



Comitato di redazione

Ernesto Milano  
Paola Di Pietro  
Francesco Barbieri  
Germano Dondi  
Umberto Torelli

ISSN 1124-2493

---

*Direttore responsabile:* Prof. Francesco Barbieri  
Autorizz. Trib. di Modena n. 347 del 15-10-1958.  
Iscrizione al Registro Nazionale della Stampa n. 5737  
Composizione a cura della Segreteria dell'Accademia

Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti di Modena  
(fondata nel 1683)

---

**ATTI E MEMORIE**

**MEMORIE**  
**SCIENTIFICHE, GIURIDICHE, LETTERARIE**  
**SERIE VIII - VOL. XV - Fasc. II, 2012**



**Modena 2012**

Finito di stampare nel mese di gennaio 2013  
presso OFG (MO)



Mario Marchi

CARLO FELICE MANARA:  
LA TESTIMONIANZA DI UN AMICO

ABSTRACT

The figure of Carlo Felice Manara, eminent and illustrious scientist, and a man of great culture, emerges with great clarity from his scientific notes and numerous writings, divulged at the service of culture and for the bettering of the spiritual side of human nature. The profile of this scholar is outlined here in the testimony of a friend (who was firstly one of his students and then later a collaborator), offering key contributions to the reading of some of the themes of study and reflection developed in his writings, which were invariably profound, well documented and original.

1. *Il profilo dell'uomo, scienziato specialistico e personalità di cultura, umanista aperto e problematico.*

Il prof. Carlo Felice Manara è stato mio Maestro.

Ho avuto il privilegio di lavorare con Lui dal tempo della mia tesi di laurea, di cui è stato Relatore, fino ad ora, fino ad essere con Lui socio di questa Accademia, di cui mi onoro di fare parte.

Ringrazio quindi l'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Modena, per aver voluto ricordare e onorare il prof. Carlo Felice Manara, già Socio Ordinario e poi Emerito dell'Accademia, eminente Scienziato, uomo di vastissima cultura e di profonda sensibilità intellettuale e umana.

Con la presente testimonianza non ho alcuna pretesa di offrire una analisi né tanto meno una sintesi del suo pensiero. Non sarebbe possibile data la vastità dei temi di cui Egli si è interessato e la quantità dei contributi che Egli ha lasciato. Altri colleghi e amici potranno offrire opportuni e specifici approfondimenti, secondo diverse angolature di pensiero da cui si può guardare la vivissima personalità di Manara e il

M. Marchi

vasto mondo dei suoi studi e delle sue ricerche.

Io tenterò solo di essere testimone (spero fedele) di alcuni preziosi stimoli da Lui ricevuti in tanti anni di conoscenza e di lavoro comune.

### 1.1. *Lo scienziato, studioso di matematica, di geometria*

Carlo Felice Manara è mancato all'affetto dei suoi cari, dei suoi allievi, dei suoi amici il 4 maggio dello scorso anno 2011. Era nato a Novara il 31 marzo 1916 e, dopo il liceo classico, si era iscritto presso l'Università degli Studi di Milano, al corso di Laurea in Scienze Matematiche, allora appena istituito. Laureato nel 1939 sotto la guida di Oscar Chisini, era entrato a far parte della grande Scuola di Geometria italiana, di cui Federigo Enriques, maestro di Chisini, è stato eminente esponente. Con Chisini, Manara ha formato e sviluppato la sua figura di scienziato e di studioso, profondo e brillante. Libero docente dal 1949, fu poi Professore, prima incaricato e poi ordinario, presso diverse Università. Fu infatti Professore Ordinario (di Geometria) dal 1951 al 1991 nelle Università di Modena, Pavia e Milano, dove nel 1991 gli è stato conferito il titolo di Professore Emerito. In questo lungo periodo di servizio accademico Manara si è anche assunto numerosi incarichi di responsabilità istituzionali oltre che scientifiche, responsabilità alle quali non si è mai sottratto. È stato più volte Preside di Facoltà, membro dei Comitati Ordinatori di nuove sedi universitarie appena fondate, membro di Comitati Scientifici nazionali e internazionali. Numerosi e di alto prestigio sono stati anche i riconoscimenti ricevuti dal mondo della Scuola e della Cultura.

Il campo della ricerca scientifica in cui Manara ha esordito è stato dunque quello della *Geometria algebrica di Scuola italiana* cioè, per dirlo con Guido Castelnuovo, della Geometria algebrica trattata con l'ausilio dell'immagine geometrica. Tale metodo di ricerca, se affrontato con il dovuto rigore, conduce a risultati non solo rigorosi ma anche riposti e difficilmente attingibili per altra via. Si deve infatti riconoscere che in numerosi ed elegantissimi lavori Carlo Felice Manara ottiene, in questo campo, risultati significativi e profondi.

Oltre a quelli accennati, gli interessi di Manara sono stati poi attratti anche da altri rami della matematica, sia pura che applicata. Significativi e ben noti sono infatti alcuni suoi risultati in fatto di Geometria differenziale locale e globale, ma forse di ancora maggiore importanza sono state le sue ricerche di matematica applicate allo studio delle realtà sociali. In questo

ultimo campo infatti il nome di Manara è ben conosciuto come quello di un cultore, profondo e acutissimo della modellizzazione matematica di fatti economici in termini quantitativi astratti.

Tuttavia i maggiori meriti intellettuali di riflessione scientifica che vanno riconosciuti a Manara nel campo matematico, sono forse quelli che si riferiscono al ramo di questa scienza comunemente indicato, quasi con indebita ironia, con il termine di “Matematica elementare”. Si tratta, in questo ambito, di problemi riguardanti i Fondamenti della Matematica e i legami concettuali che sorgono tra certe questioni di matematica, che non richiedono profonde conoscenze pregresse, e i loro riscontri nelle matematiche superiori. Qui la profonda cultura, l’acutezza di ingegno e il senso estetico di Carlo Felice Manara attingono i loro più profondi e meritati risultati.

