere prese in se stesse.

Inoltre, proprio il diverso modo di concepire la matematica ha portato via via con maggiore chiarezza a pensare che il suo oggetto non è dato soltanto dai numeri o dagli enti che in qualche modo rientrano sotto la categoria delle 'quantità' della concezione classica.

La matematica oggi possiede delle strutture formali che possono dominare anche degli enti che non cadono direttamente sotto la categoria della 'quantità' intesa nel senso classico del termine: pensiamo, quindi, che anche le scienze dell'uomo, che fino a qualche tempo fa parevano assolutamente allergiche a trattamenti matematici e formali, possano oggi essere utilmente trattate con i nuovi strumenti della matematica; e questo a prescindere dalla presa che la statistica ha sui fenomeni umani, nei quali talvolta è il solo strumento per scoprire certe regolarità e, quindi, per fornire quella conoscenza scientifica che è possibile.

2. *Linguaggio comune e simbolismo matematico*

Ma l'influenza della matematica sulle altre scienze non si limita a fornire ad alcune di esse gli strumenti per esprimere le loro osservazioni e per dedurre dalle ipotesi le conseguenze da verificare con altre osservazioni o con altri esperimenti; essa va più lontano e giunge fino ad ispirare i procedimenti di lavoro e il modo di impostare le proprie sistemazioni e le proprie formulazioni.

Per convincerci di questo, ricordiamo che, come abbiamo visto poco fa, una delle caratteristiche della matematica, dopo la critica dei fondamenti che si è verificata nell'ultimo secolo, è quella di non lasciare nulla alla cosiddetta 'intuizione', di non accettare mai alcuna deduzione che venga fatta, per esempio, con frasi del tipo della seguente: « Ora è evidente che... ».

Infatti, la corretta tecnica di esposizione, che consente poi il rigore della deduzione, è quella che conduce ad enumerare, all'inizio della trattazione, tutte le proposizioni che non si intende dimostrare e di fare il censimento di tutti i termini di cui non si dà la definizione o di cui si dà soltanto la definizione implicita. Ciò consente di svolgere le deduzioni con il massimo rigore e, quindi, di giungere alle conseguenze evitando il più possibile i sofismi e i ragionamenti scorretti.

Questi, infatti, molto spesso nel corso della storia della matematica sono stati causati sostanzialmente da due circostanze: anzitutto aver accettato certe proposizioni come 'evidenti' nel corso della trattazione, senza far prima esattamente il loro elenco; in secondo luogo aver dato ai termini usati dei significati non sempre univoci.

Del resto, il fatto che la deduzione mediante il linguaggio comune e l'argomentazione abituale corra il pericolo di essere fallace è un fatto che è stato frequentemente osservato attraverso i secoli. Ci piace citare ancora una volta F. Galiani, il quale in un tratto polemico della sua opera già citata scrive: « Sono poi questi errori assai più facili ad intromettersi, quando la passione guida la mente, non a trovare il vero, ma a trovar ragioni da confermare quello che ci è piaciuto senza motivo alcuno profferire ». E altrove, confutando con calcoli certe argomentazioni di altri autori, scrive: « tanta differenza v'è tra l'affirmare all'ingrosso e l'esaminare su i numeri le cose ».

Non possiamo passare sotto silenzio il fatto che la ricerca di un simbolismo artificiale e di una specie di 'aritmetica dei concetti' è stato uno dei sogni inseguiti durante quasi tutta la vita da G. Leibnitz. Come è noto, egli preconizzava l'avvento di un'epoca nella quale non vi fossero più dispute interminabili su argomenti mal precisati, ma nella quale invece due dotti per stabilire chi avesse ragione potessero dire: « Calculemus », cioè affidiamoci al meccanismo per così dire automatico della deduzione che ci è fornito dalle leggi sintattiche dei simboli scelti.
Non è senza ragione il fenomeno che si è osservato a cavallo dei due secoli, il XIX e il XX: per l'analisi delle questioni fondamentali dell'aritmetica, vari studiosi indipendentemente l'uno dall'altro hanno fatto ricorso a quelle ideografie logiche che costituiscono oggi la cosiddetta 'logica matematica'. Ritorneremo in seguito su questo argomento. Ci limitiamo ora ad osservare che queste osservazioni gettano una nuova luce sulla evoluzione storica che ha fatto della matematica una scienza che usa soprattutto dei simboli artificiali, ognuno dei quali ha dunque un solo significato, quello che l'inventore gli ha attribuito convenzionalmente quando l'ha introdotto: pertanto chi usa questo simbolo non è sottoposto alla tentazione (alla quale invece soggiacciono molti altri che utilizzano parole del linguaggio comune) di cambiare poco alla volta il significato delle parole, anche involontariamente.
Del resto, a ben guardare, il fenomeno della costruzione di linguaggi artificiali si verifica anche nelle scienze diverse dalla matematica, scienze che vengono anzi considerate da essa lontane. Invero si potrebbe dire che sussiste un fenomeno del tutto generale: precisamente si ha il fatto che anche per quelle scienze che non utilizzano un simbolismo artificiale ad hoc, c'è la tendenza a costruire un vocabolario tecnico, il quale, anche se utilizza le parole

del linguaggio comune, cerca di circoscriverne il significato in modo da avvicinarsi all'ideale matematico, che ha un solo simbolo per una sola idea.
Si pensi, per esempio, alla medicina, che spesso conia delle parole nuove ed astruse, con radici prese dal greco e dal latino; oppure alle scienze giuridiche, che hanno un proprio vocabolario tecnico, formato da parole del linguaggio comune, ma precisate e usate sempre nello stesso senso e con lo stesso significato.
Questa tendenza verso una assoluta univocità rende giustizia al detto di un saggio che osservava che « la matematica non ha simboli per le idee confuse ».
È questa tendenza alla precisione e alla univocità che rende i matematici spesso pignoli nel modo di esprimersi: ma si tratta di una specie di deformazione professionale, che rende antipatica nel singolo quella che è una proprietà fondamentale della sua scienza. Questa tendenza al rigore e alla chiarezza porge spesso il fianco alla critica quando si voglia impiegare la matematica per studiare i fatti della società umana; si osserva infatti che i fatti umani (per esempio, quelli della economia o della psicologia) sono troppo complessi e ricchi di connotazioni perché si possa utilizzare un linguaggio così povero e scarno come quello della matematica. La risposta è quella che abbiamo già dato più volte: la univocità dei simboli è una delle garanzie perché si possa avere una deduzione rigorosa ed impeccabile e perché nello svolgimento di un ragionamento con parole non si sia trascinati a poco a poco a cambiare il significato del vocabolo che si utilizza, in modo da cadere nel difetto che la logica antica designava sotto il nome di sillogismo « vulpecula », cioè con quattro termini invece di tre.
Ma nulla vieta che gli assiomi di una teoria siano numerosi quanto lo richiede la complicazione dell'oggetto della