### *1.2. Il servizio della cultura per la formazione e la crescita della persona*

La figura di Carlo Felice Manara, umanista aperto e problematico, appare vivissima dai suoi numerosi scritti, profondi, documentati e originali, profusi al servizio della cultura senza aggettivi, in nome della persona spirituale e dei suoi diritti e doveri. Tali scritti sono indirizzati a insegnanti e studiosi che sono interessati ad approfondire le radici delle proprie conoscenze e a chiarire le ragioni e la affidabilità delle proprie certezze. L’inquadramento storico, sempre puntuale e pertinente, ravviva e rende quasi avvincente l’esposizione di numerosi concetti impegnativi e spesso riposti.

Il carattere fondativo delle ricerche condotte da Manara nel campo della conoscenza scientifica, e in particolare della geometria, ha portato il suo pensiero anche sul versante della filosofia, con particolare attenzione ai testi di S. Tommaso e di Blaise Pascal. È in vista di questo impegno intellettuale che, nel 1986, l’Università Cattolica ha conferito a Carlo Felice Manara la “Laurea honoris causa” di Dottore in Filosofia.

Anche la Scuola, in tutti i suoi livelli e le sue specializzazioni, dalla scuola primaria alla università, dai corsi di formazione professionale ai problemi di insegnamento che sorgono operando con allievi in difficoltà, anche la Scuola dicevamo, costituisce un ambito di riflessione e di attivo impegno operativo personale al quale Manara ha dedicato grandi energie e impegno di tempo. È questo un tema che merita una specifica attenzione e documentazione.

La figura di Carlo Felice Manara qui tratteggiata è dunque quella di uno Studioso che è stato testimone di un sapere e di un impegno di ricerca della verità scientifica, sempre inseriti in un progetto di crescita culturale e umana della persona. È la figura di un Maestro a cui, in molti, siamo debitori in termini di conoscenza e consapevolezza scientifica, anche al di là delle più severe tecniche di rappresentazione formale e di manipolazione simbolica.

## *2. Lo Studioso, appassionato testimone della geometria, della matematica, della scienza.*

### *2.1. Il senso della geometria.*

«La geometria è l'arte di fare ragionamenti giusti sulle figure sbagliate»

Questo aforisma ironico e paradossale che io, giovane assistente, ho imparato dal mio Maestro Carlo Felice Manara (e che lui a sua volta aveva forse sentito enunciare dal suo Maestro, Oscar Chisini) descrive, a mio parere in modo suggestivo ed estremamente preciso, oserei dire quasi “in modo plastico”, l'essenza della natura del pensiero geometrico nei suoi risvolti didattici e anche euristici.

A commento di questa provocante affermazione si potrebbe dire che i “ragionamenti giusti” sono il prodotto naturale, forse anche doveroso, della costruzione concettuale della disciplina; le “figure”, invece, sono la traccia, il prodotto lasciato nella nostra mente, nella nostra immaginazione, dai dati sensoriali e sperimentali che ci provengono dalla realtà empirica in cui la nostra vita è immersa. I ragionamenti sono giusti perchè logicamente corretti e fondati su presupposti adeguati, ma le figure sono sempre necessariamente, almeno in parte “sbagliate” perchè sono una realizzazione fisica, sperimentale, di un concetto astratto e immateriale. Si possono dire “sbagliate” perchè sono inevitabilmente un caso concreto particolare di una idea generale che le produce. Inoltre queste presentano sempre i limiti comuni a tutti i dati sperimentali e alle realizzazioni materiali concrete dei concetti astratti. Infine esse possono anche essere oggettivamente “sbagliate” perchè non tengono conto di tutte le ipotesi concernenti il problema che intendono illustrare, oppure ne offrono una modellizzazione realizzata in un ambiente grafico che risulta però inadeguato. A tale proposito si pensi al caso delle rappresentazioni grafiche di geometrie non euclidee in un ambiente materiale



(per esempio il foglio di disegno) che per sua natura fisica è intrinsecamente euclideo. Tuttavia, anche se sbagliate, le figure sono utili perché la concettualizzazione geometrica si realizza attraverso una sintesi di due componenti ineludibili: una figurale e una razionale. Ritorniamo su questa tematica analizzando la particolare natura dei concetti geometrici.

Parlare di geometria introduce in modo naturale ai temi di pensiero che sono cari a Carlo Felice Manara: le procedure conoscitive della nostra mente e la formazione del pensiero scientifico, la creatività intellettuale, la ricerca della verità, il valore di conoscenza posseduto dalla matematica, la natura della matematica stessa.

Nei *Programmi d'Insegnamento della Scuola media* del 1979 la geometria è definita, con espressione suggestiva ma forse anche un poco ambigua: *prima rappresentazione del mondo fisico*.

Possiamo invero rilevare che la geometria offre una prima schematizzazione astratta dei corpi che ci circondano, con riguardo alle loro proprietà di forma, di dimensioni, di mutui rapporti di posizione. La geometria risulta in sostanza una delle prime conoscenze umane che vengono razionalizzate e portate a livello scientifico. D'altra parte non vi sono dubbi che le prime e più elementari nozioni geometriche, possiamo dire gli elementi costitutivi della geometria stessa (come sono per esempio i punti, le rette, i piani), trovano le loro radici nella osservazione del mondo fisico in cui la nostra vita è immersa. Questi fatti ci sono confermati dalla Storia (pensiamo alle radici dell'opera *Elementi* di Euclide) come pure da attente osservazioni materiali, quali ad esempio quelle svolte da Federigo Enriques riguardanti la "genesì psicologica dei concetti geometrici", osservazioni e analisi, queste, riportate in più parti negli scritti di Manara (cfr. per es. [12]). D'altra parte l'attenzione ai concetti, alle nozioni, alle immagini che vengono suggeriti dalla analisi delle esperienze fisiche, è considerata, anche teoricamente, come un criterio irrinunciabile per la scelta delle proposizioni primitive della geometria stessa. La conferma di questo fatto ci viene anche ad esempio dagli scritti di Autori come Giuseppe Peano, che è tra gli studiosi più cari a Manara (cfr. per es. [26], [28]).

Queste osservazioni spiegano facilmente le ragioni per le quali la geometria, nella sua concezione classica fino al XIX secolo, sia stata ritenuta una scienza dedicata a contenuti materiali suoi propri e sia stata indicata con espressioni suggestive ma ambigue del tipo *la geometria scienza delle figure* oppure, peggio, *scienza dello spazio*.