indagine: la richiesta dei matematici è che si fondi il ragionamento su quelli e soltanto su quelli e che, quindi, la discussione sia circoscritta non alla deduzione ma alla scelta degli assiomi della teoria. Che poi questi siano quasi sempre insufficienti a descrivere una certa parte della realtà, è una cosa che ogni scienza ha accettato.

Prima di lasciare l'argomento, ricordiamo che l'adozione del simbolismo ha anche un altro vantaggio, oltre a quello di rendere le deduzioni per così dire meccaniche: si ha il vantaggio della grande astrazione e, quindi, della massima generalità, perché si fissa l'attenzione non tanto sui contenuti quanto sulla forma del ragionamento; pertanto ogni realtà che cade sotto la struttura formale dei simboli può essere sottoposta alla stessa analisi. Per chiarire le idee pensiamo ad un esempio: nella realtà, nella fisica in particolare, si trovano moltissimi fenomeni che vengono chiamati 'periodici' oppure anche 'oscillatori': pensiamo alle oscillazioni del pendolo, che furono oggetto delle ricerche celebri di Galileo, oppure alle oscillazioni di un circuito elettrico, che rendono possibili le trasmissioni radio, oppure infine ai fenomeni ondulatori che, secondo la meccanica quantistica, si associano ad ogni fenomeno materiale.

Ma la matematica inquadra tutti questi fenomeni in un solo schema, che viene studiato a fondo e che vale per tutti questi e per gli altri che possono entrare nello stesso schema teorico. Ciò è possibile ovviamente per la simbolizzazione e per la conseguente generalità che si conferisce così allo studio.

3. *Il metodo assiomatico*

Ma ciò che fa della matematica una specie di modello ideale della scienza di oggi non è soltanto l'adozione di linguaggi e di simboli artificiali; anche la tecnica usata dalla matematica nella presentazione e nella analisi dei propri oggetti, sta diventando in certo modo esemplare.
Questa tecnica viene abitualmente descritta parlando di 'metodo assiomatico'; e qui con questa espressione non intendiamo la pretesa di far accettare agli altri, magari con la prepotenza, delle proposizioni che essi non vogliono accettare, ma semplicemente la ricerca delle proposizioni che (più o meno volontariamente, ripetiamo) vengono assunte senza dimostrazione, e la messa in evidenza delle proposizioni stesse. Per paradosso, si potrebbe dire che proprio queste proposizioni, chiamate 'assiomi' della teoria, sono quelle sulle quali ha senso aprire una discussione, perché sono proprio queste le proposizioni che differenziano una teoria dall'altra. Come abbiamo già detto, sarebbe inutile scandalizzarsi del differente comportamento delle 'rette' della geometria euclidea da quelle della geometria non-euclidea, quando ci si rende conto che si tratta di concetti diversi, proprio perché diversi sono gli assiomi che ne dànno la definizione implicita.
Pertanto si può dire che la tendenza tipica della matematica ai suoi procedimenti caratteristici — la formazione di simboli artificiali, la utilizzazione delle leggi proprie di questi simboli per la deduzione — costituisce una delle garanzie di rigore e di generalità dei risultati delle deduzioni e, quindi, una specie di esempio caratteristico anche per le altre scienze, che si ispirano a questi procedimenti, anche se non sempre possono adottarli in pieno.

4. *Le idee di F. Klein e la relatività ristretta*

La teoria della relatività di Einstein, che tanto scalpore ha suscitato all'epoca della sua presentazione (poco prima della prima guerra mondiale), costituisce un esempio tipico della influenza sulla fisica e sulla concezione della natura del metodo matematico che viene fornito dalle scienze di oggi.
Al di là delle interpretazioni filosofiche e delle conseguenze spesso strampalate, che venivano tirate partendo soltanto dal nome della teoria da chi non era assolutamente in grado di capire di che cosa stava parlando, si potrebbe dire che questa teoria manifesta le caratteristiche dell'influenza della matematica sulle scienze della natura, ad un grado tale da sconvolgere il quadro che veniva fatto dei fenomeni, quadro fino allora basato sulla immaginazione oltre che sulla ragione.
Per comprendere almeno in parte di che cosa si tratta, vogliamo ricordare che nel 1872 il matematico tedesco Felix Klein, in una sua celebre dissertazione, avanzò una classificazione delle varie dottrine geometriche esistenti fino ad allora, collegando ognuna di tali dottrine con certe strutture dell'algebra che vengono chiamate 'gruppi' (qui il vocabolo tecnico non ha nulla a che vedere con il significato comune della parola).
Per avere una idea approssimativa delle idee di Klein osserviamo che, anche nelle concezioni abituali della geometria, questa scienza si occupa di oggetti che vengono chiamati 'astratti'; e ciò non soltanto perché si prescinde dalla loro realizzazione materiale mediante disegni oppure modelli, ma anche perché si prescinde dalla loro posizione nello spazio (usiamo qui il vocabolo nel significato comune, anche se non sarebbe difficile precisarlo).
Per esempio, se il geometra studia 'il cerchio', si interessa

in quanto geometra non delle proprietà di *questo* cerchio, ma di tutti gli altri che si possono ottenere da questo mediante certe trasformazioni (è un termine tecnico), che si possono immaginare realizzate trasportando la figura da un posto ad un altro, oppure anche alterando il suo raggio, purché il cerchio — per così dire — resti un cerchio. Orbene, tutte queste trasformazioni che mutano una figura in un'altra, che per il geometra risulta essere equivalente, in quanto dà luogo alle stesse proposizioni che ne enunciano le proprietà, vengono caratterizzate attraverso le proprietà formali di certi simboli che appunto rappresentano le trasformazioni. Se si cambiano tali trasformazioni, si cambia anche l'insieme delle proprietà che vengono studiate dalla geometria e quindi si cambia la geometria, nel senso di Klein. Per esempio, se invece di pensare soltanto al trasporto rigido della figura si pensa anche alla proiezione (per esempio, si pensa anche alla possibilità di associare ad una figura la sua ombra), si entra in un gruppo più ampio, che dà luogo alla cosiddetta geometria proiettiva, che studia delle proprietà più 'generali' di quelle studiate dalla geometria abituale. Si potrebbe così continuare e si potrebbe anche dire, in altre parole, che mediante questi ragionamenti la matematica ha enunciato l'equivalente del procedimento di astrazione, nel senso che è arrivata a precisare in certo modo l'*essenza* degli oggetti studiati dalla geometria, essenza che rimane la stessa nelle circostanze variabili sotto le quali si presenta la figura singola. Difatti, la concezione di Klein parla proprio della determinazione di 'invarianti' delle figure, cioè di quelle proprietà per così dire 'vere', che sono le sole che interessano il geometra. Del resto la circostanza della ricerca di 'invarianti' delle figure si era già presentata in occasione della adozione delle convenzioni della geometria analitica.

Come abbiamo già visto, si potrebbe dire che questa costituisce un insieme di convenzioni che permettono di associare ad ogni elemento geometrico (per esempio, un punto) un insieme di elementi presi dall'algebra o dalla analisi matematica (come quando, per esempio, ad un punto sulla superficie terrestre si associa una coppia di coordinate), e di associare ad ogni relazione geometrica una relazione tra gli enti che rappresentano gli elementi geometrici. Così un 'fatto' geometrico viene trasformato in un 'fatto' algebrico o analitico; un problema geometrico viene trasformato in un problema algebrico oppure analitico.

Orbene, si può osservare che in questo atteggiamento si ha che necessariamente ad ogni elemento geometrico deve essere associato un elemento algebrico o anche più di uno; ma questi elementi che rappresentano le 'cose' della geometria sono convenzionali e quindi possono cambiare in seguito ad una scelta diversa degli elementi convenzionali, che sono alla base della convenzione. Per esempio, si pensi alla superficie terrestre: ogni punto di essa viene rappresentano mediante due numeri, longitudine e latitudine. Ma questi due numeri dipendono essenzialmente dagli elementi convenzionali che sono stati scelti con un accordo comune, senza che fossero imposti dalla natura delle cose: per esempio, il meridiano zero è stato scelto come quello passante per Greenwich con una convenzione internazionale; così l'equatore è stato scelto per la latitudine zero; si sarebbe, per esempio, potuto scegliere uno dei poli... In definitiva, ciò significa che la coppia di numeri che si dànno per rappresentare un punto quale si voglia della terra può cambiare se si cambiano gli elementi convenzionali di riferimento; ovvero, se si vuole, tali numeri non sono una *proprietà geometrica* del punto stesso.

Tuttavia accade che, se si prendono in considerazione due punti della superficie terrestre, la loro distanza è espressa da una formula, la quale dà sempre lo stesso valore anche se si cambiano le coordinate dei punti. Pertanto si potrebbe dire che tale distanza rappresenta una proprietà geometrica della coppia di punti, perché rappresenta un 'invariante' della coppia di fronte a tutti i cambiamenti di 'apparenze' che si possono verificare con il cambiamento dei riferimenti.

Orbene la situazione che viene così schematizzata dalla geometria fu trasportata da Einstein anche nella fisica, mediante certi postulati che traducono la sua concezione della struttura dell'universo.

Per comprendere questa concezione osserviamo anzitutto che — come abbiamo detto ripetutamente — le osservazioni che l'uomo fa sulla natura, nel nuovo atteggiamento della fisica, si traducono in numeri, mediante misure di lunghezze e di tempi.

Pertanto un 'evento', il quale abbia luogo in un determinato punto dello spazio e in un determinato istante, può essere rappresentato mediante tre numeri che danno le sue coordinate spaziali ed un quarto che ne stabilisce la sua coordinata temporale e che può essere determinato mediante un strumento: l'orologio. Quindi si può dire che un evento può essere determinato mediante quattro numeri: nulla vieta che, quindi, estendendo una nomenclatura tolta a prestito dalla geometria, si parli di un evento come di un 'punto d'universo', pensando quest'ultimo come uno 'spazio' geometrico a quattro dimensioni. Questo modo di parlare utilizza semplicemente un vocabolario ed una mentalità, ma non significa affatto che 'il tempo viene ricondotto allo spazio', oppure altre cose del genere che furono dette e scritte al momento in cui la relatività venne presentata e si cercò di spiegarla e magari di volgarizzarla. Infatti, anche abitualmente si misura il tempo attraverso l'angolo di rotazione della terra attorno al suo asse; oppure si legge che gli antichi monaci misuravano il tempo delle loro veglie notturne attraverso la lunghezza delle candele consumate. Ma nessuno pensa che noi riduciamo 'il tempo ad un angolo', oppure che i monaci lo 'riducessero' alla 'lunghezza' di una candela.

Va detto tuttavia che le idee del Klein a proposito della determinazione delle 'vere' proprietà geometriche delle figure hanno influenzato (in modo cosciente oppure no, non sappiamo determinare) le formulazioni teoriche di Einstein e soprattutto hanno fornito un linguaggio comodo per esprimere le sue idee.

Tuttavia nelle formulazioni di Einstein troviamo anche delle altre idee, che riguardano la conoscenza che la fisica può darci del mondo e dei suoi fenomeni, idee su cui vale la pena di soffermarci un poco, perché rappresentano dei capisaldi per la mentalità scientifica moderna.

Prima, però, di cercare di esporre queste idee, ricordiamo brevemente che la visione scientifica del mondo di Einstein è stata formulata in varie teorie (sostanzialmente tre): la prima viene chiamata della 'relatività ristretta', la seconda della 'relatività generale'. Infine egli espose una teoria che mirava allo scopo di dare una spiegazione unitaria dei fenomeni della gravitazione della elettricità.