È ben noto che si deve all'analisi critica successiva alla scoperta (o invenzione, se si preferisce) delle geometrie non-euclidee l'aver messo in crisi questa visione a-critica e ingenua della disciplina geometrica. È pure noto che questa analisi critica si è poi estesa a tutto l'ambito della disciplina matematica, dando luogo alla cosiddetta "crisi dei Fondamenti" da cui ha preso l'avvio la costruzione dell'attuale aspetto della matematica nel nostro tempo.

## 2.2. *La formazione del pensiero matematico.*

Carlo Felice Manara ha analizzato, approfondito e descritto l'evoluzione del pensiero matematico attraverso numerosissimi scritti individuando, distinguendo e sottolineando anche, il contributo specifico dato da diversi studiosi alla edificazione della nostra disciplina (cfr. per es. [15], [16], [23], [29]).

È in questa opera di riflessione e sistemazione critica che Manara illustra quelle che nel suo giudizio sono le tre fasi caratteristiche della *costruzione di una teoria scientifica*, teoria di cui, ovviamente, la dottrina geometrica è un caso particolare (cfr. per es. [6], [10]). In questa maniera Manara descrive in modo originale, semplice, incisivo e suggestivo le tappe di un processo per altro già analizzato da numerosi studiosi (da Kant a Fischbein, solo per fare due nomi estremi) e da diversi punti di vista. La sua analisi risulta particolarmente preziosa per i risvolti operativi presentati, che si rivelano utili nel programmare appropriate strategie didattiche nella pratica dell'insegnamento, oltre che per sviluppare una più approfondita valutazione epistemologica dei processi cognitivi della scienza.

La prima fase di questo approccio alle modalità del conoscere consiste nella presa di coscienza dei dati dell'esperienza, nella *percezione della realtà sensibile*. Questo è l'ineludibile punto di inizio di ogni attività conoscitiva e quindi lo è anche della costruzione di ogni sistema concettuale che non voglia risultare arbitrario. La seconda fase consiste nella *elaborazione fantastica* che la nostra mente opera della immagine fornita dai sensi. Tale elaborazione consiste essenzialmente in una opera di *astrazione* e successivamente di *generalizzazione*. L'operazione di astrazione viene compiuta dalla fantasia con un lavoro di estrapolazione e di eliminazione, di oblio e di identificazione, che conduce ad individuare gli oggetti dei quali poi parleranno le proposizioni iniziali (assiomi, postulati) nonché i teoremi della geometria propriamente detta. Le leggi di comportamento e di reciproca relazione di tali oggetti ven-

gono poi individuate ed enunciate generalizzando le leggi stesse che sono state osservate sperimentalmente qui ed ora, ipotizzando cioè che tali leggi continuino a valere senza limitazioni di tempo e di spazio. Il prodotto di tale elaborazione fantastica costituisce il materiale sul quale l'intelletto opera la propria *costruzione concettuale*. Questa costituisce la terza fase, che si realizza nella concezione delle idee e nella loro espressione verbale o simbolica (cfr. [11]).

Nel caso della geometria queste procedure portano alla costruzione di una disciplina che ha oggi assunto l'aspetto di una teoria astratta la quale ha meritato il nome di "*sistema ipotetico-deduttivo*".

Manara in numerosi scritti descrive e analizza l'evoluzione del pensiero che, partendo dalla concezione classica della geometria, ha portato questa scienza al suo aspetto attuale. In questo assetto essa si presenta infatti come un *sistema logico fondato su un complesso di assiomi* che ne costituiscono le basi razionali convenzionali.

Questa riflessione di carattere generale merita di essere approfondita su alcuni punti specifici.

La scelta dei diversi sistemi di assiomi che è stata effettuata da parte degli Studiosi è analizzata da Manara nelle sue radici psicologiche, nelle sue motivazioni teoriche e nelle implicazioni disciplinari. In particolare tra i diversi studiosi una specifica attenzione è stata riservata al confronto tra le opere di David Hilbert e Giuseppe Peano (cfr. per es. [17], [21]), a ragione del carattere spiccatamente fondativo del primo e la preoccupazione di aderenza all'esperienza concreta dei sensi che il secondo presenta.

Analizzando la fase della concettualizzazione Manara ha dedicato particolare attenzione al momento della *simbolizzazione*. È questo uno dei passaggi caratteristici nella costruzione del pensiero matematico. La rappresentazione, in un primo momento, e poi la identificazione degli oggetti matematici con i simboli che li rappresentano, è l'aspetto caratteristico e qualificante della matematica, aspetto che la rende radicalmente diversa da tutte le altre scienze. Inoltre ciò che caratterizza i simboli matematici rispetto a tutti i diversi formalismi delle altre scienze consiste nel fatto che i primi posseggono e includono in sé le loro stesse leggi di comportamento, le loro regole di composizione. Questo fatto comporta per la matematica quella natura di *linguaggio* che le è propria, e fa sì che i procedimenti algebrici di calcolo sui simboli si presentino come vere e proprie leggi di deduzione, assumendo cioè la dignità che si riconosce ai ragionamenti (cfr. [28]).

Va rilevato inoltre come la matematica che inizialmente, storicamen-

te o nella nostra esperienza conoscitiva, si presentava quale scienza dotata di contenuti propri, nella sua evoluzione storica o concettuale appare alla fine come un *sistema simbolico astratto*. A questo punto si deve però osservare che in un sistema concettuale la natura di “contenuto” che un dato elemento mentale può assumere, e quella di “ente astratto” indistinguibile dal simbolo che lo rappresenta, non sono attributi ontologicamente definiti e univocamente individuati ma dipendono essenzialmente dal ruolo che l’elemento mentale stesso ricopre nel sistema concettuale in esame. Accade quindi che gli stessi oggetti matematici, gli stessi enti di cui si occupa la conoscenza di questa disciplina, possono svolgere un ruolo di concettualizzazione astratta relativo a esperienze materiali pregresse o a concetti in precedenza acquisiti (di cui la mente o l’ambito di studio in cui si opera si è con sicurezza appropriato) oppure possono essere il risultato concreto di un processo mentale svolto secondo le tappe in precedenza illustrate. Per questa ragione Manara, con profondo e geniale intuito psicologico ed epistemologico, ha potuto definire e caratterizzare la matematica come *disciplina in evoluzione continua da scienza di contenuti a scienza di strutture*.

Questa chiave di lettura del processo evolutivo del sapere matematico si rivela particolarmente preziosa e illuminante ogni qualvolta si deve contestualizzare e analizzare singoli capitoli o argomenti specifici della nostra teoria.

Troviamo qui anche un altro possibile criterio interpretativo che ispira significati suggestivi alle parole dell’*aforisma* con il quale abbiamo iniziato le presenti considerazioni. I “ragionamenti giusti” costituiscono, come si è già osservato, lo sviluppo razionale proprio della geometria e sono ottenuti attraverso la deduzione logica che si fonda sulle proposizioni assunte come iniziali. Le “figure sbagliate” sono i suggerimenti empirici e grossolani che provengono dalle intuizioni grafiche e dalle suggestioni di una evidenza intuitiva su cui non è garantito il completo controllo critico. Sono “sbagliate” perché costituiscono sempre una rozza approssimazione dei concetti in gioco, ma sono altresì ineludibili perché strumenti che sollecitano creatività e fantasia. Entrambe le componenti costituiscono dunque gli elementi non sopprimibili del pensiero geometrico.

### 2.3. *Geometria e logica. Analisi della concettualizzazione geometrica e delle procedure di intuizione e rigore; valore educativo dell’insegnamento della geometria*

Un altro ambito nel quale Carlo Felice Manara ha svolto ampie e approfondite riflessioni è stato quello relativo ai legami esistenti tra *geometria e logica* (cfr. per es. [14], [17], [31], [34]).

Le riflessioni da Lui condotte riguardano, in primo luogo la rilevanza logica dei criteri con i quali vengono stabiliti gli assiomi della teoria geometrica, in secondo luogo la prevalenza delle conclusioni che possono essere ottenute mediante la deduzione razionale rispetto a quelle risultanti dalla esperienza, anzi da ogni esperienza eseguibile. Infine, ma di non minore importanza, Manara ha analizzato la rilevanza dello studio della geometria come esercizio della logica, utile per gli studenti (di ogni età!) che debbono essere iniziati ed educati alla ricerca e al ragionamento.

Non possiamo ovviamente tentare in questa sede una sintesi di tutto il pensiero di Manara riguardante tale problematica. Vorrei solo accennare a due temi di riflessione che Egli ha particolarmente sviluppato.

Il primo riguarda l'analisi del binomio *intuizione-rigore* che, in antitesi come anche in sintesi, rappresenta un filo conduttore all'interno della geometria, sia sul versante della riflessione epistemologica relativa al momento euristico e fondazionale, sia su quello della conferma argomentativa conclusiva.

Il secondo tema sposta la nostra attenzione sul versante didattico e riguarda il *complesso dei valori*, non solo intellettuali ma anche umani e culturali, che possono essere collegati alla educazione geometrica (cfr. per es. [20], [22]).

Per quanto riguarda il primo dei temi indicati sappiamo che quando si parla di intuizione e di rigore nell'ambito delle procedure mentali che costituiscono la riflessione e l'indagine legati alla geometria, ci si riferisce a certe modalità di ragionamento e di elaborazione intellettuale che prendono l'avvio da due componenti, antitetiche ma inscindibili, costituenti la concettualizzazione degli oggetti argomento della disciplina geometrica. Tali componenti fanno riferimento da una parte alla struttura razionale della teoria, logicamente costruita con modalità ipotetico-deduttive, dall'altra si riferiscono al patrimonio di immagini e di suggestioni figurali e sensoriali che sono alla base delle idee astratte formanti la struttura razionale di cui si è parlato e che di tali idee hanno costituito lo stimolo e la motivazione. Questi fatti sono ben noti e sono stati esplicitamente studiati e approfonditi anche recentemente nell'ambito della riflessione psicologica riguardante i processi cognitivi e dell'apprendimento. Da alcuni studiosi (si veda per esempio E. Fischbein) è stata anche coniata una denominazione specifica che fa riferimento sintetica-

mente alla dinamica a cui abbiamo accennato: si parla di *concetti figurali* per indicare questa complessa struttura che i concetti geometrici presentano.

In una analisi, forse un poco grossolana ma certo illuminante, possiamo allora denominare con il termine *intuizione* il complesso delle procedure mentali formato da quelle attività della nostra mente che hanno origine e motore nelle componenti figurali dei concetti geometrici. Il loro criterio di conferma è la *verosimiglianza* e la *plausibilità*: parliamo anche di *evidenza*.

Usiamo invece il termine *rigore* per indicare le procedure argomentative che con lo strumento della deduzione razionale percorrono l'intera struttura logica della teoria geometrica a partire dalle sue proposizioni primitive iniziali. È chiaro che questa attività mentale fa riferimento alla componente razionalmente costituita degli stessi concetti figurali che stiamo ora considerando.

Questa analisi, ancorchè elementare e svolta su basi e con strumenti che si vorrebbe poter chiamare intuitivi (si perdoni l'apparente tautologia: il linguaggio di cui disponiamo è più povero del complesso delle idee che si vorrebbero descrivere!) ha risvolti estremamente importanti e fecondi sia sul piano epistemologico, per lo sviluppo di una teoria della conoscenza, sia sul piano educativo e didattico, in vista della elaborazione di strategie di insegnamento efficienti ed efficaci.

Ancora una volta dobbiamo osservare che non è qui il luogo in cui possiamo ulteriormente sviluppare queste considerazioni. Dobbiamo invece rilevare che Carlo Felice Manara ha affrontato molte volte tutta la problematica collegata alle riflessioni a cui abbiamo ora accennato, approfondendola con acute indagini, anche se l'ha espressa a volte con una terminologia un poco differente da quella qui usata. Prezioso in particolare è l'inquadramento psicologico e storico da lui offerto esaminando l'opera e il pensiero di numerosi Studiosi di primo piano che nella loro attività di indagine, di ricerca o di riflessione metodologica, hanno privilegiato l'una o l'altra delle procedure, da una parte di intuizione oppure di rigore, di cui abbiamo discusso (cfr. per es. [29], [30]).