Occupiamoci per il momento della cosiddetta 'relatività ristretta', che — come si è detto — è la prima delle teorie apparsa, in ordine cronologico, ed anche quella che ha suscitato il più grande scalpore con la apparente rivoluzionarietà delle sue concezioni.

Le ipotesi sulle quali si basa questa teoria sono due. Secondo la prima, non esiste un osservatore privilegiato, ovvero anche un osservatore da chiamarsi 'assoluto', che possa per così dire fare da testo per le osservazioni dei fenomeni del mondo della fisica.

Questa prima ipotesi costituiva già di per sé una concezione rivoluzionaria, perché contraddiceva a tutte le rappresentazioni che la nostra immaginazione si faceva del rapporto spaziale dei corpi celesti. Infatti nella concezione classica c'era l'abitudine di immaginare 'lo spazio' come un 'qualche cosa', una specie di 'grande vuoto', del quale però avesse un senso immaginare le parti come determinate in modo assoluto.
Anche lo scrittore del « Discorso preliminare » della *Enciclopedia,* più volte citato, parla dei « ... corpi come parti figurate (?) dello spazio ». Anche la meccanica razionale pensava di poter dare un 'riferimento assoluto', tale che avesse senso parlare di un corpo che fosse in stato di moto oppure di quiete rispetto ad esso.
Si sarà notato che abbiamo sempre parlato di 'immaginazione' nelle proposizioni precedenti. Infatti la tesi della esistenza di uno spazio cosiffatto, è favorita dalla immaginazione, che ci presenta le cose come se andassero press'a poco così: se muoviamo un corpo dal suo posto, questo non viene più occupato dal corpo stesso, ma ha senso tuttavia parlare del posto prima occupato, quasi che il corpo vi avesse lasciato una specie di traccia. Questa è la rappresentazione che noi traiamo dalla nostra esperienza più banale, per esempio quella che facciamo spostando i mobili di una stanza. Tuttavia non vi è nessuna esperienza reale che ci costringa a trasferire all'universo intero l'immagine che la nostra fantasia trae da una esperienza limitata. Pertanto la concezione di Einstein, anche se urta in un primo tempo la nostra immaginazione, non è affatto contraria alla ragione, cioè non contraddice ad alcuna esperienza concreta o ad una conseguenza tratta da essa con il ragionamento (e non ad una rappresentazione semplicemente immaginata).
Ciò non toglie che la prima ipotesi di Einstein abbia por-

tato lo sconquasso in certe concezioni che la gente si faceva della geometria e dei suoi oggetti. Essa porta tra l'altro come conseguenza che ciascun osservatore ha il pieno diritto di rappresentare ogni avvenimento mediante tre coordinate spaziali ed una temporale che sono riferite al riferimento e all'orologio che più gli conviene; pertanto ogni osservatore dà la sua immagine del mondo. Siamo qui nella posizione che abbiamo spiegato nei riguardi della geometria analitica: le coordinate di un ente della geometria sono necessarie per rappresentare l'ente stesso, ma sono anche in certa misura arbitrarie, perché dipendono dalle convenzioni di scelta del riferimento geometrico; esse quindi possono variare con il variare del riferimento. Ma la cosa più importante non è che esse abbiano determinati valori, ma la possibilità di riuscire a costruire con esse delle funzioni che sono invarianti e che, pertanto, danno così le 'vere' proprietà geometriche, per così dire obbiettive, delle figure che si rappresentano.
Per ricorrere ad un paragone letterario, che tuttavia ci pare avere una certa efficacia, avviene delle coordinate, nel campo della geometria, ciò che avviene di una lingua, nel campo della trasmissione dei pensieri: che ci sia una lingua è una cosa naturale, ma la nascita di una lingua piuttosto che di un'altra dipende da circostanze che sono in certo modo non sostanziali. Come aveva già detto Dante:

> Opera naturale è ch'uom favella,
> ma cosí o cosí, natura lascia
> poi fare a voi, secondo che v'abbella.
>
> Par. XXVI 130 ss.

La seconda ipotesi che Einstein ha enunciato si rifà ad una concezione metodologica della scienza in generale e della

fisica in particolare, sulla quale vale la pena di spendere qualche parola, in vista dell'importanza che ha avuto e che ha ancora nella scienza di oggi.
Secondo tale concezione si ha il diritto di definire un ente fisico solo se si dà la tecnica sperimentale precisa con la quale tale ente viene messo in evidenza.
Anche in questo caso si tratta quindi di una specie di vittoria della ragione sulla immaginazione; pensiamo infatti che non basta che la nostra immaginazione trovi necessario immaginare certi enti spaziali o temporali perché la ragione dimostri la necessità della loro esistenza. Infatti la nostra immaginazione trae le sue figurazioni da certe esperienze molto limitate e, quindi, non può imporre le sue esigenze come esigenze di una visione razionale del mondo; questa infatti, in linea di principio, può essere limitata soltanto da fatti sperimentali oppure da contraddizioni logiche.

La seconda ipotesi che Einstein enunciò è la seguente: i segnali luminosi si trasmettono con velocità finita e che è uguale per ogni osservatore, in assenza di materia.
Tra le conseguenze di questa ipotesi vi è anche una concezione della contemporaneità degli avvenimenti che risultava ostica alla maggior parte della gente che la sentiva enunciare la prima volta, ma che era perfettamente in linea con la concezione della fisica che si andava elaborando nelle idee degli scienziati e che era fondata sulla esigenza della 'definizione operativa' degli enti della fisica.
In piena coerenza con questa concezione, infatti, poiché la contemporaneità di due avvenimenti che sono distanti tra loro può essere verificata fisicamente in modo concreto soltanto con la recezione di due segnali luminosi che partono dai due luoghi nei quali gli avvenimenti si pro-

ducono, e poiché l'osservatore che li giudica contemporanei ha il solo modo di giudicare che si basa sulla contemporaneità della recezione dei segnali, nulla di strano che due osservatori diversi giudichino contemporanei oppure no due avvenimenti a seconda del loro stato di moto relativo.