Non vi sono dubbi che la personalità scientifica di Giuseppe Peano è stata, a questo proposito, una delle più apprezzate da Carlo Felice Manara forse per la sua costante ricerca della semplicità, della concretezza e ovviamente del rigore (cfr. [28]). In particolare, di Peano Carlo Felice Manara ricorda la incisiva definizione di *rigore*: «esso consiste nel dire soltanto cose vere» e, vorrei qui aggiungere anche per non inutile completezza: «e nel non dire cose che si sa non essere vere; non sta nel dire tutte le verità possibili».

Di grande interesse risulta anche il confronto svolto da Manara relativamente alle posizioni assunte da Federigo Enriques e David Hilbert riguardo quella stessa procedura argomentativa che si è indicata come “rigore” (cfr. [19]). Ciò che a Manara preme sottolineare è che anche nel pensiero di questi sommi matematici l’idea di rigore non è mai contrapposta a quella di creativa libertà di pensiero che sola è premessa e garanzia di una effettiva crescita intellettuale dei concetti e delle idee. Anche se con diverse accentuazioni, l’esigenza del rigore è naturalmente sempre presente nel pensiero dei due Studiosi ed esercita il suo ruolo nel momento dello svolgersi delle argomentazioni e della conferma dei risultati raggiunti. Aggiungiamo inoltre che si possono ora forse comprendere, da questo punto di vista, le possibili radici psicologiche, oltre che intellettuali, di quella “Geometria algebrica di scuola italiana” nel cui filone si muove (come abbiamo in precedenza accennato) l’opera scientifica e di ricerca della Scuola di Enriques, di cui Chisini prima, e quindi di conseguenza Manara, hanno fatto parte. In tale posizione di grande acutezza di giudizio e profondo equilibrio ci sembra infatti di poter riconoscere il felice realizzarsi della sintesi tra le due componenti, figurale e razionale, che concorrono a costituire la concettualizzazione geometrica secondo il modello già in precedenza illustrato.

Parlando della contrapposizione dialettica tra componente figurale e concettualizzazione razionale, che abbiamo riconosciuto presente nel pensiero geometrico, non si può non ricordare, tra l’altro, la nota polemica che ha contrapposto Giuseppe Peano, Corrado Segre e Giuseppe Veronese per quanto riguarda la formulazione di diverse proposizioni fondazionali e in particolare per le differenti modalità di introduzione della nozione di iperspazio, o spazio a  $n$ -dimensioni. Anche su questo argomento Manara interviene ripetutamente in diversi scritti, oltre che con una specifica Nota dedicata, fornendo come d’abitudine un ampio quadro di riferimento storico e acute analisi e valutazioni delle opinioni e del pensiero espresso dai tre rinomati matematici (cfr. [5]).

Un’altra personalità scientifica di primo ordine (anche se forse ingiustamente meno nota) che Manara ama ricordare è quella di Gerolamo Saccheri. Questo acutissimo matematico, che ha avuto forse solo il torto di apparire come l’ultimo studioso del campo euclideo, anche se di fatto è stato il primo ideatore di una geometria non euclidea, merita in particolare di essere qui ricordato per la emblematica posizione in cui si colloca il suo lavoro scientifico, teso tra le due componenti mentali antitetiche, sorrette una dalla intuizione, e l’altra dalla argomentazione razionale. Saccheri infatti sviluppando una trattazione razionale ineccepi-

bile, per il suo tempo, tenta (ovviamente senza riuscirci) di dimostrare il Postulato Euclideo delle parallele, facendo sostanziale appoggio su una immagine intuitiva e a-critica di linea retta. Egli ci offre in questo modo una esemplare commistione tra componente figurale e concettualizzazione razionale le cui conclusioni sono però condizionate dai preconcetti ideologici dai quali prende le mosse (cfr. per es. [3], [7]).

Il secondo tema di riflessione nell'ambito del binomio geometria e logica, a cui abbiamo in precedenza accennato, è un tema che non è possibile non ricordare, almeno di sfuggita, poiché riguarda complessivamente il valore educativo dell'insegnamento e dello studio della geometria, nonché il ruolo in ciò svolto dalle argomentazioni e dalle procedure che alla logica fanno riferimento (cfr. per es. [9], [24], [25], [27]). Ricordo l'espressione di affettuosa ironia con la quale Manara aveva riferito una definizione colta al volo ed enunciata da un qualche ragazzo liceale: «la geometria – diceva il ragazzo – è quella dove si dimostra». Attraverso questa suggestiva sgrammaticatura ci è facile capire che non c'è bisogno di svolgere una documentata indagine per convincersi che, anche nel giudizio spontaneo, geometria e logica sembrano avere legami privilegiati.

#### 2.4. *La creatività*

Mi sembra di poter dire che i due atteggiamenti mentali ai quali Carlo Felice Manara dedica forse la maggiore attenzione nei suoi scritti, oltre che in tutta la sua multiforme attività di Docente e di Formatore, sono da una parte quello legato al *rigore logico razionale*, e dall'altra quello della *creatività* (cfr. per es. [29], [32], [33], [35], [36]).

Il tema della creatività ricorre certamente nella sua personale esperienza intellettuale, come può testimoniare chiunque ha avuto il privilegio di lavorare al suo fianco, ma Manara riconosce anche il dono di una grande *creatività intuitiva* presente in moltissimi matematici, i cui nomi Egli ci ricorda come quelli di Studiosi che con il loro contributo hanno creato nuovi campi di ricerca e nuovi strumenti di indagine.