Da queste due ipotesi si traggono varie conseguenze, che potrebbero sembrare paradossali, ma che sono perfettamente in linea con le ipotesi stesse e non sono in alcun modo assurde, se si guarda al solo loro significato concreto, senza lasciarsi prendere dalla immaginazione. Tra le conseguenze ricordiamo la cosiddetta contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi, fino ad arrivare al famoso paradosso dei gemelli.

Dalle ipotesi enunciate da Einstein si traggono pure anche altre conseguenze che riguardano l'immagine del mondo che era data dalla meccanica classica e che viene cambiata, perché si ammette l'esistenza di una velocità massima, oltre la quale non si può avere moto fisicamente dotato di senso.

La cosa che più ha impressionato i contemporanei, ed ancora oggi mette a disagio i non competenti, è la utilizzazione del linguaggio geometrico, che induce a credere ad una confusione tra il tempo e lo spazio. Effettivamente si potrebbe dire che questa utilizzazione viene suggerita dalla trattazione mediante coordinate e dal linguaggio geometrico a disposizione della scienza contemporanea.

È comodo, in altre parole, parlare del 'cronotopo' come se fosse uno spazio a quattro dimensioni e di 'geometria del cronotopo' e soprattutto ricercare quelle che sono le proprietà 'invarianti' nel senso che abbiamo spiegato e che risale alla impostazione di Klein, come proprietà geometriche di questo spazio. In particolare si parla di 'distanza cronotopica' tra due avvenimenti, per indicare tuttavia una certa quantità che viene dedotta mediante una serie di misure che sono fisiche, e precisamente tanto spaziali che temporali.

5. *Le interpretazioni filosofiche della relatività*

La teoria della relatività ristretta ha dato luogo ad una serie di discussioni interminabili, che riguardavano il cosiddetto 'significato filosofico' della teoria stessa. A questo proposito vale la pena di fare qualche osservazione, per smitizzare le conseguenze che si crede di poter trarre dalla forma verbale degli enunciati e che sono allarmanti soltanto per chi accetti implicitamente una immagine del mondo che non è fondata sulla deduzione rigorosa, ma anche sulla immaginazione non giustificata fino in fondo. Anzitutto, per quanto riguarda il nome, si potrebbe dire che questo è stato scelto male (anche se dall'autore della teoria) e che fa pensare ad una mancanza di certezza delle conoscenze umane e, quindi, al crollo di una certa concezione scientifica basata sulla ragione e sui dati immediati dei sensi; si sono addirittura tratte delle deduzioni di questo modo di pensare che riguardano la morale e la vita sociale; conclusioni pittoresche, anche se non autorizzate. Effettivamente, della relatività ciò che non è più garantito è il valore delle singole misure rispetto ad ogni osservatore: un regolo che risulta misurato da tot se la misura è eseguita da un osservatore, può essere misurato da un numero diverso se la misura è eseguita da un altro osservatore in moto rispetto al primo. Ognuno dei due ha diritto di descrivere la realtà con il proprio sistema di riferimento e, quindi, di prender nota delle sue misure, e non esiste una misura che sia 'falsa' ed una che sia 'vera'; ma ciò significa soltanto che questo modo di rappresentare le cose è coerente con i postulati della teoria: non significa per nulla che non esista 'la verità'. Si ha soltanto che la verità (ove si voglia dare questo nome al risultato di certe misure) non è attribuibile alle misure singole, ma a certe funzioni di esse, che vengono calcolate a partire dalle misure e che hanno un valore invariante e quindi obbiettivo, valido quale che sia l'osservatore che eseguisce la misura. Succede cioè un poco come avviene per la superficie terrestre: come abbiamo già osservato, nessuno si chiede che la longitudine e la latitudine di un posto siano 'assolutamente vere', nel senso che tutti si rendono ben conto del fatto che, cambiando meridiano e parallelo di riferimento, tali numeri possono cambiare, e nessuno si scandalizza di questo fatto. La cosa che risulta invariante è la distanza tra due punti della superficie terrestre, anche quando cambiano le coordinate che li rappresentano.

Pertanto, invece che teoria della relatività questa si potrebbe chiamare teoria della ricerca dei veri valori assoluti, che semplicemente sono situati ad un livello più profondo rispetto a quello a cui li situava l'immaginazione. Ma le discussioni che hanno più appassionato l'opinione di coloro che hanno discusso sulla relatività generale sono quelle che hanno avuto come oggetto il 'nuovo' concetto di contemporaneità di due eventi. Il fatto che questa relazione potesse non avere un significato 'assoluto' ha sgomentato molti, i quali immaginano che abbia senso immaginare un osservatore per così dire 'assoluto', il quale può avere la sensazione della contemporaneità di due eventi; questo osservatore viene spesso immaginato dotato delle proprietà di un puro spirito. A questo proposito si parla spesso anche di una relazione di contemporaneità 'assoluta', che dovrebbe poter avere senso rispetto a Dio. È stata addirittura avanzata una specie di teoria della 'doppia verità': una prima che potrebbe riguardare il concetto di contemporaneità assoluta, e che avrebbe un senso rispetto all'intelletto divino; una seconda verità che riguarda la definizione operativa dei concetti della fisica, e che dovrebbe essere valida soltanto per la scienza.

A nostro parere questa interpretazione non è accettabile. Noi pensiamo infatti che il fisico deve adottare quel concetto che si presta a rendere razionalmente le sue osservazioni e non quello che gli è suggerito dalla immaginazione; questa volta la definizione operativa di un ente della fisica è proprio garanzia che si costruisce sulla realtà e non su qualche immagine di essa che noi ci siamo formati. Altrimenti sarebbe come accettare per la materia una nozione di continuità e di inesistenza di 'vuoti', che ci è suggerita dalla visione della superficie dello specchio; nella realtà sappiamo che la impressione che abbiamo dal nostro occhio è dovuta soltanto al fatto che questo ha una sensibilità che è limitata ad una certa gamma di onde e che sarebbe ingiusto cercare di dare un significato assoluto a questa osservazione e alla elaborazione fantastica di essa (che ci porta, per esempio, al concetto di piano continuo della geometria classica), per lasciar cadere i risultati di osservazioni che ampliano di molto le nostre conoscenze.