Se Blaise Pascal riconosce nella *libertà* il carattere distintivo dell'agire umano, Manara indica nella *creatività* uno degli aspetti fondamentali sotto i quali si manifesta tale libertà. D'altra parte Egli sostiene che la scienza stessa, se degna di questo nome, non potrebbe esistere senza l'atteggiamento di creatività dello spirito poiché, se è certo che ogni conoscenza prende l'avvio da elementi fattuali concreti desunti in qualche modo dalla realtà, l'atto definitivo del "conoscere" si



completa solo con l'intervento della creatività posseduta dallo spirito umano. È questo intervento che costituisce quella "elaborazione fantastica" del dato sensoriale che è stata in precedenza descritta. D'altra parte i dati sensoriali, sottoposti alla analisi della mente, sono stati già elaborati con la procedura che si è indicata con il termine "astrazione" e questa non è altro, in ultima analisi, se non il risultato di una capacità di guardare con occhi nuovi la realtà, capacità che consiste ancora una volta nel vedere e creare novità in ciò che incontriamo e percepiamo. In definitiva si deve riconoscere che è proprio la azione insostituibile della *fantasia creatrice* che dà vita alla costruzione di una teoria scientifica e le conferisce, in un certo senso, un aspetto analogo a quello di una costruzione artistica, libera espressione dello spirito umano. Se si restringe questa analisi dalla scienza in generale alla matematica, la creatività si può riconoscere in particolare nella geometria, ove si realizza attraverso la costruzione di immagini, oltre che con la formazione dei concetti e dei sistemi di concetti che sulle immagini si fondano. Più in generale alla creatività si deve anche l'invenzione, la scoperta, di simboli (con le loro leggi sintattiche) e di linguaggi formali sempre nuovi che la fantasia, come pure le esigenze concrete, suggeriscono.

Possiamo riconoscere questa azione della fantasia creatrice nell'opera di molti matematici di prestigio che Manara, nei suoi scritti, ci aiuta ad individuare attraverso l'analisi delle loro opere. Come esempi emblematici di creatività nella formulazione di concetti, Manara propone i nomi di J. Napier (Nepero) creatore dei *logaritmi*, Isaac Newton creatore dei concetti che noi oggi indichiamo con i nomi di *funzione* e di *derivata* e infine (fra i tanti) Felix Klein per il concetto di *invariante per un gruppo di trasformazioni*. Esempi di creazione di nuove teorie e strutture, sono offerti (e anche qui la scelta è vastissima) dalla teoria della *geometria proiettiva*, tra i cui creatori ricordiamo V. Poncelet e K. K. Von Staudt, e dalla *teoria delle funzioni di variabile complessa* dovuta alla genialità di A. Cauchy. Per avere esempi di creazione di simboli, metodi e procedure, due riferimenti valgono per tutti: il modello proiettivo del *piano della geometria non-euclidea iperbolica* dovuto a Felix Klein e la invenzione della *geometria analitica* che è un prodotto particolare, applicazione alla geometria del metodo di indagine, di deduzione e di analisi ideato da Cartesio.

Un ulteriore esempio di creatività, intesa come capacità di guardare con sguardo nuovo ciò che fa parte del complesso naturale delle nostre esperienze, capacità che abbiamo già in precedenza indicata con il termine di "astrazione" o anche "generalizzazione", lo possiamo anche

leggere nell'itinerario di sviluppo del pensiero geometrico così come si è evoluto dai concetti classici della geometria (tra '800 e '900) fino ad oggi (cfr. per es. [13], [18]). Carlo Felice Manara, in alcune Note, ci propone infatti una profonda e acuta lettura dei contenuti e dei metodi della geometria del nostro tempo che a suo giudizio nasce e si sviluppa come una evoluzione partendo dalle situazioni di crisi di natura critica che hanno coinvolto la geometria classica. Egli infatti riconosce nell'atteggiamento classico tre concetti fondanti di importanza cruciale, che si presentano in modo a-critico e con chiara evidenza intuitiva. Sottoposti ad una precisa analisi critica razionale, ciascuno di essi si sviluppa dando origine ad uno specifico filone di ampliamenti e di generalizzazioni che costituiscono i diversi capitoli in cui oggi è articolata la disciplina geometrica. I tre concetti di importanza cruciale sono precisamente: primo la accettazione del concetto di *corpo rigido* e di *trasporto rigido* come evidente e intuitivo, in secondo luogo la accettazione a-critica della *estrapolazione* nel tempo e nello spazio delle osservazioni ed esperienze locali, e infine la accettazione a-critica del concetto di *continuo* e delle sue presunte proprietà. Dalla analisi rigorosa e documentata presentata da Manara si può riconoscere nello sviluppo del primo dei tre filoni indicati il capitolo della geometria lineare, che comprende la geometria di posizione e la geometria algebrica fino a giungere alla nozione di gruppo di trasformazioni e alla conseguente classificazione delle geometrie. Nel secondo dei tre filoni si può vedere la nascita della geometria proiettiva, della geometria differenziale e la conseguente impostazione riemanniana dei fondamenti della geometria; mentre il terzo filone dà luogo alla analisi logica del continuo e alla topologia.

### 2.5. *La geometria analitica*

In questo breve sguardo al vasto complesso delle riflessioni di Carlo Felice Manara sui temi scientifici, epistemologici e didattici legati allo studio, alla ricerca e all'insegnamento della geometria, un cenno seppur rapidissimo va fatto a quel metodo di indagine ideato da Cartesio che indichiamo con il nome di *geometria analitica* e che occupa un importante ruolo nell'insegnamento scolastico della geometria. Tale metodo di indagine infatti ha costituito un punto di svolta rivoluzionario nella storia della dottrina geometrica, dottrina che si era prima servita soltanto dei metodi deduttivi della logica verbale classicamente intesa.

Il punto di vista con il quale Manara guarda alla geometria analitica possiede due versanti (cfr. [17]).

Il primo riguarda gli aspetti teorici e operativi di questo metodo di studio della geometria, metodo che è costituito da un insieme di convenzioni atte a rappresentare gli elementi geometrici mediante opportuni procedimenti che fanno loro corrispondere enti dell'algebra e loro relazioni funzionali. Il risultato più importante di queste convenzioni di rappresentazione consiste nel fatto che applicando le leggi di calcolo a quegli elementi algebrici rappresentativi e alle loro relazioni, si possono dedurre altre relazioni che esprimono nuove proprietà attribuibili agli stessi oggetti geometrici rappresentati. Inoltre, sotto condizioni che vanno per altro puntualmente controllate, risulta che questo processo è anche invertibile. In questa luce i procedimenti dell'algebra si presentano come vere e proprie leggi di deduzione razionale. Questo passaggio costituisce anche il germe che porterà poi alla rappresentazione formalizzata della logica verbale nelle sue formulazioni classiche. Tale procedura costituisce quindi una sorta di effettiva *algebrizzazione del ragionamento logico*.