Nella logica della scienza che abbiamo cercato di presentare, la validità degli schemi teorici, che in sé non hanno niente di contraddittorio, è legata strettamente soltanto alla verifica sperimentale dei risultati e delle deduzioni rigorose che si traggono dalle ipotesi.

Orbene, le deduzioni che si traggono dalle ipotesi che sono state ammesse conducono anzitutto a dare una immagine della fisica classica che non si discosta molto da quella che era data prima della teoria della relatività. Infatti le leggi della meccanica classica risultano delle ottime approssimazioni delle leggi date dalla relatività, per velocità che sono lontane da quelle della luce, cioè per le velocità alle quali si possono eseguire degli esperimenti su corpi materiali (anche piccoli). Invece la teoria rende ragione dei fenomeni molto meglio della meccanica classica, quando ci si trovi ad esperimentare su elementi (particelle od altri enti della fisica) con velocità molto vicine a quella della luce. Ne consegue pertanto che, per esempio, la materia può essere convertita in energia, con le conseguenze che tutti conosciamo relative allo scatenamento di energie grandissime, con distruzione della materia. Si potrebbe, quindi, concludere che le conferme sperimentali della teoria della relatività sono ormai tali e tante che non è più possibile dubitare che essa sia più adeguata per la conoscenza della natura fisica di quanto non fosse la concezione classica della fisica, del tempo e dello spazio. Il fatto che questa teoria rompa le concezioni classiche non significa molto, se si pensa che tali concezioni sono spesso fondate su una immagine fantastica della realtà materiale, immagine che è accettabile tuttavia solo fino a quando le evidenze sperimentali non costringono ad abbandonarla. Il che significa non un attacco contro la logica, ma bensì un omaggio alla logica e alla coerenza razionale, di fronte alle pretese della immaginazione.

Analoghe considerazioni si potrebbero ripetere per quanto riguarda le crisi provocate dalla constatazione della natura granulare della energia (con l'invenzione dei cosiddetti 'quanti' da parte del Plank) e con la scoperta del parallelismo tra la natura corpuscolare e ondulatoria della materia.

Quest'ultima questione può essere considerata come un episodio della famosa 'crisi delle teorie modellistiche', che portò la fisica dell'inizio del secolo alla sua concezione di oggi. Infatti si era pensato che l'atomo fosse formato come una specie di piccolo sistema solare in miniatura, con il nucleo pesante al posto del sole e gli elettroni (pensati come 'leggeri') che ruotavano attorno ad esso, come i pianeti ruotano attorno al sole. Per quanto ingegnoso questo modello, ed atto a stimolare la fantasia, tuttavia occorre confessare che esso risulta dato da una extrapolazione fantastica dell'esperienza comune, a scala umana, che non è tuttavia autorizzata dalle risultanze sperimentali.

Con questo non si vuole giudicare in senso negativo i modelli atomici classici, di cui abbiamo parlato poco fa; questi modelli sono frutto di un procedimento razionale che porta alla formulazione di ipotesi sulla costituzione della materia, nelle quali ipotesi ovviamente entra l'immaginazione. Tuttavia le difficoltà nascono spesso dal fatto che si vuole dare a queste immagini un valore superiore a quello che esse hanno effettivamente, e precisamente — nella fattispecie — si vuole dare un valore assoluto all'immagine che noi ci facciamo dalle esperimentazioni alla nostra scala; come nel caso dello specchio di cui abbiamo parlato poco fa, niente autorizza ad estendere la validità delle esperienze che noi facciamo, e che dipendono spesso soltanto dalla gamma delle nostre possibilità sensoriali, ad ogni scala, supraumana e sottoumana.

Se anche un atteggiamento di questo genere ci costringe a rivedere continuamente i nostri schemi, occorre dire — lo ripetiamo — che questo è un omaggio e non un attacco alla logica.

Abbiamo detto che l'ultima istanza per giudicare sulla adeguatezza di una teoria è data dall'osservazione che giudica sui risultati e sull'avvicinamento delle conseguenze alla realtà. In questo caso si potrebbe dire che la teoria della relatività ristretta serve oggi a descrivere e a spiegare moltissimi fenomeni che si svolgono ad altissime velocità, oppure è servita a prevedere i fenomeni di sprigionamento di altissime energie con scomparsa di materia. Pertanto si potrebbe dire che tale teoria è più adeguata delle precedenti.

Ripetiamo ancora una volta che nella valutazione di una teoria il fisico ha una sensazione precisa della sua provvisorietà; nel senso che non pretende di enunciare delle verità metafisiche, le quali sono destinate a durare fino alla fine dei tempi.

Questa visione, come abbiamo detto, era suggerita dalla mentalità della geometria di Euclide e dalla argomentazione che la teoria si poteva estendere per numero di risultati e deduzioni, ma non poteva cambiare per riguardo ai principi. Orbene, queste circostanze, che forse si presentano nella metafisica, non sussistono tuttavia per la fisica, perché le ipotesi dalle quali essa parte non hanno la dignità di principi assoluti. Il fatto che si trovano espressioni quali lo 'spazio' oppure il 'tempo', non ha molta importanza, perché ciò di cui si parla effettivamente non sono gli enti che si crede di designare con questo nome, ma semplicemente si tratta ogni volta di enti estesi oppure di enti che durano nel tempo, e si tratta di descrivere con i mezzi della matematica le loro proprietà.

6. *La geometria secondo B. Riemann e la relatività generale*

Abbiamo detto che Einstein dopo la teoria della relatività ristretta ha enunciato ed elaborato anche una seconda teoria, quella detta della 'relatività generale'.

In questa teoria Einstein cerca di spiegare i fenomeni della gravitazione servendosi sempre di uno schema geometrico, anche se non è vero, come si dice spesso erroneamente, che egli vuole tutto geometrizzare. Ciò di cui si tratta è — come abbiamo detto ripetutamente — una circostanza di cui abbiamo rilevato l'importanza: ogni osservatore descrive il mondo fisico che egli osserva mediante certe coordinate spaziali e temporali. Il cambiamento di osservatore porta le stesse conseguenze che nella geometria vengono portate dal cambiamento del sistema di riferimento: i singoli fenomeni possono essere rappresentati da diverse coordinate e, quindi, in particolare, fenomeni che avvengono in punti lontani possono apparire contemporanei a qualcuno e non contemporanei a qualche altro osservatore. Ma la cosa che interessa determinare è la realtà obbiettiva che sta al di sotto di tutte queste apparenze cambianti; tale realtà obbiettiva, nella mentalità del fisico, è la forma matematica delle equazioni che si scrivono per descrivere i fenomeni e per dedurre le conseguenze delle osservazioni. Nel caso della relatività generale il mondo, ai fini dello studio dei fenomeni gravitazionali, viene descritto come uno spazio geometrico 'curvo'. Questo aggettivo ha provocato nei tempi passati una massa enorme di commenti e di deduzioni, fatte da chi ben poco capiva del significato tecnico dei termini usati. Per avere un'idea, quindi, di ciò che la teoria vuole dire, dobbiamo fare qualche cenno sulla concezione che il grande matematico tedesco B. Riemann aveva della geometria e del modo con cui questa dottrina potrebbe essere costruita.

Pensiamo ad un oggetto materiale, il quale riproduca abbastanza bene materialmente l'idea della superficie geometrica (o meglio di una parte limitata di essa): pensiamo per esempio, ad un foglio di carta. Immaginiamo poi di far prendere a questo foglio di carta una forma diversa da quella piana; si suol dire che il foglio viene incurvato. Per esempio, tale foglio può essere utilizzato per rivestire la superficie laterale di un cilindro. Ma la cosa che ci interessa qui — e che può essere dimostrata con mezzi, però, non elementari — è che non si può 'rivestire' con questo foglio una superficie sferica, cioè non si può far coincidere ogni punto del foglio con un punto della superficie sferica in modo che non ci siano piegature oppure lacerazioni.

Pertanto nell'accezione comune del termine appare indubitabile che tanto la superficie (laterale) del cilindro quanto la superficie della sfera sono 'curve'; tuttavia la differenza tra loro sta nel fatto che mentre la superficie laterale del cilindro può essere 'spiegata' sul piano senza duplicazioni e lacerazioni, quella della sfera non può essere sottoposta ad un trattamento analogo con analoghi risultati.

Lo studio di queste proprietà delle superfici era già stato iniziato da C.F. Gauss (del quale abbiamo parlato a proposito della geometria non-euclidea). Ma la direzione nella quale si mosse B. Riemann per le sue ricerche su questo e su analoghi argomenti riflette il suo modo di concepire la geometria e i suoi fondamenti. Per dare una sbiadita idea di ciò che vorremmo esporre, ricordiamo quello che abbiamo detto a proposito dell'approssimazione e della descrizione di una regione limitata della superficie terrestre mediante una carta topografica.

Per quanto riguarda la superficie sferica e anche un'altra superficie qualunque, si potrebbe dire che Riemann distingue tra rappresentare una superficie 'in piccolo', cioè in una piccola regione, attorno ad un suo punto, da quella che è la sua rappresentazione 'in grande', cioè nella sua globalità. Per quanto riguarda la sua rappresentazione 'in piccolo', si potrebbe dire che valgono le formule della geometria euclidea, e i suoi procedimenti fondamentali con esclusione dell'assioma della parallela. Questo infatti è un enunciato che riguarda la struttura globale della superficie piana: esso potrebbe essere enunciato dicendo che due rette, le quali formano con una trasversale angoli coniugati interni che non sono supplementari, devono comunque incontrarsi anche molto lontano dal campo di osservazione attuale.

Ora Riemann distingue questa proprietà dalle altre; si potrebbe dire che egli 'costruisce' per così dire la superficie prendendo tanti 'pezzettini piani' e poi collegandoli tra loro in modo determinato. Ciò che dà la proprietà della superficie è il modo di 'collegamento' dei singoli pezzettini ('faccette' vengono spesso chiamati), di modo che, se torniamo all'esempio della superficie del cilindro e di quella della sfera, nell'immediata vicinanza di due punti esse sono uguali, nel senso che possono essere rappresentate su un foglio di carta; ma nel caso del cilindro le faccette vengono collegate tra loro in modo da permettere alla superficie tutta intera di adagiarsi su un piano (senza duplicazioni né lacerazioni), mentre nel caso della sfera il collegamento è tale che questo adagiarsi diventa impossibile.

Rimane tuttavia una osservazione da fare: se consideriamo una linea tracciata sulla superficie, immaginata per semplicità realizzata con il foglio di carta di cui si diceva, la lunghezza della linea risulta invariante rispetto alle manipolazioni alle quali il foglio di carta viene sottoposto; quindi ha senso parlare, tanto sul piano che sulla superficie laterale del cilindro che sulla sfera, di linee che collegano due punti e che hanno la minima lunghezza possibile. Questa nozione risulta essere una 'proprietà geometrica' della linea stessa e non dipende dalle coordinate che vengono scelte per rappresentare la superficie.

Queste linee che collegano due punti di una superficie ed hanno la minima lunghezza possibile vengono chiamate 'geodetiche' della superficie stessa. Esse non dipendono

dalle coordinate convenzionali, che abbiamo scelto per rappresentare i punti della superficie stessa.
Per fare un esempio del tutto elementare, ricordiamo che sulla superficie della terra noi adoperiamo delle coordinate geografiche (come abbiamo detto ripetutamente); la linea di minima lunghezza che congiunge due punti (per esempio, Roma e New York) è ovviamente indipendente dalle coordinate che scegliamo e, quindi, sarebbe sempre la stessa anche se cambiassimo il meridiano che è l'origine delle longitudini e cambiassimo il parallelo che assumiamo come origine delle latitudini.
Questo modo di impostare le cose ha dato origine a una visione della geometria, che in certo senso prescinde dalla validità dell'assioma euclideo della parallela, perché ammette vari modi di 'collegare' le faccette e, quindi, ammette la possibilità di una struttura globale dello spazio diversa da quella data dalla legge di collegamento che porta alla geometria euclidea, cioè ammette anche leggi di collegamento diverse che danno degli spazi 'curvi', allo stesso modo in cui la superficie della sfera è curva talmente che non può mai essere adagiata sul piano.
Inutile dire che queste intuizioni, che abbiamo cercato di presentare in modo del tutto elementare e con immagini inadeguate, trovano la loro espressione con gli strumenti dell'analisi matematica e quindi un impianto del tutto rigoroso.
Orbene, la impostazione di Einstein della relatività generale si avvale appunto di questi concetti e di questa mentalità per dare una spiegazione matematica del fenomeno della gravitazione, cioè della attrazione di due masse materiali.
Si parte sempre dalla constatazione del fatto che ogni osservatore ha diritto di descrivere mediante le proprie coordinate l'universo; che, quindi, esistono in linea di prin-

cipio infinite possibili maniere di rappresentare i fenomeni che ci interessano, ma che stiamo cercando le 'vere' proprietà, cioè quelle che rimangono invariate sotto il fluire delle apparenze, cioè sotto le infinite possibili rappresentazioni; ogni fenomeno osservato in un determinato istante di tempo dà luogo, quindi, ad un punto di universo spazio-temporale.