Questa analisi apre il terreno al secondo versante da cui Manara guarda alla geometria analitica. Essa infatti può essere intesa come disciplina emblematica e rappresentativa di quella *matematizzazione del reale* di cui la matematica moderna è attore principale. Il metodo di rappresentazione ora descritto, che nel caso più semplice si può riferire alla geometria elementare e all'algebra lineare, può essere infatti applicato ad ogni aspetto della realtà con cui ci troviamo ad interagire, sia essa fisica, economica o sociale. Ovviamente lo strumento matematico, elementare o avanzato, dovrà essere tale da fornire una adeguata modellizzazione degli oggetti da rappresentare. Da questo punto di vista si può anche capire la ricchezza di valori educativi che sono impliciti nell'insegnamento della geometria analitica, valori che vanno ben al di là del semplice apprendimento di uno strumento utile per risolvere determinati, ma limitati, problemi geometrici.

## 2.6. *La conoscenza come servizio all'uomo*

La riflessione sulle radici epistemologiche della matematica, sulle procedure mentali che le accompagnano e i problemi di ordine logico e psicologico che vengono sollevati, costituiscono solo una parte del vasto ambito di pensiero abbracciato da Carlo Felice Manara.

È doveroso ricordare le acute e approfondite analisi da Lui condotte relativamente ai metodi di indagine e di formulazione delle Scienze della Natura, la Fisica in particolare, dall'epoca del Rinascimento ai giorni

nostri. In queste indagini, sempre efficacemente e attentamente inquadrare dal punto di vista storico e condotte con profonda e raffinata cultura, Manara non manca mai di mettere in evidenza il ruolo centrale giocato dal pensiero e dal metodo matematico nella nascita, nello sviluppo e nella costruzione metodologica delle diverse scienze. Il riferimento iniziale, naturalmente, non può che essere a Galileo, ma dopo di lui numerosi sono i matematici che vengono ricordati per avere influenzato, e contribuito anche, con il loro pensiero, i loro risultati, i loro strumenti di indagine, alla edificazione del pensiero scientifico come oggi noi lo conosciamo. Pensiamo, tra i molti nomi a cui possiamo riferirci, anche solo a Cartesio oppure Pascal e più recentemente a Klein, Hilbert, Peano, Enriques (cfr. per es. [2], [4]).

Mi sembra, per concludere, molto importante sottolineare che sullo sfondo di tutti questi pensieri e queste meditazioni a cui abbiamo accennato, il ruolo più importante nel giudizio di Manara è sempre attribuito all'uomo: al suo pensiero, alla sua figura di protagonista (cfr. [1], [8]). È la libera creatività dell'uomo, accompagnata da uno scrupoloso rigore razionale, che è impegnata nell'opera di conoscere e poi di capire e razionalizzare ciò che ha conosciuto. È sempre lei che fa nascere, promuove ed edifica il pensiero scientifico. D'altra parte è l'attenzione e il rispetto per il valore della persona, intesa come individuo spirituale, quello che funge da criterio di giudizio circa l'importanza della conoscenza e delle applicazioni tecnologiche o operative che ne conseguono.

La stessa attenzione per l'uomo e per i suoi valori, lo stesso interesse per la matematica e per il suo ruolo di strumento di conoscenza, di pensiero e di formazione intellettuale, hanno anche portato Carlo Felice Manara a intervenire molte volte con le sue idee, e anche con la sua azione, nel cuore stesso dei problemi della Scuola e dell'insegnamento. D'altra parte queste sue preoccupazioni lo hanno portato anche ad assumere dirette responsabilità di iniziative educative operative. Non è possibile tuttavia, in questa sede, neppure tentare di offrire una sintesi, seppure parziale, del contributo di Manara su questo tema, affrontato peraltro in diversa sede.

Termino ricordando S. Paolo, tema che non è certo estraneo al pensiero del prof. Manara e alla profonda vita di fede che Egli ha praticato.

Sul finire della sua vita Paolo scrive parole bellissime che sono un inno di fede e di speranza al suo Dio che sa di aver servito fedelmente. Paolo è infatti a Roma, prigioniero per la Fede e sa di essere stato con-

dannato a morte. Con un rapido sguardo di bilancio alla sua vita trascorsa Paolo scrive dunque (nella 2° lettera a Timoteo):

...ormai è tempo di sciogliere le vele..., ho combattuto la buona battaglia, ho terminato la mia corsa, ho conservato la fede. Ora mi resta solo la corona di giustizia che il Signore, giusto giudice, mi consegnerà in quel giorno, e non solo a me ma anche a tutti coloro che attendono con amore la sua manifestazione.

Ora io penso con certezza che anche il prof. Carlo Felice Manara può ripetere con verità e speranza queste parole dell'Apostolo Paolo (e forse lo ha anche fatto) e sono sicuro che il Signore, alla cui Misericordia spesso Egli si affidava, gli consegnerà con verità quella corona di giustizia che gli ha promesso.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] C.F. MANARA, *La scienza come valore nella società di oggi*, in *L'università, oggi*, Bologna, il Mulino, 1965, pp. 49-68.
- [2] C.F. MANARA, *La Matematica nel pensiero galileiano*, in *Nel quarto centenario della nascita di Galileo Galilei*, Milano, Vita e Pensiero, 1966, pp. 103-113.
- [3] C.F. MANARA, *Introduzione all'edizione italiana di "Fondamenti della Geometria" di D. Hilbert*, Feltrinelli, Milano, 1970, pp. vii-xxvi.
- [4] C.F. MANARA, *Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi*, «Vita e Pensiero», Milano, 1975.
- [5] C.F. MANARA, M. SPOGLIANTI, *La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese*, «Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena», (6), 19 (1977), pp. 109-129.
- [6] C.F. MANARA, *Passato e presente nella metodologia della scienza*, in *Aspetti e momenti del rapporto passato-presente nella storia e nella cultura*, «Rendiconti dell'Istituto Lombardo», (1977), pp. 99-110.
- [7] C.F. MANARA, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della matematica*, «Epistemologia», (1978), pp. 183-187.

M. Marchi

- [8] C.F. MANARA, *Scienza e tecnica nello sviluppo dell'uomo di oggi*, in *Alessandro Volta (1827-1977)*, Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, (1979), pp. 19-59.
- [9] C.F. MANARA, *La Matematica come strumento di formazione culturale*, «Didattica delle scienze», 89 (1980), pp. 13-18.
- [10] C.F. MANARA, *La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici*. 1. *La crisi galileiana della scienza della natura*, «Didattica delle scienze», 95 (1981), pp. 19-22, 36; 2. *Il calcolo infinitesimale e la meccanica classica*, «Didattica delle scienze», 97 (1982), pp. 11-13; 3. *Dalla meccanica razionale alla termodinamica*, «Didattica delle scienze», 98 (1982), pp. 29-32; 4. *La concezione di Einstein e la geometrizzazione della fisica*, «Didattica delle scienze», 99 (1982), pp. 10-12.
- [11] C.F. MANARA, *Federigo Enriques et David Hilbert*, «Epistemologia», (1981), pp. 189-204.
- [12] C.F. MANARA, *Il contributo di Enriques alla Matematica contemporanea*, in *Federigo Enriques: approssimazione e verità* (a cura di Ornella Pompeo Faracovi), Livorno, Belforte, 1982, pp. 25-42.
- [13] C.F. MANARA, *La generalizzazione del concetto di geometria*, «Nuova Secondaria», (2), 6 (1985), pp. 31-34.
- [14] C.F. MANARA, *Geometria e logica*, «Nuova Secondaria», (1), 4 (1983), pp. 38-40, 57.
- [15] C.F. MANARA, *L'evoluzione della Matematica nel secolo XIX*, in *Storia delle scienze* (diretta da Evandro Agazzi), Vol. II, cap. XIV, Roma, Città Nuova, 1984, pp. 15-49.
- [16] G. GIORELLO, C.F. MANARA, *La Matematica del XX secolo*, in *Storia delle scienze* (diretta da Evandro Agazzi), Vol. II, cap. XX, Roma, Città Nuova, 1984, pp. 247-294.
- [17] C.F. MANARA, *La Geometria. Problemi logici e didattici*, «Scuola e didattica», (1984), pp. 49-64.
- [18] C.F. MANARA, *Ampliamento del concetto di Geometria*, «Nuova Secondaria», (2), 6 (1985), materiali in inserto, pp. 52-56.
- [19] C.F. MANARA, *La mathématique face à son histoire*, Relazione al Congresso annuale di Friburgo della Académie des Sciences di Bruxelles, «Epistemologia», (1987), pp. 125-138.
- [20] C.F. MANARA, *La geometria: valori conoscitivi e formativi*, «Persona e Sapere, Quaderno della Fondazione Sacro Cuore», 1 (1986), pp. 52-58.

- [21] C.F. MANARA, *La continuità in geometria*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», (11), 10 (1988), pp. 907-937.
- [22] C.F. MANARA, *Problemi di didattica della matematica*, Brescia, La Scuola, 1989.
- [23] C.F. MANARA, *Il pensiero matematico tra la fine dell'800 e l'inizio del 900*, in *Il pensiero scientifico di Vito Volterra*, Ancona, La Lucerna, 1990, pp. 23-38.
- [24] C.F. MANARA, *I valori educativi e formativi dell'insegnamento delle scienze esatte*, «Pedagogia e vita», 2 (1993), pp. 7-14.
- [25] C.F. MANARA, M. MARCHI, *L'insegnamento della matematica nei primi due anni della scuola secondaria superiore*, Brescia, La Scuola, 1993.
- [26] C.F. MANARA, *I fondamenti della geometria nel pensiero di G. Peano*, Atti del Convegno "Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana", Quaderno n. 13, Ancona, IRRSAE Marche, 1993, pp. 209-220.
- [27] C.F. MANARA, *Introduzione a "Ripensando l'educazione matematica" di Hans Freudenthal*, Brescia, La Scuola, 1994, pp. 5-16.
- [28] C.F. MANARA, *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 17 (1994), pp. 283-295.
- [29] C.F. MANARA, *Metodi della Geometria nel secolo XIX*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 17 (1994), pp. 385-394.
- [30] C.F. MANARA, *L'evoluzione della geometria nel secolo XIX e conseguenze didattiche*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 17 (1994), pp. 619-661.
- [31] C.F. MANARA, *Geometria: intuizione e ragione*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 17 (1994), pp. 755-760.
- [32] C.F. MANARA, *Creatività ed insegnamento della matematica*, Convegno "Parlare di scienza o fare scienza?", Milano, DIESSE, 1995, pp. 25-50.
- [33] C.F. MANARA, *La creatività geometrica*, Atti del Convegno "Pensiero scientifico e creatività", Quaderno n. 21, Ancona, IRRSAE Marche, 1996, pp. 209-221.
- [34] C.F. MANARA, *Matematica e logica*, Atti del Convegno "Pensiero scientifico. Fondamenti ed Epistemologia", Quaderni di Innovazione e Scuola, n. 29, Ancona, IIRSAE Marche, 1996.

M. Marchi

- [35] C.F. MANARA, *La creatività in matematica*, «Emmeciquadro», 1 (1998), pp. 7-13.
- [36] C.F. MANARA, *La creatività in matematica*, in *Insegnare matematica* (a cura di Anna Paola Longo e Stefania Barbieri), Milano, Guerini, 2008, pp. 48-53.

#### RIASSUNTO

La figura di Carlo Felice Manara, scienziato eminente, illustre, uomo di vasta cultura, appare vivissima dalle sue Note scientifiche e dai suoi numerosi scritti, profusi al servizio della cultura, in nome della persona spirituale. Il profilo di questo Studioso viene qui tratteggiato nella testimonianza di un amico (che è stato in primo luogo suo allievo e poi collaboratore) offrendo qualche contributo alla lettura di alcuni dei Temi di studio e di riflessione sviluppati nei Suoi scritti, sempre profondi, documentati e originali.