Esistono certe proprietà che sono 'invarianti' della rappresentazione dell'universo e in particolare le leggi di movimento spazio-temporale, che sono rappresentate convenzionalmente dalle linee di minima lunghezza in questo spazio astratto; tali linee vengono chiamate tecnicamente 'geodetiche' di questo spazio-tempo. La presenza di materia nel mondo fa sì che la struttura geometrica di questo spazio a quattro dimensioni acquista le proprietà che ha la superficie sferica di fronte alle superficie piana o di tutte quelle che possono essere adagiate sul piano. Ma la nozione di geodetica rimane sempre valida e, quindi, la legge che si scrive imponendo che una certa linea spazio-temporale è una geodetica ha un significato obbiettivo, fisico: è una legge della natura.

Ancora una volta rileviamo che questo modo di esprimersi non vuole assolutamente dire, come è stato detto più volte affrettatamente, che non vi è più distinzione tra il tempo e lo spazio e che viene 'inventata' una quarta dimensione della quale non si ha alcuna esperienza e che, pertanto, queste teorie sono del tutto confutate dal buon senso: si ha semplicemente l'adozione di un certo schema matematico e l'adozione di un certo linguaggio comodo, al quale matematici e fisici sono particolarmente abituati. L'ultima istanza per determinare l'adeguatezza di una teoria come questa sta evidentemente nel responso della realtà sperimentale; e, per esempio, nel caso della relatività generale si ha la spiegazione di un fenomeno astronomico che era noto da tempo, cioè la rotazione del perielio del pianeta Mercurio.

È questo un argomento sul quale vale la pena di soffermarci, perché ci dà l'occasione di ribadire ancora una volta la concezione che sta alla base della scienza moderna: abbiamo detto infatti che le leggi di Keplero sono valide soltanto come schemi, ma non sono valide 'in assoluto'; cioè non è affatto vero che i pianeti percorrano con assoluta precisione delle ellissi di cui il sole è uno dei fuochi. Si potrebbe dire che « lo schema geometrico astratto dato dalla curva 'ellisse' rende abbastanza bene il moto dei pianeti, entro certi limiti di errori di osservazione ». Quindi non vi sono curve descritte dai pianeti in uno spazio che è concepito come vuoto, ma sede di un riferimento assoluto rispetto al quale abbia senso descrivere ogni fenomeno. Inoltre le leggi di moto sarebbero assolutamente valide se il sole e il pianeta che si considera fossero punti e non corpi estesi, e soli in tutto lo spazio; nella realtà dei fatti l'esistenza delle masse estese e degli altri pianeti 'perturba' (come suol dirsi) il moto di ciascuno di essi; e qui si ha ancora una volta la posizione tipica della impostazione matematica della fisica, cioè la considerazione di una specie di 'fenomeno principale', che è quello che viene descritto dalle leggi astratte, perturbato da certi elementi, che però non influiscono sulla essenza delle cose, almeno fino al momento in cui la perturbazione diventa talmente importante che obbliga a cambiare lo schema teorico.

Come è noto, nel caso dello spostamento secolare del perielio del pianeta Mercurio, la teoria classica della gravitazione elaborata dagli scienziati a partire dalla legge di Newton non arriva a rendere ragione di tutto lo spostamento, mentre le equazioni date da Einstein arrivano a spiegare tutta la perturbazione; paradossalmente questa circostanza ha in certo modo preoccupato gli scienziati, perché una teoria 'troppo precisa' fa sospettare che ci sia qualche errore o qualche coincidenza fortunata che trae in inganno. Abbiamo riportato questa opinione, perché crediamo che questo atteggiamento presenti abbastanza bene la maniera di spiegazione del mondo che è propria della scienza di oggi.

Per dovere di precisione e di completezza dobbiamo riportare che Einstein durante l'ultima parte della sua vita cercò di elaborare una cosiddetta 'teoria unitaria', la quale rendesse ragione anche dei fenomeni elettrici, come la teoria della relatività generale rendeva ragione dei fenomeni della gravitazione e nello spirito di questa 'spiegazione': cioè nello spirito secondo il quale la presenza di materia modifica la 'geometria' dello spazio quadridimensionale in cui vengono rappresentati i 'punti di universo', in modo tuttavia che le leggi della fisica abbiano sempre una enunciazione 'invariante' rispetto a ogni cambiamento di osservatore.

Dobbiamo anche dire che su questa strada le ricerche sono state portate avanti anche da altri studiosi. Le teorie unitarie che ne sono scaturite hanno attirato poca attenzione, forse perché i fisici stavano cercando nella direzione diversa, cioè nella cosiddetta 'fisica delle alte energie', che dopo i clamorosi risultati di cui il mondo recente è stato testimone promette di portare più vicino alla conoscenza dei segreti della materia.

Pensiamo tuttavia che il brevissimo excursus dia ragione della impostazione della fisica moderna: impostazione secondo la quale la matematica assume una importanza crescente, soprattutto come strumento di deduzione. Inoltre la scienza acquista una coscienza sempre maggiore del fatto che le sue costruzioni sono in certa misura provvisorie e che gli enti dei quali essa parla sono delle costruzioni ideali che non pretendono di avere un significato metafisico, se non nella misura nella quale i modelli permettono una conoscenza mediata, nel senso che permettono di conoscere il comportamento della materia e, quindi, di dominarla, prevedendo i risultati delle manipolazioni che si fanno su di essa.